と比較した結果, 翼列角によって多少の違いはあるが, ピッチ $1.2 \sim 1.4$ 以上では十分実用に使えることが確かめられた。

なお本方法を λ^6 まで取っても計算の労力の割に精度は改善されなかった。白倉氏⁽⁵⁾は平板翼列について更に多くの項を取っておられたが精度の改善は遅々たるものであった。これは多分 (2.1) の逆関数 (2.6) の収れん領域が $2|c_{-1}| < |\zeta|$ であるからであろう。

文 献

- (1) 藤本・広瀬, 機械学会論文集, 13 巻 44 号, 165~169 ページ (昭 22)。
- (2) 藤本・山下, 機械学会論文集, 6 巻 24 号, III-1 ページ (昭 15)。
- (3) Y. Shimoyama, *Mem. Fac. Engg. Kynshu Imp. Univ.*, 8 (1938), 281~329.
- (4) S. Katzoff, R.S. Fiun & J.C. Laurence, *NACA. T.R.* 879 (1947)。
- (5) 白倉, 機械学会論文集, 15 巻 50 号, III-64~72 ページ, 昭 24。
- (6) 守屋, 航空誌, 5 (昭 13) 7~17。
- (7) 河崎, 機械学会論文集, 17 巻 58 号, 62 ページ, (昭 26)。
- (8) 河崎, 応用力学, 5 (昭 26) 1~3 または運研報告, 1 (昭 26) 127~136。

533.6.076:532.525

浅底水流による高速気流の研究 (第 3 報)*

(跳水と衝撃波の相似性, 跳水並びに浅底水そうの断面形について)

富 田 幸 雄**

A Study of High Speed Gas Flow by the Hydraulic Analogy (3rd Report)

(Analogy between Hydraulic Jumps in Liquids and Shock Waves in Gases, Hydraulic Jumps, and Forms of Water Tank Section)

by Yukio TOMITA

Although the perfect analogy between hydraulic jumps in liquids and shock waves in gases does not exist, both of analyses and experiments reveal that the approximate analogy between hydraulic jumps in liquids and shock waves in gases with specific heat ratio $\gamma=1.4$ exists over a range of free-stream Mach number from 2 to 6 roughly. Furthermore, the hydraulic jumps in liquids are roughly analysed. Lastly, the method to vary the ratio of the specific heat of gas by changing form of water tank section is generally formulated.

1. 緒 言

浅底水流と断熱指数 $\gamma=2$ の二次元等エントロピ高速気流の間に相似則が成立することは, かなり古くから知られているが, この相似則には多くの仮定が含まれている。この相似則を妨げる主因は, 高速気流が二次元流れであるのに対して, 浅底水流は自由表面をもつ三次元流れであることである。すなわち水流の垂直加速度, 表面張力の影響が考慮されねばならない。さらに流水式浅底水そうでは水の粘性による影響が無視できなくなる。筆者らは第 1, 2 報⁽¹⁾においてこれらの事柄について報告した。

流れの場に衝撃波が発生するようになると, 流れはもはや等エントロピではなくなり, 浅底水流ではこれに対応して跳水が生じ, エネルギの消散が行われる。本報告では主として跳水と衝撃波の相似性について述

べる。

2. 衝撃波と跳水の相似性

2.1 第 1 図のような角の壁に沿って, 超音速の流れ, あるいは射流が曲る場合には衝撃波, あるいは跳水が発生する。この場合には良く知られているようにそれぞれ次のごとき関係式が成立する。ただし, U = 流れの速度, U_n, U_t = それぞれ波面に垂直, 平行な流れの分速度, p = 気体の圧力, ρ = 気体の密度, h = 水深, 添字 1, 2 はそれぞれ波面の前後を示す。

第 1 図

* 昭和 30 年 4 月 8 日 第 32 期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 30 年 10 月 31 日。

** 正員, 東京工業大学。

$$\begin{array}{lcl} \text{連続の式} & \text{気 流} & \text{浅 底 水 流} \\ \rho_1 U_{n1} = \rho_2 U_{n2}, & & h_1 U_{n1} = h_2 U_{n2} \dots\dots\dots (1) \end{array}$$

運動量の式

$$(a) \text{ 波面に平行 } \rho_1 U_{n1} U_{t1} = \rho_2 U_{n2} U_{t2}, \quad h_1 U_{n1} U_{t1} = h_2 U_{n2} U_{t2} \dots\dots\dots (2)$$

$$(b) \text{ 波面に垂直 } \rho_1 U_{n1}^2 + p_1 = \rho_2 U_{n2}^2 + p_2, \quad h_1 U_{n1}^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 = h_2 U_{n2}^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \dots\dots\dots (3)$$

音速（表面波の速度）に対しては

$$C^2 = dp/d\rho, \quad C^2 = d\left(\frac{1}{2} g h^2\right)/dh = gh \dots\dots\dots (4)$$

となる。いま簡単に $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta p = p_2 - p_1$, $\Delta h = h_2 - h_1$, $\Delta(1/2 g h^2) = 1/2 g h_2^2 - 1/2 g h_1^2$ とおけば (1), (2), (3) より

$$\rho_2/\rho_1 = \tan \omega / \tan(\omega - \delta), \quad h_2/h_1 = \tan \omega / \tan(\omega - \delta) \dots\dots\dots (5)$$

$$\Delta p = \rho_1 U_1^2 \frac{\Delta\rho}{\rho_2} \sin^2 \omega, \quad \Delta\left(\frac{1}{2} g h^2\right) = h_1 U_1^2 \frac{\Delta h}{h_2} \sin^2 \omega \dots\dots\dots (6)$$

が得られる。(5), (6) より跳水は h_1 , U_1 , δ が与えられれば完全に決定するが、衝撃波の場合にはなお一つの関係式、すなわち Rankine-Hugoniot の式

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2}{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2} \dots\dots\dots (7)$$

が必要となる。跳水の場合のこれに対応する関係は

$$h_2/h_1 = \sqrt{(1/2 g h_2^2)/(1/2 g h_1^2)} = \sqrt{P_2/P_1} \dots\dots (8)$$

である。ただし $P = 1/2 g h^2$ (水流の垂直な単位幅に働く静圧) である。かくしてこの場合には、 $\gamma = 2$ の気体の等エントロピ流れと浅底水流におけるような完全な対応関係は成立しないことがわかる。 $\gamma = 1.4$, および 2 とした場合の (7) からの計算結果と, (8) からの計算結果を図示すれば第 2 図のようになる。この図よ

第 2 図

り大略 $10 < p_2/p_1 < 40$ の範囲では跳水の場合の関係は $\gamma = 2$ の気体よりも $\gamma = 1.4$ の気体の場合にはるかに近くなり、跳水と空気中における衝撃波との相似が大略成立すると見てよい。これに反して $p_2/p_1 < 10$ の範囲では $\gamma = 2$ の場合に近くなる。これは p_2/p_1 が小さいときはエントロピ変化が小さくなり、衝撃波に対して成立する Rankine-Hugoniot の関係式 (7) が $\gamma = 2$ のときの断熱法則、すなわち $\rho_2/\rho_1 = \sqrt{p_2/p_1}$ に近づくからである。垂直衝撃波の場合におけるマッハ数 M_1 (衝撃波前方) に対する圧力の無次元表示を次式から計算して第 3 図に示した。すなわち気体に対しては (1), (2), (3), (7) より

$$q = \frac{p_2 - p_1}{1/2 \rho_1 U_1^2} = \frac{4(M_1^2 - 1)}{(\gamma + 1) M_1^2} \dots\dots\dots (9)$$

第 3 図

跳水に対しては (1), (2), (3) より

$$q = \frac{P_2 - P_1}{1/2 h_1 U_1^2} = \frac{2M_1^2 - \sqrt{1/4 + 2M_1^2} - 1/2}{M_1^2} \dots\dots (10)$$

が得られ、これを用いて計算した。かくして第 2 図よりは、大略 $3 < M_1 < 6$ の範囲で、第 3 図よりは大略 $2 < M_1 < 6$ の範囲で跳水と $\gamma = 1.4$ の気体における衝撃波が、かなりの近似度で相似であることが見られる。第 2 図と第 3 図でマッハ数の範囲が異なるが、これらを描いた跳水理論は単純な運動量理論で、複雑な三次元的跳水に対して p_2/p_1 の広い範囲でこれが成立するかどうかは簡単に断定し難いと思われる。以下に「円柱の前方に生ずる衝撃波」および「くさびをすぎる超音速流」の場合について実験したが、その結果垂直衝撃波に限らず、無かく乱流のマッハ数 M_1 が大略 $2 < M_1 < 6$ の範囲の衝撃波に対して、 $\gamma = 1.4$ の気体と跳水との間にはかなりの近似度で相似性が成立するようである。

2.2 円柱の前方に生ずる衝撃波 第 4 図のように、超音速の流れの中におかれた円柱の前方には、わん曲した衝撃波が生じ、この衝撃波はマッハ数が大きくなるにしたがってだんだんと円柱に近づいて行くことが知られている。この問題は多くの人によって研究

されているが、未だ完全には解決されていないようである。この場合を浅底水流で実験した。第 5 図は写真撮影をした一例である。円柱前面から衝撃波までの距離を測定した結果を第 6 図に示す。この場合模型の大きさ、水深、水流の垂直横断面の速度分布、水その傾斜をいろいろ変えて実験したが、その結果余り差がないようである。第 6 図の

第 4 図

第 5 図 $M_1 = 2.44$

第 6 図

実線並びに点線はそれぞれ $\gamma = 1.4, 2$ に対して K. Hida⁽²⁾ の近似計算式より求めたものである。この図より大略マッハ数 M_1 が 2 以上で跳水は $\gamma = 1.4$ の気体中における衝撃波に比較的良く一致するように思われる。

2.3 くさびをすぎる超音速流 第 7 図のように超音速流が くさび形 の物体をすぎて流れる場合、斜めの衝撃波が形成され、このときマッハ数 M_1 と角度との間には気体と跳水に対してそれぞれ次のような関係が成立することは良く知られている。

$$\frac{1}{M_1^2} = \sin^2 \beta - \frac{(\gamma+1) \sin \theta \sin \beta}{2 \cos(\beta-\theta)} \quad \dots\dots(11)$$

$$M_1^2 = \frac{1}{[2 \sin^2 \beta \frac{\tan \beta \{ \tan \beta + \tan(\beta-\theta) \}}{\tan^2(\beta-\theta)}]} \quad \dots\dots(12)$$

さて半頂角 $\theta = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ の 4 種の くさび を作

第 7 図

りマッハ数 M_1 を種々に変えて浅底水流で実験し、くさびの頂点から出る跳水のなす角 β を測定した。その結果を第 8 図(a), (b), (c), (d) に示す。図中の各線はそれぞれ気体に対しては $\gamma = 1.4, 2$ として (11) より、跳水に対しては (12) より計算して求めたものである。第 9 図に写真撮影をした一例を示す。この場合は、垂直衝撃波でないにもかかわらず流れの場の、くさび前方のマッハ数が大略 $2 < M_1 < 6$ の範囲でかなり良く $\gamma = 1.4$ の場合と一致することが見られる。(実験は 2.2, 2.3 の両方ともマッハ数 M_1 が 4 位までしか行っていないが測定値の傾向と、第 2, 3 図から少なくとも M_1 が 6 くらいまでは概略一致と思われる。) また跳水をとまなう物体の周囲の圧力分布も第 2 報⁽¹⁾で報告したように $\gamma = 1.4$ の気体の場合に比較的良く一致するようである。以上により、跳水と $\gamma = 1.4$ の気体中に生ずる衝撃波は無かく乱流のマッハ数 M_1 が大略 $2 < M_1 < 6$ の範囲で垂直衝撃波にかぎらず、斜めの衝撃波に対しても一般に相似性が成立すると見てよいようである。もちろん跳水と衝撃波との間には厳密な相似則が成立するわけではないのであるから、現象的にも定量的にもある程度の差異が生ずるのは当然である。したがって浅底水流を用いて気体の衝撃波を研究する場合、そこにおのずから限界が生ずることは明らかである。

3. 跳水について

次に跳水現象を解析的に調べて見ることにする。第 10 図のように座標を定め Boussinesq の渦粘性係数 ϵ を一定と仮定し、流れは二次元定常的とすれば運動方程式、連続方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\epsilon}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \frac{\epsilon}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots(14)$$

ただし、 u, w はそれぞれ x, z 方向の流れの分速度、 p は圧力、 ρ は密度、 g は重力の加速度を表わす。さて w/u は水面で dh/dx に等しく、底面で 0 になるが、

第 8 図

第 9 図 $\theta=15^\circ$, $M_1=3.46$

第 10 図

その間で直線的に変化するものと仮定すれば

$$\frac{w}{u} = \frac{z}{h} \frac{dh}{dx} \quad (15)$$

となる。(14), (15) を用いれば (13) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^2}{h} \frac{dh}{dx} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{z}{h} u^2 \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{z}{h^2} u^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \\ &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

とかける。境界条件は

$z=0$ で $u=w=0$, $z=h$ で

$$p = - \frac{T \frac{d^2 h}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} = -T f(x) \quad (17)$$

ただし T = 表面張力を示す。ここで x 断面の z 方向の u の速度分布を

$$u = u_h (z/h)^n \quad (18)$$

(ただし u_h = 水面の u の値を表わす) と仮定し、流量 $Q = \int_0^h u dz$ = 一定なる条件を用いて計算すれば、

(16) は次のようになる。ただし高次の微小渦粘性項

は省略する。

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)^2}{2n+3} Q^2 \frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{2(n+1)^2}{2n+3} \frac{Q^2}{h} \frac{dh}{dx} \frac{d^2 h}{dx^2} \\ & + \frac{\varepsilon}{\rho} (n+1)(1-n) \frac{Q}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{(n+1)^2}{2n+3} \frac{Q^2}{h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^3 \\ & - \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{2(n+1)}{h^2} Q \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \left\{ gh - \frac{(n+1)^2}{2n+1} \frac{Q^2}{h^2} \right\} \frac{dh}{dx} \\ & - \frac{T}{\rho} h \frac{df}{dx} - \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{n(n+1)}{h^2} Q = 0 \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

いま近似的に $n=1/7$ とし、渦粘性項および表面張力項を無視すれば (19) は

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{2}{h} \frac{dh}{dx} \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{1}{h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^3 \\ & + \frac{161}{64} \frac{1}{Q^2} \left\{ gh - \frac{64}{63} \frac{Q^2}{h^2} \right\} \frac{dh}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$Y = (dh/dx)^2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

とおけば (20) は次式のごとくなる。

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{2h_1\beta z + \left(\frac{161}{63} + 2h_1\beta - \frac{161}{64} \frac{1}{M_1^2} \right) z^2 - \frac{161}{64} \frac{1}{M_1^2} z^3}} = \frac{x}{h_1} \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。さて三次方程式

$$2h_1\beta z + \left(\frac{161}{63} + 2h_1\beta - \frac{161}{64} \frac{1}{M_1^2} \right) z^2 - \frac{161}{64} \frac{1}{M_1^2} z^3 = 0$$

の根は

$$z=0, \left\{ \frac{64}{161} M_1^2 \left(\frac{161}{63} + 2h_1\beta - \frac{161}{64} \frac{1}{M_1^2} \right) \pm \sqrt{\left\{ \frac{64}{161} M_1^2 \left(\frac{161}{63} + 2h_1\beta - \frac{161}{64} \frac{1}{M_1^2} \right) \right\}^2 + \frac{512}{161} M_1^2 h_1 \beta} \right\} / 2$$

であるが、この根を大きさの順序に $\alpha_0, \alpha_1=0, \alpha_2$, とすれば (27) は

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(z-\alpha_0)(\alpha_2-z)}} = \frac{\sqrt{161}}{8M_1} \frac{x}{h_1} \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。(28) より z は α_2 より大きくならないことがわかる。(28) は Jacobi の だ円関数 を使用すれば次のように書ける。

$$\frac{h-h_1}{h_1} = \frac{-\alpha_0\alpha_2 \operatorname{sn}^2 X}{\alpha_2 \operatorname{cn}^2 X - \alpha_0} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで $X = \frac{\sqrt{161(\alpha_2-\alpha_0)}}{16M_1} \frac{x}{h_1}$ である。また母数は $k^2 = \alpha_2/(\alpha_2-\alpha_0)$

となる。(29) より跳水は波状形を呈することがわかり、その波長 λ は

$$\lambda = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad \dots\dots\dots (30)$$

より求められる。

いま一例として $h_1=1\text{ cm}$, $\beta=0.1 \frac{1}{\text{cm}}$, $M_1=1.4$ として計算すれば第 11 図のようになる。 $M_1^2 < 3$ ならば跳水は波状形を呈するが、 $M_1^2 > 3$ になると波はくずれて表面渦が生じ跳水は比較的平たんになることが実験的⁽⁴⁾に知られているが、この現象は渦粘性項を考慮した (19) を解けば説明できると思われる。

$$\frac{d^2 Y}{dh^2} - \frac{2}{h} \frac{dY}{dh} + \frac{2}{h^2} Y = \frac{161}{32} \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{64}{63} - \frac{gh^3}{Q^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

この式は、2 階の線型微分方程式ゆえ容易に積分される。かくして (20) の解として

$$\int \frac{dh}{\sqrt{\frac{161}{63} + Bh + Ah^2 - \frac{161}{64} \frac{g}{Q^2} h^3}} = x + C_1 \quad \dots\dots\dots (23)$$

が得られる。ここで A, B, C_1 は積分定数である。さて

$$(h-h_1)/h_1 = z \quad \dots\dots\dots (24)$$

(h_1 は跳水前の水深) とおき、 $x=0$ で $h=h_1$ とすれば (23) は

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{C + Dz + Ez^2 - Fz^3}} = \frac{x}{h_1} \quad \dots\dots\dots (25)$$

となる。ただし $C=161/63+Bh_1+Ah_1^2-161/64 \cdot 1/M_1^2$, $D=Bh_1+2Ah_1^2-161/64 \cdot 3/M_1^2$, $E=Ah_1^2-161/64 \cdot 3/M_1^2$, $F=161/64 \cdot 1/M_1^2$, $M_1^2=U_1^2/gh_1$ である。

いま境界条件として

$$x=0 \text{ (} h=h_1 \text{)} \text{ で } dh/dx=0, d^2h/dx^2=\beta \quad \dots\dots\dots (26)$$

とおけば (25) は

第 11 図

4. 浅底水そうの断面形と気体の断熱指数の関係について

長方形断面を流れる浅底水流と、二次元等エントロピ高速気流はこの気流の断熱指数 γ が 2 の場合にのみ完全な相似性が成立する。しかし $\gamma=2$ の気体は実在しないのでこの欠点を除く手段として、水そうの断面形を変えることが提案されているが、その一般的定式化は見当らないようなので、ここでこれについて調べて見ることにする。座標軸を第 12 図のようにえらび流体の粘性は省略する。また無かく乱流の中央にお

第 12 図

ける水深を h_1 とし、断面は z 軸に関して対称であるとし、その形を

$$z = \varphi(y) \dots\dots\dots (31)$$

とおく。しかば運動方程式、連続方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{Dw}{Dt} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots (32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (33)$$

ここで u, v, w はそれぞれ x, y, z 軸方向の流れの分速度、 p は圧力、 ρ は密度を表わす。いま垂直加速度 Dw/Dt を重力の加速度 g に対して無視すれば (32) の第 3 式より

$$p - p_0 = \rho g(h - z) \dots\dots\dots (34)$$

が得られ (p_0 = 自由表面の圧力)、これより (32) の第 1, 2 式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{(n-1)gh_1}{n} \left(\frac{h_1}{h-\varphi} \right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{h-\varphi}{h_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right\} \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{(n-1)gh_1}{n} \left(\frac{h_1}{h-\varphi} \right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{h-\varphi}{h_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (35)$$

となる。ただし n は任意の定数である。さて無かく乱流の速度分布が z 方向に一様であれば (35) より u, v は x, y, t のみの関数となるから (33) より

$$w = -z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + f(x, y, t) \dots\dots\dots (36)$$

となる。自由表面 $z = h$ では

$$w = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \dots\dots\dots (37)$$

なるゆえ、(36) より次式が得られる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = f(x, y, t) \dots\dots\dots (38)$$

断面境界への法線方向余弦を l, m, n とすれば

$$lu + mv + nw = 0 \dots\dots\dots (39)$$

が成立し、これより

$$w = v d\varphi/dy \dots\dots\dots (40)$$

が得られる。この式と (36), (38) とより

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (h-\varphi)^{\frac{1}{n-1}} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (h-\varphi)^{\frac{1}{n-1}} u \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (h-\varphi)^{\frac{1}{n-1}} v \right\} = \frac{2-n}{n-1} (h-\varphi)^{\frac{2-n}{n-1}} \frac{D}{Dt} (h-\varphi) \end{aligned} \dots\dots\dots (41)$$

となる。この式で右辺は一般には 0 にならないがこれを小さいとして無視すれば (41) は次のようにかける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{h-\varphi}{h_1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{h-\varphi}{h_1} \right)^{\frac{1}{n-1}} u \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{h-\varphi}{h_1} \right)^{\frac{1}{n-1}} v \right\} = 0 \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

一方気体の二次元等エントロピ流れを表わす方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{a_1^2}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{p_1} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{a_1^2}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{p_1} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{\rho_1} u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho}{\rho_1} v \right) = 0 \dots\dots (44)$$

ここで a = 音速、添字 1 は無かく乱流における量を示す。断熱方程式は

$$\begin{aligned} p/p_1 &= (\rho/\rho_1)^\gamma, \quad \rho/\rho_1 = (T/T_1)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \\ p/p_1 &= (T/T_1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

音速 a_1 は

$$a_1^2 = g\gamma RT_1 = g(\gamma-1)i_1, \quad i_1 = C_p T_1 \dots\dots\dots (46)$$

である。ただし T = 絶対温度、 i = エンタルピを表わす。(35), (42) と (43), (44) の比較より

$$n = \gamma, \quad a_w^2 = (\gamma-1)gh_1 \dots\dots\dots (47)$$

ならば (a_w = 長波の伝ば速度) 次のような対応関係で両者の相似性が成立つ。

$$\begin{aligned} T/T_1 = i/i_1 &= (h-\varphi)/h_1, \quad \rho/\rho_1 = \{(h-\varphi)/h_1\}^{\frac{1}{\gamma-1}}, \\ p/p_1 &= \{(h-\varphi)/h_1\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

波動論によれば長波の伝ば速度は

$$a_w^2 = (gA)/(2b) \dots\dots\dots (49)$$

である。ここで A = 断面積、 $2b$ = 水路の幅を表わす。よって (47), (49) より

$$(2-\gamma)h_1 = \frac{1}{b} \int_0^b \varphi(y) dy \dots\dots\dots (50)$$

を満足するように断面形 $z = \varphi(y)$ を定めれば、要求する断熱指数が得られる。

7. 結 論

上述のように跳水と断熱指数 1.4 の気体中に生ずる衝撃波の間には、跳水を伴わない浅底水流と断熱指数 2 の気体の等エントロピ高速気流の間におけるような完全な相似則は成立たないが、大略マッハ数 M_1 が $2 < M_1 < 6$ の範囲内で相似則が成立するとみてさしつかえないことを明らかにした。また跳水の機構を概略、解析したが、波状形跳水の生成限界を説明するにはさらに解析の近似度を高めなければならない。次に浅底水そうの断面形を変えることによって断熱指数を変える方法についての一般的な定式化を試みた。本研究に当り終始御懇篤な御指導をいただいている東京工大板谷松樹教授、また貴重な文献を貸与下された森康夫助教授に深く感謝致します。

文 献

- (1) 筆者、機械学会論文集、21 巻 101 号、18 ページ (昭 30)。
- (2) K. Hida, J. Phys. Soc. Japan., 8 (1953) 740.
- (3) E.V. Laitone, J. Aeron. Sci., 19 (1952-4).
- (4) F.R. Gilmore, M.S. Plesset and H.E. Crossley, J. Appl. Phys., 21 (1950) 243.