539. 384. 2: 624. 073. 112

軸に対称な曲げ荷重を受ける円板の応力*

安 藤 常 世**

Bending Stress in Symmetrically Loaded Circular Plates

by Tsuneyo ANDO

As the most fundamental problem in bending of circular plates of variable thickness, here is given a stress analysis of plates, in which thickness is decreased with the increase of distance from the centre, loaded with some hydrostatic pressure.

Assuming thin plates and load independent of azimuthal location, the problem is reduced to be one dimensional. Here thickness variation is given in the form of $h = h_{\max}(1 - \rho^\mu)^{m/3}$, which is an equivalent expression to the variation of flexural rigidity $D = D_{\max}(1 - \rho^\mu)^m$.

General solutions for such cases are shown, and numerical results are given of some examples when plates are clamped at inner radius, free at outer, and bent by hydrostatic pressure.

Result for a plate with constant thickness and bent under the corresponding condition is also calculated, and compared with those in case of variable thickness.

1. は し が き

厚さが一様でない円板が円周方向に均等な荷重により曲げられる場合のうち、実際上しばしば見受けられるのは厚さが半径とともに減少もしくは増大し、中心を貫通する軸でさえられた円板に静水圧がかかるもの、たとえば蒸気あるいはガスタービンのごときがある。このようなとき、板の厚さが小さければ、厚さの方向の応力を無視してたんに応力が中立面よりの距離に比例して直線状に変化する中立面に平行なもののみと考え、一元的問題として取り扱うことができる。厚さが半径とともに直線的に増加あるいは減少する場合については、すでに H. D. Conway 博士の研究があり⁽¹⁾、一般解と若干の数値計算例とが与えられている。このときの厚さの変化は $h = h_{\max}\rho$ あるいは $h = h_{\max}(1 - \rho)$ 、ただし半径 $r = a\rho$ であらわされる。また $h = h_{\max}(1 - \rho)^m$ なる厚さの変化があるものについては、Gran Olsson⁽²⁾が一般的な基礎方程式から超幾何微分方程式が導びかれることを示唆している。

本論文では、厚さの変化を前二者よりも拡張した形 $h = h_{\max}(1 - \rho^\mu)^{m/3}$ で与えたが、これは曲げこわさ $D = D_{\max}(1 - \rho^\mu)^m$ と等価な表現である。このような場合についての一般的な解を求め、円板が内半径 r_i において固定され、外半径 r_o においては自由であるときに単位面積当り q なる大きさの静圧力によって

曲げられるものとして若干の数値計算を行った。その結果は同じ条件で曲げられる厚さ一様の円板におけるそれと比較されている。

2. 基礎方程式

半径とともに変化する厚さをもつ円板が円周方向に均等な荷重により曲げられる場合の基礎方程式は次式で与えられる⁽³⁾。

$$D \frac{d}{dr} \left\{ \frac{d\phi}{dr} + \frac{\phi}{r} \right\} + \frac{dD}{dr} \left\{ \frac{d\phi}{dr} + \nu \frac{\phi}{r} \right\} = -Q \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、ここに D : 曲げこわさ、 $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$

E : 縦弾性係数

h : 円板の厚さ、任意半径 r において

λ : ポアソン比

r : 半径

ϕ : 中立面の傾き

Q : 単位円周長さ当りのせん断力

無次元半径 $\rho = r/a$ を導入し、さらに厚さ h および曲げこわさ D の変化を

$$h = h_{\max}(1 - \rho^\mu)^{m/3} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$D = D_{\max}(1 - \rho^\mu)^m \quad \dots\dots\dots (2)'$$

とおくと (1) 式は $D_{\max} = Eh_{\max}^3/12(1 - \nu^2)$

を考慮して下のようになる。

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \left\{ \frac{1}{\rho} - \frac{m\mu}{1 - \rho^\mu} \rho^{\mu-1} \right\} \frac{d\phi}{d\rho} - \left\{ \frac{m\mu\nu}{1 - \rho^\mu} \rho^{\mu-1} + \frac{1}{\rho} \right\} \frac{\phi}{\rho} = -\frac{Qa^2}{D_{\max}(1 - \rho^\mu)^m} \quad \dots\dots\dots (3)$$

* 昭和 27 年 4 月 3 日 第 29 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 31 年 1 月 20 日。

** 正員、慶応義塾大学院学生。

ここで $\rho^\mu = x$ (4)

とすれば (3) 式は簡単な形

$$x(1-x) \frac{d^2\phi}{dx^2} + \{1 - (1+m)x\} \frac{d\phi}{dx} - \frac{1}{\mu^2} \{1 + (m\mu\nu - 1)x\} \frac{\phi}{x} = - \frac{Qa^2x^{2/\mu-1}}{\mu^2 D_{\max}(1-x)^{m-1}} \quad \text{..... (5)}$$

となり、補助方程式は

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + p(x) \frac{d\phi}{dx} + q(x)\phi = 0 \quad \text{..... (6)}$$

$$\text{ただし } p(x) = \frac{1 - (1+m)x}{x(1-x)},$$

$$q(x) = - \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{1 + (m\mu\nu - 1)x}{x^2(1-x)}$$

である。これをリーマンの P-方程式⁽⁴⁾

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{ \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c} \right\} \frac{du}{dz} + \left\{ \frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c} \right\} \frac{u}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0 \quad \text{..... (7)}$$

と比較し、 z, u をそれぞれ x, ϕ と書き、 $a=0, b=\infty, c=1$ なる値を選べば

$$\left. \begin{aligned} \alpha, \alpha' &= \pm 1/\mu \\ \beta, \beta' &= \frac{1}{2} \left\{ m \mp \sqrt{m^2 - \frac{4}{\mu^2}(m\mu\nu - 1)} \right\} \dots \quad (8) \\ \gamma &= 0, \gamma' = 1 - m \end{aligned} \right\}$$

が得られ、補助関数は次のように得られる。

$$\phi = P \begin{Bmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{Bmatrix} x \quad \text{..... (9)}$$

2. 一般的な場合の解

a) 従属変数の変換 上式 (9) に示された P-方程式の解は、その因数として超幾何関数をふくむ形に書かれることがすでに知られている。のちに特別解を求める便宜のために

$$\phi = \left(\frac{x-a}{x-b} \right)^a \left(\frac{x-c}{x-b} \right)^{r'} F \left\{ \alpha + \beta + \gamma', \alpha + \beta' + \gamma'; 1 + \alpha - \alpha'; \frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)} \right\} \quad \text{..... (10)}$$

を選び、これを $a=0$ 等の条件から

$$\phi = x^{1/\mu} (1-x)^{1-m} F \{ A, B; C; x \} \quad \text{..... (11)}$$

と書いておく。ただし

$$\left. \begin{aligned} A &= \alpha + \beta + \gamma' \\ &= \frac{1}{\mu} + 1 - m + \frac{1}{2} \left\{ m - \sqrt{m^2 - \frac{4}{\mu^2}(m\mu\nu - 1)} \right\} \\ B &= \alpha + \beta' + \gamma' \\ &= \frac{1}{\mu} + 1 - m + \frac{1}{2} \left\{ m + \sqrt{m^2 - \frac{4}{\mu^2}(m\mu\nu - 1)} \right\} \\ C &= 1 + \alpha - \alpha' = 1 + 2/\mu \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (12)}$$

(11) 式に着目すれば変換

$$\phi = x^{1/\mu} (1-x)^{1-m} w$$

によって式 (5) は下のよう書き換えられる。すなわち

$$x(1-x) \frac{d^2w}{dx^2} + \{C - (A+B+1)x\} \frac{dw}{dx} - ABw = - \frac{Qa^2x^{1/\mu-1}}{\mu^2 D_{\max}} \quad \text{..... (13)}$$

よく知られているように w の補助解は $x, 1/(1-x), (x-1)/x$ 等の級数として書きあらわされ、収束の良否を考慮して適当なものを選択することができる。もちろんこのときに線型に独立なもの 2 個を選ぶことが必要である。

b) 荷重および支持の方法、境界条件、応力の計算

円板がその外周および内周にそって一様に分布する純粋な偶力によって曲げられるときには、せん断力 Q は 0 となり、(6) 式の 2 個の補助解を ϕ_1, ϕ_2 とし

$$\phi = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 \quad \text{..... (14)}$$

が一般の解 ϕ を与える。ただし ϕ_1/ϕ_2 は定数とする。

また実際の場合におけるように、円板がその中心を通る軸に固着されており、周辺で自由であるとすれば単位円周当りせん断力 Q は

i) 円板が単位面積当り q なる大きさの静水圧によって曲げられるとき

$$Q = \frac{qa}{2} \left\{ \frac{\rho_0^2}{\rho} - \rho \right\} \quad \text{..... (15)}$$

ただし $r_0 = a\rho_0$

ii) 周辺にそって荷重 W が一様に分布しているとき

$$Q = W/2\pi a\rho \quad \text{..... (16)}$$

となる。これら 2 式を $\rho^\mu = x$ とともに (13) 式に代入すれば

$$x(1-x) \frac{d^2w}{dx^2} + \{C - (A+B+1)x\} \frac{dw}{dx} - ABw = K_1x^{-1} + K_2x^{2/\mu-1} \quad \text{..... (17)}$$

が得られ K_1, K_2 は上の i), ii) に対応して

$$\text{i) } K_1 = -q_0^2 a^3 / 2\mu^2 D_{\max}, \quad K_2 = qa^3 / 2\mu^2 D_{\max}$$

$$\text{ii) } K_1 = -Wa/2\pi\mu^2 D_{\max}, \quad K_2 = 0$$

である。i) においては

$$K_1 = -\rho_0^2 K_2 \quad \text{..... (18)}$$

であり、 ϕ は K_1, K_2 のいずれか一方のみをふくんであらわれる。

中心を通る軸でささえられているときの境界条件は
外半径 r_0 にて ($\rho = \rho_0$)、半径方向応力 $\sigma_r = 0$
内半径 r_i にて ($\rho = \rho_i$)、中立面の傾き $\phi = 0$
である。中立面よりの距離 z なる位置にある点の応力は

$$\left. \begin{aligned} \text{半径方向 } \sigma_r &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left\{ \frac{d\phi}{dr} + \nu \frac{\phi}{r} \right\} \\ &= \frac{Ez}{a(1-\nu^2)} \left\{ \frac{d\phi}{d\rho} + \nu \frac{\phi}{\rho} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{円周方向 } \sigma_\theta &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left\{ \nu \frac{d\phi}{dr} + \frac{\phi}{r} \right\} \\ &= \frac{Ez}{a(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\phi}{\rho} + \nu \frac{d\phi}{d\rho} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

で, $\sigma_r=0$ に応ずる条件は

$$d\phi/d\rho + \nu\phi/\rho = 0$$

である.

c) 特別解 方程式 (17) の特別解は, これを w_3, w_4 の 2 個に分けて求めるのが便宜である. この両者はそれぞれ

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{d^2 w_3}{dx^2} + \{C - (A+B+1)x\} \frac{dw_3}{dx} - ABw_3 \\ = \frac{K_1}{x} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{d^2 w_4}{dx^2} + \{C - (A+B+1)x\} \frac{dw_4}{dx} - ABw_4 \\ = K_2 x^{2/\mu-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

を満足するものとする. w_3 の初項を $c_0 \log x$ と仮定して (20) の級数解を求めれば

$$\begin{aligned} w_3 &= c_0 \left[F\{A, B; C; x\} \log x \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(A+1) \cdots (A+n-1) B(B+1) \cdots (B+n-1)}{n! C(C+1) \cdots (C+n-1)} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{1}{A+s} + \frac{1}{B+s} - \frac{1}{C+s} \right) - \sum_{s=1}^n \frac{1}{s} \right\} x^n \Big] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\text{ただし } c_0 = \frac{K_1}{C-1} = \frac{\mu K_1}{2}$$

をうる. また w_4 は $c_0' x^{2/\mu}$ を初項とする級数として得られる. すなわち

$$w_4 = c_0' x^{2/\mu} F\{A+2/\mu, B+2/\mu, 1; 1+2/\mu, C+2/\mu; x\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\text{ただし } c_0' = \frac{\mu K_2}{2(C-1+2/\mu)} = \frac{\mu^2 K_2}{8}$$

w_3, w_4 に対応する (5) 式の解は

$$\left. \begin{aligned} \phi_3 &= x^{1/\mu} (1-x)^{1-m} w_3 \\ \phi_4 &= x^{1/\mu} (1-x)^{1-m} w_4 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

であり, 中立面の傾きを与える完全な解 ϕ は

$$\phi = C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \quad \dots\dots\dots (25)$$

の形となる. ここに C_1, C_2 は任意定数, ϕ_1, ϕ_2 は (6) の線型に独立な二解である.

3. 二, 三の特殊な場合

式 (20) および (21) の解は特別な場合には $1/x$ の多項式として書くことができる. このとき w_3, w_4 はそれぞれ

$$w_3 = c_0 x^{-1} F\{1, 2-C, 1; 2-A, 2-B; x^{-1}\}$$

$$\text{ただし } c_0 = -K_1/(A-1)(B-1) \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned} w_4 &= c_0' x^{2/\mu-1} F\{1-2/\mu, 2-2/\mu-C, 1; 2-2/\mu \\ &\quad -A, 2-2/\mu-B; x^{-1}\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ただし $c_0' = -K_2/(A+2/\mu-1)(B+2/\mu-1)$ としてあらわされ

$$2-C=1-2/\mu = -m',$$

$$2-2/\mu-C=1-4/\mu = -n',$$

$$m', n' = \text{整数}$$

なるとき有限項数の式となる.

さらに特殊の場合として (26), (27) 式中で分母が 0 となる項があらわれてくることもあるが, このようないも $\mu=1, 2$ 等のときには補助解 ϕ_1, ϕ_2 が簡単な形で得られ, あるいは適当な変数変換によって同等な効果をうる事が多く, 特別解 ϕ_3, ϕ_4 , または w_3, w_4 は定数変化法もしくは直接積分により求められる.

$\mu=1$. このときには従属変数 ϕ を下のように変換した方が便宜である. すなわち

$$\phi = x^{-1} (1-x)^{1-m} v \quad \dots\dots\dots (28)$$

これにより (17) は

$$x(x-1) \frac{d^2 v}{dx^2} + (\alpha_1 x - 1) \frac{dv}{dx} + \alpha_2 v = \beta_1 x + \beta_2 x^3 \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\text{ただし } \alpha_1 = -\{A-2+B-2+1\} = m-1$$

$$\alpha_2 = -(A-2)(B-2) = -(m\nu-1)$$

$$\beta_1 = K_1, \beta_2 = K_2.$$

このときの特別解は

$$v = N_1 x^3 + N_2 x^2 + N_3 x + N_4 \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\text{ただし } N_1 = \frac{\beta_2}{3\alpha_1 + \alpha_2 - 6}$$

$$N_2 = -\frac{3\beta_2}{(3\alpha_1 + \alpha_2 - 6)(2\alpha_1 + \alpha_2 - 2)}$$

$$N_3 = \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad N_4 = \frac{\beta_1}{\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

である. (30) 式中で係数の分母が 0 となるそれぞれの場合につき考えれば,

i) $\alpha_2=0$, このとき (29) は

$$x(1-x) \frac{d^2 v}{dx^2} + (\alpha_1 x - 1) \frac{dv}{dx} = \beta_1 x + \beta_2 x^3 \quad \dots\dots\dots (31)$$

であり, 補助解は

$$v = C_1' \int e^{-\int \frac{\alpha_1 x - 1}{x(1-x)} dx} dx + C_2' \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$C_1', C_2' = \text{定数}$$

となる. これを用いて定数変化法により特別解を知ることできるが, また (31) から得られる

$$\frac{dv}{dx} = e^{-\int \frac{\alpha_1 x - 1}{x(1-x)} dx} \left\{ \frac{\beta_1 x + \beta_2 x^3}{x(1-x)} e^{\int \frac{\alpha_1 x - 1}{x(1-x)} dx} dx + C' \right\}$$

$$C' = \text{定数}$$

を再び積分しても求められる.

ii) $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, この条件は $\nu=1$ を意味し考慮の必要のない場合である. このときにも解は容易に求められる.

iii) $3\alpha_1 + \alpha_2 - 6 = 0$, これは $\beta_2 = 0$ なるときに (30) 式中第 1, 第 2 項が補助解の形式をとることに着目して

$$v = P(x) \{x^3 + Nx^2\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

ただし $N = -3/(2\alpha_1 + \alpha_2 - 2)$

とおく。これにより補助解として (33) および

$$P(x) = C_1'' \int e^{-\int R dx} dx + C_2'' \dots \dots \dots (34)$$

$$\text{ただし } R = \frac{(\alpha_1 x - 1)(x + N) + 2(1 - x)(3x + 2N)}{x(1 - x)(x + 2N)}$$

$C_1'', C_2'' = \text{定数}$

をうる。また特別解は定数変化法により、あるいは直接に

$$\begin{aligned} x^3(1-x)(x+N) \frac{d^2 P}{dx^2} + \{(\alpha_1 x - 1)(x + N)x^2 \\ + 2x^2(1-x)(3x + 2N)\} \frac{dP}{dx} = \beta_1 x + \beta_2 x^3 \end{aligned} \dots \dots \dots (35)$$

と書いて得られる。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} = e^{-\int R dx} \left\{ \int S e^{\int R dx} dx + C_3'' \right\} \\ P = \int e^{-\int R dx} \left\{ \int S e^{\int R dx} dx + C_3'' \right\} dx + C_4'' \dots \dots \dots (36) \end{aligned}$$

ただし $S = \beta_1 x + \beta_2 x^3$, $C_3'', C_4'' = \text{定数}$

なおこの場合には $A = -1$ または $B = -1$ であるから補助解としては当然 2 項式があらわれる。

iv) $2\alpha_1 + \alpha_2 - 2 = 0$, このときには補助方程式は

$$x(1-x) \frac{d^2 v}{dx^2} + (\alpha_1 x - 1) \frac{dv}{dx} - (2 - 2\alpha_1)v = 0 \dots \dots \dots (37)$$

となり, x^2 がその解である。他の解を求めるために

$$v = x^2 Q(x) \dots \dots \dots (38)$$

とおけば

$$Q(x) = C_5''' \int e^{-\int \frac{2(1-x) + (\alpha_1 x - 1)}{x(1-x)} dx} dx + C_6''' \dots \dots \dots (39)$$

$C_5''', C_6''' = \text{定数}$

(29) 式的一般解は定数変化法により、あるいは次式の直接積分により求められる。

$$\begin{aligned} x^3(1-x) \frac{d^2 Q}{dx^2} + \{2x^2(1-x) + x^2(\alpha_1 x - 1)\} \frac{dQ}{dx} \\ = \beta_1 x + \beta_2 x^3 \dots \dots \dots (40) \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} = e^{-\int T dx} \left\{ \int U e^{\int T dx} dx + C_7''' \right\} \\ Q = \int e^{-\int T dx} \left\{ \int U e^{\int T dx} dx + C_7''' \right\} dx + C_8''' \dots \dots \dots (41) \end{aligned}$$

$$\text{ただし } T = \frac{2(1-x) + (\alpha_1 x - 1)}{x(1-x)}, U = \beta_1 x + \beta_2 x^3$$

なおこの場合には $AB = 0$ であるから x^2 なる補助解が現われてくることが予期される。

$\mu = 2$. このときには (17) 式の特別解が (26), (27) により

$$w_3 = -\frac{K_1}{(A-1)(B-1)} \cdot \frac{1}{x}, w_4 = -\frac{K_2}{AB}$$

となり, 問題となるのは $AB = 0$ または $(A-1)(B-1) = 0$ の場合である。

$AB = 0$ に対しては (17) 式が

$$x(1-x) \frac{d^2 w}{dx^2} + \{C - (A+B+1)x\} \frac{dw}{dx} = K_1 \frac{1}{x} + K_2$$

となり, 次式に帰着される。

$$x(1-x) \frac{d^2 w}{dx^2} + \{C - (A+B+1)x\} \frac{dw}{dx} = K_2 \dots \dots \dots (42)$$

$(A-1)(B-1) = 0$ に対しては新たな従属変数を

$$\phi = x^{-1/\mu}(1-x)^{1-m} u = x^{-1/2}(1-x)^{1-m} u$$

すなわち $u = xv$

と定めれば (17) 式は

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{d^2 u}{dx^2} - \{(A-1) + (B-1) + 1\} x \frac{du}{dx} \\ - (A-1)(B-1)u = K_1 + K_2 x \end{aligned}$$

となり, w_3 に相当する解をうるには

$$x(1-x) \frac{d^2 u}{dx^2} - (A+B-1)x \frac{du}{dx} = K_1 \dots \dots \dots (43)$$

を積分すればよい。

4. 数 値 計 算 例

数値例として μ および m の組合せ 5 個をとり, これらのおおのについて $\phi, \sigma_r, \sigma_\theta$ を計算した。ここで内径および外径の比 $\rho_i/\rho_o = 1/4$, 両半径位置における厚さの比 $h_o/h_i = 0.4$, ポアソン比 $\nu = 1/3$ とした。荷重および支持の方法は, 静圧力 q を内半径にて軸に固着された円板で受けるものとしてある。応力の値は中立面より最も遠い位置すなわち板の表面におけるものである。なお例 F として同じ条件で曲げられる厚さ一様の板の場合をも加えた。

第 1 表は各例における μ, m および最大半径応力 $\sigma_{r\max}$ の値を, また第 1 図は半径にそっての厚さの変化を, 第 2 図は ϕ, σ_r および σ_θ の変化を示したものである。

第 1 表 各例における μ, m および σ_r

	μ	m	$\sigma_{r\max}, q\rho_o^2/h_i^2$
A	1/2	6	3.3945
B	1	6	3.3454
C	1	3	3.3386
D	1	3/2	3.2891
E	2	3/2	3.2249
F		0	2.9888

第 1 図 例 (A)~(F) における厚さの変化

(a) 例 (A)~(F) における中立面の傾き

(b) 例 (A)~(F) における円板表面の応力

第 2 図

5. 結 語

上記の計算結果によれば最大応力はいずれも固定さ

れた内縁で半径方向にあらわれている。この $\sigma_{r\max}$ の値は h_0/h_i と、肉厚の変化の模様とによって影響を受けることが予想されるが、(A)~(E) の 5 個の比較から見ると、 h_0/h_i が同一でも中心部付近の厚さの緩急の度がかなり重要であるように見うけられる。

σ_r 曲線は断面形が違くと明りょうな差異を示している。これは曲げこわさ D が厚さ h の三乗に比例しているために、厚さの違いが大きくあらわれるものと考えられる。 σ_θ については、 σ_r に比べてその値が小さいが、それぞれの断面形の間での σ_θ の最大値の変化は比較的明らかで、その位置も動いている。外周 $r=r_0$ における σ_θ の値が厚さ一様の (F) においても変わらないのは興味ある点であろう。

回転円板の遠心力による応力も (1) 式に似た形の方程式で論ぜられるが、曲げの場合との相違は、回転のときには体力が生ずるために、それによっても断面のふくらみかたが最大応力に影響するのに反し、曲げの場合ではむしろ主として応力分布に関係するようである。

本研究にあたり、慶応義塾大学教授栖原豊太郎博士より懇篤なる御指導、御鞭撻をたまわったことにたいし、厚く謝意を表させていただきます。

文 献

- (1) H.D. Conway, *Appl. Mech., J.*, Vol. 70, 1948.
H.D. Conway, *Appl. Mech., J.*, Vol. 18, 1951.
- (2) R.G. Olsson, *Ing. Archiv*, Vol. 8, 1937.
- (3) S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*,
- (4) Whittaker & Watson, *Modern Analysis*.