調和関数解法のみによる有孔板応力の公式と例題*

竹 内 洋 一 郎**

Some Formulas and Examples for Two-dimensional Stress Problems Solved only by Harmonic Function

by Yōitirō TAKEUTI

In a previous paper we considered the two-dimensional stress problems solved only by harmonic function.

Applying same method, in this paper, some very simple formulas are obtained for the problems of infinite plate with a hole under uniform tension or shear. Thus, we can mechanically calculate the edge-stress, provided only the sorts of curvilinear coordinate are given.

Numerical results are given for the stress concentration problem of the plate containing a hole represented by the function $z = \cosh \zeta^{1/2}$.

1. 緒 言

別の報告⁽¹⁾により有孔板の二次元応力問題を平面調和関数の境界値問題のみに導き、外力が穴の周辺に作用し、点近傍には存在しない時の解法公式を得た。本論文では有孔板の引張りやせん断のごとき、点近傍で外力が存在する場合も Kolosoff 流の重ね合わせの方法を用いることにより全く先の解法公式に帰することになり、結局調和関数の境界値問題を1回解くことになることを述べ、各境界条件のもとにおける穴べり応力の簡単な解法公式を導いた。特に x, y 両方向に引張りをうける有孔板の穴べり応力は、単に穴べりの写像拡大率の二乗に比例するという簡単な結果を得た。しかし実際の解法においては穴べり応力だけを問題とする場合にはいちいち調和関数の境界値問題を解く必要はなく、簡単な手数だけで形状係数の問題を解決できることを示した。数値例として上記公式を利用して十字形穴をもつ板の問題を検討した。

2. 無限点で外力の作用する有孔板
応力の解法公式

2・1 序 著者は先の報告により有孔板の二次元応力問題において、点以外に不正則点をもたない写像関数 $z = \omega(\zeta) = \omega(\xi + i\eta)$ により与えられる実軸に対称な直交曲線座標を用いれば、外力が穴周辺 $\xi = \xi_1$ (一定) において作用し、点近傍には存在しない時の解法公式として応力状態の一般式として次式を得た。

$$\left. \begin{aligned} 2\widehat{\xi}\eta &= h^2(T + \varphi) \\ 2\widehat{\eta}\eta &= -h^2(S + \psi) + \Omega \\ 2\widehat{\xi}\xi &= h^2(S + \psi) + \Omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1)$$

ただし穴べりの外力は次式で与えられるとする。

$$[\widehat{\xi}\eta]_{\xi=\xi_1} = f_1(\eta) \dots\dots\dots (2.2_1)$$

$$[\widehat{\xi}\xi]_{\xi=\xi_1} = f_2(\eta) \dots\dots\dots (2.2_2)$$

また (2.1) の右辺の各関数は次記により写像関数がわかれば計算される。

$$\left. \begin{aligned} h^{-2} &= \omega'(\zeta)\overline{\omega'(\zeta)} \\ \varphi &= P - p \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - q \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \\ \psi &= Q - q \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + p \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \\ \Omega &= \widehat{\xi}\xi + \widehat{\eta}\eta \\ \Phi'(\zeta) &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - i \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \\ T &= \Re\{-i\omega'(\zeta)\omega(\zeta)\Phi'(\zeta)/2\} \\ S &= \Im\{-i\omega'(\zeta)\omega(\zeta)\Phi'(\zeta)/2\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3)$$

上式中の p, q は次記関数の実虚部である。

$$p + iq = -i\omega'(\zeta)\omega(2\widehat{\xi}_1 - \zeta)/2 \dots\dots\dots (2.4)$$

P, Q は考える領域での正則関数 $F(\zeta)$ の実虚部で、 P, Ω は次記境界値をもつ平面調和関数として決定される。

$$[P]_{\xi=\xi_1} = [2h^{-2}\widehat{\xi}\eta]_{\xi=\xi_1} = [2h^{-2}]_{\xi=\xi_1} \cdot f_1(\eta) \dots\dots\dots (2.5)$$

$$[\Omega]_{\xi=\xi_1} = 2f_2(\eta) - [h^2]_{\xi=\xi_1} \cdot [Q]_{\xi=\xi_1} \equiv f_3(\eta) \dots\dots\dots (2.6)$$

すなわち応力分値を求める問題は結局 P, Ω の二つの調和関数を (2.5), (2.6) の境界条件のもとに決定することになる。特に外力が境界に垂直な時は次の1回の調和関数の境界値問題となる。

$$\Delta \Omega = 0, [\Omega]_{\xi=\xi_1} = 2f_2(\eta) - c_1[h^2]_{\xi=\xi_1} \dots\dots\dots (2.6')$$

よって $[\widehat{\eta}\eta]_{\xi=\xi_1} = f_2(\eta) - c_1[h^2]_{\xi=\xi_1} \dots\dots\dots (2.7)$

c_1 は $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Omega = 0$ より決定する。穴べり外力が流体圧 p_0 の場合は上式は次記となる。

* 昭和 24 年 3 月 26 日 関西支部総会講演会において講演、原稿受付 昭和 31 年 2 月 23 日。

** 正員。

$$[\eta\eta]_{\xi=\xi_1} = -p_0 - c_1[h^2]_{\xi=\xi_1} \dots\dots\dots (2.7')$$

以上が有孔板の穴周辺のみを外力が作用する時であるが、有孔板の引張りやせん断のごとく穴周辺が自由で ∞ 点近傍で外力が存在する場合も同様に上記の解法に帰して調和関数の境界値問題のみで解ける。解法の要点はまず無孔板の引張せん断の時の $\xi=\xi_1$ なる穴周辺相当位置の応力を求め、穴周辺を自由にするためその応力の符号を変えたものを穴周辺外力として有孔無限板の応力を上記解法で求め両者を重ね合わせると境界条件が満足され所要の結果となる。結局穴周辺相当位置の外力を (2.2) の形に η の関数として導出すればよいわけで、本解法によれば穴周辺応力の計算が著しく簡単になる。

2.2 x, y 両方向に引張りをうける有孔板 $\xi_1 = \xi_1$ なる穴をもつ板が xy 両方向に一樣な引張り p_0 をうける場合はただ 1 回の dirichlet の問題を解くだけの問題となる。まず直角座標の二次元応力一般式

$$2xy - i(\bar{x}\bar{y} - y\bar{x}) = -iz\Phi'(z)/2 + \Psi(z) \dots\dots (2.8)$$

において $\Psi(z) \equiv 0$, $\Phi(z) \equiv 2p_0 \dots\dots (2.9)$ とおけば (2.8) より

$$\bar{x}y = 0, \quad \bar{x}\bar{x} - y\bar{y} = 0$$

また $\bar{x}\bar{x} + y\bar{y} = \Re\{\Phi(z)\} = 2p_0 \dots\dots (2.8')$

上の 2 式より $\bar{x}\bar{x} = y\bar{y} = p_0$

これは無孔板が xy 両方向に引張り p_0 をうける時となるが実際は穴があるから、穴周辺相当位置の応力を見るため曲線座標の変換式に上記結果を代入すれば

$$\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta} - 2i\xi\bar{\eta} = (\bar{x}\bar{x} - y\bar{y} - 2ixy)e^{2i\theta} = 0 \dots\dots (2.10)$$

$$\therefore \xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta} = 0, \quad \xi\bar{\eta} = 0$$

かつ $\Omega_I = \xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} = \bar{x}\bar{x} + y\bar{y} = 2p_0$

ゆえに上の 2 式より $\xi\bar{\xi} = \eta\bar{\eta} = p_0$,

すなわち穴周辺相当位置でも $\xi\bar{\xi} = \eta\bar{\eta} = p_0$, $\xi\bar{\eta} = 0$

であるが実際に穴がある時には穴周辺が自由であるから $\xi\bar{\xi} = \xi\bar{\eta} = 0$ でなければならない。よって $\xi\bar{\xi} = p_0$ を消すために本題では次の二つの場合を重ね合わせばよい。

(I) 穴のない平板に xy 両方向に一樣な引張り p_0 が作用する場合、すなわち

$$\infty \text{ 点近傍で } \bar{x}\bar{x} = y\bar{y} = p_0, \quad \bar{x}y = 0$$

$$\text{穴周辺相当位置で } \xi\bar{\xi} = p_0, \quad \xi\bar{\eta} = 0, \quad (\eta\bar{\eta} = p_0)$$

$$\dots\dots\dots (2.11)$$

(II) $\xi=\xi_1$ なる穴に p_0 なる流体圧が作用し、 ∞ 点で外力の作用のない場合、すなわち

$$\infty \text{ 点近傍で } \bar{x}\bar{x} = y\bar{y} = \bar{x}y = 0$$

$$\text{穴周辺で } \xi\bar{\xi} = f_2(\eta) = -p_0, \quad \xi\bar{\eta} = f_1(\eta) = 0$$

$$\dots\dots\dots (2.12)$$

(II) の場合は 2.1 の場合に相当し 2.1 によって解けるから (I), (II) を重ね合わせると本題の結果がでる。まず (2.6') より

$$[\Omega_{II}]_{\xi=\xi_1} = -2p_0 - c_1[h^2]_{\xi=\xi_1}, \quad \Delta\Omega_{II} = 0 \dots\dots (2.13)$$

$$\therefore \Omega = \Omega_I + \Omega_{II} = 2p_0 + \Omega_{II}$$

また (2.7') より

$$[\eta\eta]_{\xi=\xi_1} = [\eta\eta]_{\xi=\xi_1} + [\eta\eta]_{\xi=\xi_1} \\ = p_0 + (-p_0 - c_1[h^2]_{\xi=\xi_1})$$

よって穴べり応力を計算する次の簡単な公式をうる。

公式 I x, y 両方向に引張りをうける有孔板

$$[\eta\eta]_{\xi=\xi_1} = -c_1[h^2]_{\xi=\xi_1} \dots\dots\dots (2.14)$$

公式 I は穴べり応力は単に穴べりの写像拡大率の二乗に比例するという重要な法則を示している。比例の定数 c_1 は (2.13) の境界値をもつ調和関数 Ω_{II} を求め $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Omega_{II} = 0$ の条件より決定する。最大応力はしたがって拡大率の最も大きい点つまり曲線網目の最も密なる点で生じ (たとえば円孔では h が一定であるから穴べり上応力は等しい) 換言すれば z 面の等間隔の距離が z 面で最も狭い距離となっている点が応力集中が大になる。以上のことは推察からわかることであるが公式 I はそれを定量的に示していることに意義がある。

【例 1】 円孔 (半径 r_0) の xy 方向の引張り

計算するまでもないが公式の適用例として解くと $\omega(\zeta) = e^{\zeta}$ を用いると $h^{-2} = r^2$ であるから (2.13) より

$$\Omega_{II} = -2p_0 - c_1 r^{-2}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Omega_{II} = 0 \text{ より } c_1 = -2p_0 r_0^2$$

ゆえに公式 I より $[\theta\theta]_{r=r_0} = 2p_0$

また $\Omega_{II} = 0$, ゆえに $\Omega = \Omega_I + \Omega_{II} = 2p_0$ よって一般の応力分値は (2.4) より $p = 0$, $q = -r_0^2/2$ となり, (2.3) より $\varphi = 0$, $\psi = -2p_0 r_0^2$, $T = S = 0$ ゆえに (2.1) は

$$2r\bar{r}\Omega_{II} = 0, \quad 2r\bar{r}\Omega_{II} = -2p_0 r_0^2/r^2, \quad 2\theta\bar{\theta}\Omega_{II} = 2p_0 r_0^2/r^2$$

これは流体圧 p_0 をうける円孔の解である。よって

$$\bar{r}\bar{r} = \bar{r}\bar{r}_I + \bar{r}\bar{r}_{II} = p_0 - p_0 r_0^2/r^2, \quad \bar{r}\theta = 0$$

$$\theta\bar{\theta} = \theta\bar{\theta}_I + \theta\bar{\theta}_{II} = p_0 + p_0 r_0^2/r^2$$

として所題の場合の周知の結果⁽²⁾がでる。

【例 2】 だ円孔の xy 方向の引張り $\omega(\zeta) = \cosh \zeta$ $h^{-2} = (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)/2$ であるから (2.13) は

$$[\Omega_{II}]_{\xi=\xi_1} = -2p_0 - 2c_1/(\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta)$$

上記境界値をもつ調和関数 Ω_{II} は

$$\Omega_{II} = -2p_0 + 2c_1 \left[\frac{1}{\sinh 2\xi_1} - \frac{2}{\sinh 2\xi_1} \Re \left\{ \frac{1}{1 - e^{-2\zeta}} \right\} \right] \dots\dots\dots (2.15)$$

$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Omega_{II} = 0$ より $c_1 = -p_0 \sinh 2\xi_1 \dots\dots\dots (2.16)$

ゆえに公式 I より

$$[\eta\eta]_{\xi=\xi_1} = \frac{2p_0 \sinh 2\xi_1}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} \dots\dots\dots (2.17)$$

$$\therefore \max_{\eta=0} [\eta\eta]_{\xi=\xi_1} = \frac{2p_0 \sinh 2\xi_1}{\cosh 2\xi_1 - 1}$$

以上は従来の結果⁽³⁾と一致する。この問題は従来多数の解法が示されているが、本解法がいかに簡単に穴周辺応力を求めうかがわかる。周辺以外の一般応力分

値も簡単に求まる*。

c₁ の決定法について 一般応力分値まで求める時には上記解法でよいが、問題となるのは穴べり応力だけである。よって穴べり応力だけを求める時は上記のごとく 1 回の dirichlet の問題を解いて Ω を求める必要なく次記による。

$$4\Omega_{II}=0, [\Omega_{II}]_{\xi=\xi_1}=f_3(\eta) \text{ より}$$

$\Omega_{II} \equiv \sum_0^\infty (a_m \cos m\eta + b_m \sin m\eta) e^{-m\xi}$ とおき $\xi \rightarrow \infty$ で $\Omega_{II} \rightarrow 0$ の条件を考えると $\xi \rightarrow \infty$ で残るのは $m=0$ の項つまり、Fourier 展開の第 1 項だけであるから c_1 を決める条件式として次式をうる**。

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_3(\eta) d\eta = 0 \quad (2.19)$$

よって xy 両方向に引張りをうける時は $f_3(\eta) = -2p_0 - c_1[h^2]_{\xi=\xi_1}$ より上式は次記となる。

$$c_1 = -2p_0 / \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h^2]_{\xi=\xi_1} d\eta \quad (2.20)$$

ゆえに公式 I はさらに簡単になり穴べり応力は写像関数が与えられれば機械的に計算できる。

$$\text{公式 I'} \quad \frac{[\eta\eta]_{\xi=\xi_1}}{p_0} = 2[h^2]_{\xi=\xi_1} / \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h^2]_{\xi=\xi_1} d\eta \quad (2.21)$$

上式によれば例 2 の だ円孔の問題は次の 2 行ですむ。

$$c_1 = -2p_0 / \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2d\eta}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} = -p_0 \sinh 2\xi_1$$

$$\therefore [\eta\eta]_{\xi=\xi_1} = -c_1[h^2]_{\xi=\xi_1} = 2p_0 \sinh 2\xi_1 / (\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta)$$

上記において $f_3(\eta)$ を $(0, 2\pi)$ の周期関数としたが穴一つの有孔無限板では $f_3(\eta)$ は η の周期関数となるから 2π の周期でない時には補正をすればよい。

2.3 x 方向に引張りをうける有孔板 前節同様にして (2.2) の境界条件に相当する穴周辺付加外力を η の関数として導出すればよい。(2.8) において $\Phi(z) \equiv ip_0$, $\Phi(z) \equiv p_0$ とおけば

$$\widehat{xx} = p_0, \quad \widehat{xy} = \widehat{yy} = 0$$

一般応力分値は (2.12), (2.15), (2.16) より

$$\Omega = \Omega_I + \Omega_{II} = 2p_0 \sinh 2\xi / (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)$$

$$(2.4) \text{ より } 4p = \sin 2\eta \cosh 2(\xi - \xi_1),$$

$$4q = -\cos 2\eta \sinh 2(\xi - \xi_1) + \sinh 2\xi_1$$

$$(2.3) \text{ より } \varphi_{II} = -\frac{p_0 \sin 2\eta \cosh 2\xi_1}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta},$$

$$\psi_{II} = -\frac{p_0 \sinh 2\xi \cosh 2\xi_1}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta},$$

$$T_{II} = \frac{p_0 \sin 2\eta \cosh 2\xi}{\cosh 2\xi \cos 2\eta},$$

$$S_{II} = \frac{p_0 \sinh 2\xi \cos 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}$$

上の各式を (2.1) に代入し (I) の $\widehat{\xi\xi} = \widehat{\eta\eta} = p_0$, $\widehat{\xi\eta} = 0$ を重ね合わせると

$$\widehat{\xi\xi} = p_0 + \widehat{\xi\xi}_{II} = \frac{p_0 \sinh 2\xi (\cosh 2\xi - \cosh 2\xi_1)}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2},$$

$$\widehat{\xi\eta} = \frac{p_0 \sin 2\eta (\cosh 2\xi - \cosh 2\xi_1)}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2}$$

$$\widehat{\eta\eta} = p_0 + \widehat{\eta\eta}_{II} = \frac{p_0 \sinh 2\xi (\cosh 2\xi + \cosh 2\xi_1 - 2 \cos 2\eta)}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2}$$

上記はたとえば M. Bricas, *L'Élasticité Bidimensionnelle*, s. 234 の (405) と一致す。

** 積分記号の前の 2π は必要でないが計算の便宜のために付した。

これは無孔板が x 方向に一樣な引張り p_0 をうける場合である。よって (2.10) より次記となる。

$$2\xi\eta + i(\widehat{\xi\xi} - \widehat{\eta\eta}) = ip_0 e^{2i\theta} = ip_0 \omega'(\zeta) / \omega'(\bar{\zeta}) \quad (2.22)$$

$$\therefore h^{-2} \{2\xi\eta + i(\widehat{\xi\xi} - \widehat{\eta\eta})\} = ip_0 \{\omega'(\zeta)\}^2 \quad (2.23)$$

$$\text{また } \Omega_I = \widehat{\xi\xi} + \widehat{\eta\eta} = \widehat{xx} + \widehat{yy} = p_0$$

$$\therefore h^{-2} i(\widehat{\xi\xi} + \widehat{\eta\eta}) = h^{-2} ip_0 \quad (2.24)$$

(2.23), (2.24) を加えると

$$2h^{-2}(\xi\eta + i\widehat{\xi\xi}) = ip_0 [h^{-2} + \{\omega'(\zeta)\}^2]$$

$$\therefore 2h^{-2}\xi\eta = -p_0 \{ \omega'(\zeta) \}^2 \quad (2.25)$$

$$2h^{-2}\xi\xi = p_0 [h^{-2} + \Re \{ \omega'(\zeta) \}^2] \quad (2.25')$$

以上は無孔板の計算であるが実際は穴があり穴周辺が自由であるから次の二つの場合を重ね合わせると所題の境界条件が満足されることになる。

(I) x 方向に引張りをうける無孔板

$$\infty \text{ 点近傍で } \widehat{xx} = p_0, \quad \widehat{xy} = \widehat{yy} = 0$$

穴周辺相当位置で

$$[2h^{-2}\xi\eta]_{\xi=\xi_1} = -p_0 [\{ \omega'(\zeta) \}^2]_{\xi=\xi_1}$$

$$[2h^{-2}\xi\xi]_{\xi=\xi_1} = p_0 [h^{-2} + \Re \{ \omega'(\zeta) \}^2]_{\xi=\xi_1}$$

(II) 穴べりのみに次記外力をうける有孔板

$$\infty \text{ 点近傍で } \widehat{xx} = \widehat{yy} = \widehat{xy} = 0$$

穴周辺で

$$[\xi\eta]_{\xi=\xi_1} = f_1(\eta) = p_0 [h^2 \{ \omega'(\zeta) \}^2]_{\xi=\xi_1} / 2 \quad (2.26)$$

$$[\xi\xi]_{\xi=\xi_1} = f_2(\eta) = -p_0 [1 + h^2 \Re \{ \omega'(\zeta) \}^2]_{\xi=\xi_1} / 2 \quad (2.26')$$

(2.26), (2.26') が (2.2), (2.2') に相当し写像関数すなわち穴形状が与えられれば既知となるから 2.1 の方法により応力がわかる。この場合穴周辺応力の公式は $[\Omega_I + \Omega_{II}]_{\xi=\xi_1}$ より次記となる。

公式 II x 方向に引張りをうける有孔板

$$[\eta\eta]_{\xi=\xi_1} = p_0 + f_3(\eta)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } f_3(\eta) &= -p_0 [1 + h^2 \Re \{ \omega'(\zeta) \}^2]_{\xi=\xi_1} \\ &\quad - [h^2]_{\xi=\xi_1} \cdot [\{ F(\zeta) \}^2]_{\xi=\xi_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

$$\text{または } [\eta\eta]_{\xi=\xi_1} = -p_0 [h^2 \Re \{ \omega'(\zeta) \}^2]_{\xi=\xi_1}$$

$$- [h^2]_{\xi=\xi_1} \cdot [\{ F(\zeta) \}^2]_{\xi=\xi_1} \quad (2.27')$$

上式の $F(\zeta)$ はその実部が次記境界値をもつ平面調和関数として $\omega(\zeta)$ がわかれば決定される。

$$[\Re \{ F(\zeta) \}]_{\xi=\xi_1} = [P]_{\xi=\xi_1} = p_0 [\{ \omega'(\zeta) \}^2]_{\xi=\xi_1} \quad (2.28)$$

よって応力集中問題の穴べり応力だけを求めることは単に $f_3(\eta)$ を決定する問題になり Muschelišvili 法や Kolossoff 法と違って Ω を決定する (したがって応力関数) 必要がなく dirichlet の問題を解くことは 1 回ですみ、解法の順序としては (2.28) より P を決定しその共役関数 Q を (2.27) の第 2 式の $f_3(\eta)$ に代入し、この未知定数 c_1 を含んだ $f_3(\eta)$ を (2.19) の条件式 $\int f_3(\eta) d\eta = 0$ より c_1 を決めて決定し、これに p_0 を加えると穴べり応力となる。

【例 3】 だ円孔の x 方向引張り, $\omega(\zeta) = \cosh \zeta$

公式 II にしたがって機械的に穴へり応力を計算する
(2.28) より $[P]_{\xi=\xi_1} = p_0(e^{2\xi_1} - e^{-2\xi_1}) \sin 2\eta/4$

よって $P = \sum_0^{\infty} (a_m \cos m\eta + b_m \sin m\eta) e^{-m\xi}$ とおけば

$$a_m = 0, \quad b_m = p_0(e^{2\xi_1} - e^{-2\xi_1}) e^{2\xi_1}/4,$$

$$b_m = 0 \quad (m \neq 2 \text{ に対し})$$

$$\therefore P = \Re\{F(\zeta)\} = p_0(e^{2\xi_1} - e^{-2\xi_1}) e^{2(\xi_1 - \xi)} \sin 2\eta/4$$

$$\therefore Q = \Im\{F(\zeta)\} = p_0(e^{2\xi_1} - e^{-2\xi_1}) e^{2(\xi_1 - \xi)} \cos 2\eta/4 + c_1$$

$$\text{また } -p_0[1 + h^2 \Re\{\omega'(\zeta)\}^2]_{\xi=\xi_1}$$

$$= -p_0[h^2]_{\xi=\xi_1} (e^{2\xi_1} + e^{-2\xi_1} - 2)(1 + \cos 2\eta)/4$$

であるから上の 2 式を (2.27) 第 2 式に代入すれば

$$f_3(\eta) = -p_0 \left\{ 1 + \frac{e^{2\xi_1} \cos 2\eta}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} + \frac{4c_1 - 2p_0}{2p_0(\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta)} \right\}$$

よって (2.19) より c_1 を決める条件式は次記となる*.

$$\int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \frac{e^{2\xi_1} \cos 2\eta}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} + \frac{4c_1 - 2p_0}{2p_0(\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta)} \right\} d\eta = 0$$

$$\therefore c_1 = -p_0 \sinh 2\xi_1/2$$

$$\therefore f_3(\eta) = -p_0[h^2]_{\xi=\xi_1} (e^{2\xi_1} \cos 2\eta + e^{-2\xi_1} - \cos 2\eta - 1)$$

ゆえに公式 II より簡単に従来の結果が求まる*.

$$[\eta\eta]_{\xi=\xi_1} = p_0 \cdot \frac{-e^{2\xi_1} \cos 2\eta + \sinh 2\xi_1 + 1}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta}$$

$$\therefore \max[\eta\eta]_{\xi=\xi_1} = p_0(1 + 2b/a) \quad (a, b \text{ は長短各半径})$$

【例 4】円孔に詰棒をした板の引張り, $\omega(\zeta) = e^{\zeta}$

第 1 図のごとく船の甲板の煙突穴の応力集中減少手段の詰棒をした場合は (II) の $f_2(\eta)$ として (2.26')

第 1 図

のほかに詰棒の圧力 p_1, p_2 を付加したものを境界条件として 2.1 の手続きで解けばよいのであるが, 簡単のため引張りを除外して, 詰棒の影響だけを求めてみる. 境界条件は

$$f_1(\eta) = 0$$

$$f_2(\eta) = [\eta\eta]_{r=r_0} = -p_1(\beta - \gamma > \theta > \beta + \gamma \text{ およびその対辺})$$

$$= -p_2(\pi/2 + \beta - \gamma > \theta > \pi/2 + \beta + \gamma \text{ およびその対辺})$$

$$= 0 \quad (\text{その他の穴へりに対し})$$

$$P = 0, \quad Q = c_1, \quad h^{-2} = r^2 \text{ より (2.6) は次式となる.}$$

$$f_3(\eta) = -c_1 r_0^{-2} + (-2p_1) + (-2p_2) + (0)$$

ゆえに (2.19) より c_1 の条件式は次式となる.

$$\int_0^{2\pi} -c_1 r_0^{-2} d\theta + 2 \int_{\theta-\gamma}^{\theta+\gamma} -2p_1 d\theta + 2 \int_{\pi/2+\beta-\gamma}^{\pi/2+\beta+\gamma} -2p_2 d\theta = 0$$

$$\therefore c_1 = -4\gamma r_0^2 (p_1 + p_2)/\pi$$

$$(2.7) \text{ より } [\theta\theta]_{r=r_0} = 4\gamma (p_1 + p_2)/\pi$$

$$+ (-p_1) + (-p_2) + (0)$$

この結果に周知の円孔の引張りの結果 $[\theta\theta]_{r=r_0} = p_0(1 - 2 \cos 2\theta)$ を付加すると所題の結果がでる*.

$$[\theta\theta]_{r=r_0} = p_0(1 - 2 \cos 2\theta) + 4\gamma (p_1 + p_2)/\pi$$

$$+ (-p_1) \quad (\beta - \gamma > \theta > \beta + \gamma \text{ およびその対辺})$$

$$+ (-p_2) \quad (\pi/2 + \beta - \gamma > \theta > \pi/2 + \beta + \gamma \text{ およびその対辺})$$

$$+ (0) \quad (\text{その他の穴へり})$$

2.4 一様なせん断力をうける有孔板

まず穴のない時 (2.8) において

$$\Phi(z) \equiv 0, \quad \Psi(z) \equiv 2q_0$$

$$\text{とおけば } \widehat{xy} = q_0, \quad \widehat{xx} = \widehat{yy} = 0$$

$$(2.10) \text{ より } 2\xi\eta + i(\xi\xi - \eta\eta) = 2q_0 e^{2i\theta}$$

$$\therefore h^{-2} \{2\xi\eta + i(\xi\xi - \eta\eta)\} = 2q_0 \{\omega'(\zeta)\}^2$$

$$\text{また } \mathcal{Q}_I = \xi\xi + \eta\eta = \widehat{xx} + \widehat{yy} = 0$$

$$\text{上の 2 式を加えて } h^{-2}(\xi\xi + i\xi\eta) = q_0 \{\omega'(\zeta)\}^2$$

$$\therefore h^{-2}\xi\eta = q_0 \Re\{\omega'(\zeta)\}^2, \quad h^{-2}\xi\xi = q_0 \Im\{\omega'(\zeta)\}^2$$

実際には穴があり穴周辺を自由にするための穴周辺付加外力は (2.2) に相当するものとして次記をうる.

$$[\xi\eta]_{\xi=\xi_1} = f_1(\eta) = -q_0[h^2 \Re\{\omega'(\zeta)\}^2]_{\xi=\xi_1},$$

$$[\xi\xi]_{\xi=\xi_1} = f_2(\eta) = -q_0[h^2 \Im\{\omega'(\zeta)\}^2]_{\xi=\xi_1}$$

$$\dots\dots\dots(2.29)$$

上記の場合を 2.1 に従って解き無孔板応力と重ね合わせと穴周辺応力の計算公式として次記をうる.

$$[\eta\eta]_{\xi=\xi_1} = [\mathcal{Q}_I + \mathcal{Q}_{II}]_{\xi=\xi_1} = f_3(\eta) \dots\dots\dots(2.30)$$

$$\text{ただし } f_3(\eta) = -2q_0[h^2 \Im\{\omega'(\zeta)\}^2]_{\xi=\xi_1}$$

$$- [h^2 \Im\{F(\zeta)\}]_{\xi=\xi_1} \dots\dots\dots(2.31)$$

上式の $F(\zeta)$ はその実部が次記境界値をもつ平面調和関数として $\omega(\zeta)$ が与えられると決定される.

$$[\Re\{F(\zeta)\}]_{\xi=\xi_1} = -2q_0[\Re\{\omega'(\zeta)\}^2]_{\xi=\xi_1}$$

$$\dots\dots\dots(2.32)$$

3. 十字形穴をもつ板応力

3.1 xy 両方向に引張りをうける 曲辺四辺形の穴をもつ板応力

$\omega(\zeta) = \cosh \zeta^{1/n}$ の $\xi = \xi_1$ (一定) の

曲線は有みぞ正曲辺形となる*. いま $n=2$ の場合

$$z = \omega(\zeta) = \cosh \zeta^{1/2} \dots\dots\dots(3.1)$$

$$\therefore x = \left\{ \frac{1}{2} (\cosh 2\xi + \cos 2\eta) \right\}^{\frac{1}{4}} \cos \eta$$

* この各積分は次記による.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2\xi_1} \cos 2\eta d\eta}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} = \frac{1}{\sinh 2\xi_1},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(4c_1 - 2p_0) d\eta}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} = \frac{4c_1 - 2p_0}{\sinh 2\xi_1},$$

* 本報告においては簡単のため等角写像の比例定数をすべて 1 とする.

$$y = \left\{ \frac{1}{2} (\cosh 2\xi + \cos 2\eta) \right\}^{\frac{1}{4}} \sin \left\{ \frac{\tan^{-1}(\tanh \xi \tan \eta)}{2} \right\} \quad (3.2)$$

よって第 2 図のごとく $\xi_1 = 0.75$ ですみを丸めた近似正四角形穴となり ξ_1 が大きくなるにつれて円に近づき ξ_1 が小さくなるにつれ曲辺のみぞの深さが増し十字形穴になる。

(3.1) より写像拡大率は

$$h^{-2} = \omega'(\zeta) \omega'(\bar{\zeta}) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}{(\cosh 2\xi + \cos 2\eta)^{1/2}} \quad (3.3)$$

よって上記 h^{-2} を (2.20) に代入積分すれば*

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} [h^2]_{\xi=\xi_1} d\eta &= \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \frac{(\cosh 2\xi_1 + \cos 2\eta)^{1/2}}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} d\eta \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh 2\xi_1}} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} k_{2m} \cdot \frac{2^m C_m}{2^{2m}} \cdot \frac{1}{(\cosh 2\xi_1)^{2m}} \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } k_{2m} &\equiv 1 + \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \\ &= 1 + \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\therefore c_1/p_0 =$$

$$\frac{\sqrt{\cosh 2\xi_1}}{2\sqrt{2} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} k_{2m} \cdot \frac{2^m C_m}{2^{2m}} \cdot \frac{1}{(\cosh 2\xi_1)^{2m}} \right\}} \quad (3.6)$$

公式 I より

* 積分計算は次記による。

$$|\cosh 2\xi_1| > |\cos 2\eta| \text{ より } \cos 2\eta / \cosh 2\xi_1 \equiv x \text{ とすれば } |x| < 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} &= \frac{1}{\cosh 2\xi_1} (1-x)^{-1}, \\ (\cosh 2\xi_1 + \cos 2\eta)^{1/2} &= \sqrt{\cosh 2\xi_1} (1+x)^{1/2} \\ \therefore \frac{(1+x)^{1/2}}{1-x} &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right\} x^m \\ \int_0^{4\pi} \frac{(\cosh 2\xi_1 + \cos 2\eta)^{1/2}}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} d\eta &= \frac{4}{\sqrt{\cosh 2\xi_1}} \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(\cosh 2\xi_1)^{2m}} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{2m} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right\} \\ &\times \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} \eta d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\eta\eta]_{\xi=\xi_1/p_0} &= \frac{2\sqrt{\cosh 2\xi_1 + \cos 2\eta}}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} \\ &\times \frac{\sqrt{\cosh 2\xi_1}}{\left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} k_{2m} \cdot \frac{2^m C_m}{2^{2m}} \cdot \frac{1}{(\cosh 2\xi_1)^{2m}} \right\}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

第 3 図は ξ_1 の各値に対する数値計算結果を示す。

3.2 ハイボサイクロイドによる正多角形穴 上記公式により求めた結果を吟味するため Muschelišvili が指示した⁽⁶⁾ハイボサイクロイド曲線による曲辺正多角穴をもつ無限板が xy 両方向になる引張りをうける場合を Muschelišvili 法で解き両者の四辺形が近似している場合について比較しよう。さてこの場合の

第 3 図

正多角形穴の単位円外写像関数は (記号は彼の論文記載のものを使用する)。

$$z = \omega(\zeta) = b(\zeta + a\zeta^{-n}) \quad (0 \leq a < n^{-1}) \quad (3.8)$$

(3.8) を境界条件式に代入し Cauchy の積分定理を利用すれば ∞ 点で外力のない時の応力関数は

$$\begin{aligned} \varphi_{0M} &= a \left\{ \frac{\alpha_1 - i\beta_1}{\zeta^{n-2}} + 2 \frac{\alpha_2 - i\beta_2}{\zeta^{n-3}} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + (n-2) \frac{\alpha_{n-2} - i\beta_{n-2}}{\zeta} \right\} - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_1 + if_2}{\sigma - \zeta} d\sigma \\ \psi_{0M} &= -a \{ (\alpha_1 + i\beta_1) \zeta^{n-2} + \cdots \\ &\quad + (n-2) (\alpha_{n-2} + i\beta_{n-2}) \zeta \} \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_1 - if_2}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{\zeta^n (1 + a\zeta^{n+1})}{\zeta^{n+1} - na} \varphi'(\zeta) \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } \alpha_m \pm i\beta_m &= \frac{1}{2\pi \{ 1 - a^2 m(n-m-1) \}} \\ &\times \int_0^{2\pi} \{ (f_1 \pm if_2) e^{\pm im\theta} + a(n-m-1) \\ &\times (f_1 \mp if_2) e^{\mp i(n-m-1)\theta} \} d\theta \end{aligned}$$

さていまの場合

$[\widehat{xx}]_{\infty} = [\widehat{yy}]_{\infty} = p_0$, $B \equiv ([\widehat{xx}]_{\infty} + [\widehat{yy}]_{\infty})/4$,
これらをの点で外力のある時の応力関数式に代入し⁽⁷⁾

$$\begin{aligned}\varphi_M(\zeta) &= (B+iC)b\zeta - \frac{X+iY}{2\pi(\kappa+1)} \log \zeta + \varphi_{0M}(\zeta) \\ &= \frac{p_0 b}{2} \left(\zeta - \frac{a}{\zeta^n} \right) \\ \psi_M(\zeta) &= (B'+iC')b\zeta + \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(\kappa+1)} \log \zeta \\ &\quad + \psi_{0M}(\zeta) \\ &= -\frac{p_0 n}{2} \left\{ \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^n(1+a\zeta^{n+1})}{\zeta^{n+1}-na} \left(1 + \frac{na}{\zeta^{n+1}} \right) \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots (3.10)\end{aligned}$$

ゆえに穴より上では

$$\begin{aligned}[\theta\theta]_{\theta=1} &= (\rho\rho + \theta\theta)_{\theta=1} = 4\Re\{\varphi(\zeta)/\omega'(\zeta)\}_{\theta=1} \\ &= \frac{2(1-a^2n^2)p_0}{1+a^2n^2-2an\cos(n+1)\theta} \dots\dots\dots (3.11)\end{aligned}$$

上式で $n=3$ のとき曲辺四辺形となる。すなわち

$$x = b \cos \theta + ab \cos 3\theta, y = b \sin \theta - ab \sin 3\theta \quad (3.12)$$

ただし $0 \leq a \leq 1/3$, $4b = 3r_1$, $r_1 = 4r_2$

よって第 4 図のご
とく a が大きくな
るにつれて四辺形
の すみ が鋭角に
なり a の最大値
1/3 でアストロイ
ドとなり, a が小
さくなるにつれす
みは丸くなり最小
値 0 のとき円にな
る. (3.11) に

$n=3$ を代入して 第 4 図 $\omega(\zeta) = b(\zeta + a\zeta^{-3})$

$$[\theta\theta]_{\theta=1} = \frac{2(1-9a^2)p_0}{1+9a^2-6a\cos 4\theta} \dots\dots\dots (3.13)$$

$$\therefore \max [\theta\theta]_{\theta=1}^{\theta=0, \pi/2} = \frac{2p_0(1+3a)}{1-3a} \dots\dots\dots (3.14)$$

上記の値は $a=1/3$ で
になり (この場合アス
トロイドで すみ の角度は
0) $a=0$ の時は別項 2.2
の円孔で求めた結果 $2p_0$
と一致する. さて $a=1/7$
の時が第 5 図に示すご
とく両四辺形が すみ をの
ぞいてだいたい近似しこ
の時の穴より上の応力を
(3.7) と (3.13) につい

第 5 図

ての計算結果の比較を第 6 図に示す. 両者はほぼ一致
するが すみ の丸みの影響から丸みの小のサイクロイ
ドの時が すみ で応力が大きく, 曲辺中央でかえて
小になる.

3.3 十字形穴の板応力 ハイポサイクロイドの

第 6 図

が 0.5 以上の時は収束も良いが, 十字形のごとく ξ_1
が小さい時は収束が悪い (3.4) のかわりに次記積
分結果を用いる*.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} [h^2]_{\xi=\xi_1} d\eta &= 4\sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{\cosh 2\xi_1}}{\sinh 2\xi_1} + \frac{\sqrt{\cosh 2\xi_1}}{\sinh 4\xi_1} \right. \\ &\quad \times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2m)} \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \frac{1}{(\cosh 2\xi_1)^{m-1}} \cdot \frac{\Xi_m}{2^{m-2}} \right\} \right] \dots\dots\dots (3.15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ただし } \Xi_m &\equiv e^{-2m\xi_1} + mC_1 e^{-2(m-2)\xi_1} + mC_2 e^{-2(m-4)\xi_1} \\ &\quad + \dots\dots + mC_{m/2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

最後の定数項は m が偶数の時のみ存在する.

$$\begin{aligned}\therefore \frac{[\eta\eta]_{\xi=\xi_1}}{p_0} &= \frac{2(\cosh 2\xi_1 + \cos 2\eta)^{1/2}}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} \\ &\quad \times \left[\frac{\sqrt{\cosh 2\xi_1}}{\sinh 2\xi_1} + \frac{\sqrt{\cosh 2\xi_1}}{\sinh 4\xi_1} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2m)} \cdot \frac{1}{(\cosh 2\xi_1)^{m-1}} \cdot \frac{\Xi_m}{2^{m-2}} \right\} \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (3.16)\end{aligned}$$

第 7 図

第 7 図は第 8 図のご
とく, l_0 , d_0 をとり, 上
式よりの $[\eta\eta]_{\xi=\xi_1}$ の最
大値と d_0/l_0 の関係
を示す. $d_0/l_0=1$ は円孔
である. また第 3 図で
は十字形が細くなるに
つれて最大応力は急速
に大になるが すみ 以

* 積分計算は次記による. 466 ページ脚注* と同様にして

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{(\cosh 2\xi_1 + \cos 2\eta)^{1/2}}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} d\eta &= \frac{\sqrt{\cosh 2\xi_1}}{\pi} \\ &\quad \times \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{(\cosh 2\xi_1)^n} \\ &\quad \times \frac{\cos^n(2\eta) d\eta}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} \\ &= \frac{1}{\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta} \cdot \frac{\pi}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sinh 2\xi_1} \{ e^{-2n\xi_1} \\ &\quad + nC_1 e^{-2(n-2)\xi_1} + nC_2 e^{-2(n-4)\xi_1} + \dots\dots + nC_{n/2} \cdot (1/2) \} \\ &\quad \text{最後の定数項は } n \text{ が偶数の時のみ存在する.}\end{aligned}$$

外の応力は逆に小になり、
穴が直線すなわち十字形き
裂の時は先端で、先端以
外は 0 となる。円孔は穴べ
り上一定で最大値が小さい
かわりに最小値は最大であ
る。

第 8 図

なお十字形穴に流体圧
 p_0 のみが作用する時には

$$[\mathcal{M}_{II}]_{\xi=\xi_1} = -p_0 + [\mathcal{M}_{II}]_{\xi=\xi_1} \dots\dots\dots (3.17)$$

右辺の $[\mathcal{M}_{II}]_{\xi=\xi_1}$ は (3.7) または (3.16) で与えられ
るものを代入する。また n が一般の値をとり $2n$ の放
射線状みぞ穴をもつ時の周辺応力は次式を公式 I' に
代入すればよい。

$$h^2 = \sqrt[2]{2} n^2 (\cosh 2\xi_1 + \cos 2\eta)^{n-1/n} / (\cosh 2\xi_1 - \cos 2\eta) \dots\dots\dots (3.18)$$

3. 結 言

単連結領域の応力集中問題はすでに掘りつくされた
感があるが、本解法はいかなる方法より簡単で関数論
的知識なしに機械的に解ける点が技術者向きである。

(2.19) の積分が困難な時は図式積分でよく、また写
像関数がわからぬ時は Southwell⁽⁸⁾, Poritsky⁽⁹⁾らが
なした任意曲線網目作図法によれば、近似解法で応用
が考えられる*。本報の前半は昭和 19 年九州大学大学
院でなされたもので⁽¹⁰⁾ 当時の指導担任の石橋正、根
来祥三郎両教授の御厚情を謝す。計算の一部に対する
阪大の城教授、近大の齊藤講師の御助言を謝す。

* 作図に際して本解法の制限条件の $0 < \xi < \infty$ の範囲に不正則点
を作らないように注意せねばならない。

文 献

- (1) 筆者、機械学会論文集, 21 巻 111 号, 774 ページ (昭 30)。
- (2) たとえば M. Bricas, *L'Elasticité Bidimensionnelle*
p. 232 (1936)。
- (3) たとえば S. Timoshenko, *Theory of Elasticity*,
§ 50 (1934)。
- (4) たとえば最上, 二次元弾性理論, 193 ページ。
- (5) 太田, 造船協会会報, 67 号 (昭 15)。
- (6) N. Muschelišvili, *Z.A.M.M.*, 13, s. 279 (1933)。
- (7) N. Muschelišvili, *Math. Ann.*, 107, p. 305 (1932)
の (86), (87) 式。
- (8) R.V. Southwell, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*,
238, p. 453 (1940)。
- (9) H. Poritsky, *J. App. Mech.*, 61, p. A-63 (1939)。
- (10) 昭和 20 年 7 月九大材料強弱学教室談話会で講演。

539.386:531.252.3

表面にせん断荷重を受ける半無限弾性体の三次元応力問題*

牟 岐 鹿 楼**

Three Dimensional Problem of Elasticity for a Semi-Infinite Solid with a Tangential Load on its Surface

by Rokurō MUKI

The previous solutions for the stress distribution in a semi-infinite elastic solid under the action of a tangential load over it seem extremely unsuited for applying to special problems. In this paper, the general solution, which is free from the objections raised above, is obtained by the method of Hankel transforms. The general solution is then applied to some particular problems, and numerical calculations are carried out.

1. 緒 言

半無限体の表面に、局部的に垂直荷重の働いている
場合については、古くから多くの研究が行われてきた
が、局部的にせん断荷重の働いている場合を三次元弾
性理論の立場から取扱った研究はあまり行われていな
いようである。垂直荷重の場合に用いられた解法は、

Boussinesq⁽¹⁾ らの対数ポテンシャルによるものと、
寺沢博士, Sneddon⁽²⁾ らによって用いられたベッセル
関数 (ハンケル変換) による解法とに大別される
(4)。前者においては、困難な二重積分を計算しなければ
ならないので、一般解を個々の問題に適用すること
は非常に困難であり、後者の方が個々の問題に対す
る解の導出がはるかに容易であるという点ですぐれて
いると思う。ところで本問に対する解は、Boussinesq
らの方法⁽⁵⁾によるものがあるのみで、ハンケル変換を
用いた解はまだ求められていないようである。これは
今までハンケル変換による非軸対称弾性問題の一般解

* 昭和 30 年 10 月 15 日 東京秋期講演大会において「表面にせん
断力を受ける厚い平板内に生ずる応力」と題して講演, 原稿受
付 昭和 31 年 2 月 4 日。

** 正員, 慶応義塾大学工学部。