○……高 C%, ×……低 C%
第 10 図 摩耗量 L と摩擦係数 μ に及ぼす C% の影響

○……高 Si%, ×……低 Si%
第 11 図 摩耗量 L と摩擦係数 μ に及ぼす Si% の影響

いことは前掲第 1 表の試験条件は成分、性質の極端に相違するあらゆる ねずみ鋳鉄 に対しても支障なく応用しうることを明示して論議の余地はない。なお Ni, Cr その他を添加した特殊鋳鉄の場合でも なんらの支障がないこともわかっている。

8. 結 論

以上のとおりで該試験条件で測定すれば材質の異常はなんら $L : \mu$ の関係を乱すものでないことが完全に立証されたので、該試験条件に対し日本特許第 198863 号が許可された。その後これを利用して成分性質を異にする幾多の試験片について実験を繰返した結果、成分 (C : Si : Mn) と摩耗量 L との間に不動の法則が成立する事実を発見し、これに基づいて耐摩耗鋳鉄の全ぼうをはあくすることが出来たので耐摩耗性の改善に対し明るい見透しをうるに至った。これに関しては稿を改めて発表する予定である。

文 献

- (1) (2) (4) 大越, 機械学会論文集, 7 巻 29 号 (昭 16-11).
- (3) (5) 大越, 学振第 6 小委員会報告 (昭 15-12).
- (6) 筆者, 学振第 6 小委員会報告 (昭 21-5).
- (7) 金属の磨耗, 68, 115, 130, 221 ページ, 学振第 6 小委員会報告 (昭 21-5).

寄 書

539. 384. 2: 624. 073. 112

放射状領域に分布荷重を受けた円板の曲げ*

斎

藤

渥**

Bending of a Circular Plate under a Distributed Load in Radial Domain

by Atsushi SAITO

1. 緒言 全面に分布荷重を受けた円板のたわみおよび曲げモーメントの解は古くから知られているが、分布荷重が放射状領域に作用している円板の解は未だ知られていない。著者はこの問題に対して「放射状領域に分布荷重を受けた同心円孔円板の曲げ」⁽¹⁾において発表したのと同様な方法で取り扱い、たわみの厳密解を求め、また数値計算例を行って板内各点のたわみおよび周辺曲げモーメントを求めた。本稿における解法は前記論文と同様な方法を行っているから本問題の結果のみを記載する。

第 1 図

2. 計算の結果 半径 $r=a$ なる円板に $\theta = \theta_1$ より $\theta = \theta_2$ まで分布荷重 $p(r)$ を受けた場合 ($\theta_1 \neq \theta_2$) の円板のたわみ w は次記となる。

$$w(r, \theta) = w_c + w_p \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} w_c &= R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \{ \sin m(\theta - \theta_1) - \sin m(\theta - \theta_2) \} \\ R_0 &= A_0 + B_0 r^2 \\ R_m &= A_m r^m + B_m r^{m+2} \quad (m \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

* 昭和 30 年 5 月 20 日 長岡地方講演会において講演、原稿受付 昭和 30 年 11 月 22 日。

** 正員、近畿大学。

$$w_p = \frac{p}{8\pi D} \left[\rho_0(\theta_2 - \theta_1) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m \{ \sin m(\theta - \theta_1) - \sin m(\theta - \theta_2) \} \right]$$

$p(r) = p$ (一定) なる場合

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \{a^2(a^2 + 2r^2) \log a - (a^4 - 4a^2r^2 - r^4)/4\} / 4 \\ \rho_1 &= r(8r^3/45 - a^3/9 - ar^2/2 - 2a^3 \log a/3) \\ \rho_2 &= r^2\{3a^2/2 - 11r^2/12 - r^2 \log(a/r)\}/12 \\ \rho_3 &= r^3(a/6 - 8r/35 + r^2/12a)/3 \\ \rho_4 &= r^4\{5 \log(a/r) + 3r^2/2a^2 - 25/24\}/240 \\ \rho_m &= m^{-2}(m^2 - 1)^{-1}r^m[8m(m^2 - 1)(m^2 - 4)^{-1} \\ &\quad \times (m^2 - 16)^{-1}r^{-m+4} + a^{-m+2}\{(m-1)(m-2)^{-1}r^2 \\ &\quad - (m+1)(m-4)^{-1}a^2\}] \quad (m \geq 5) \end{aligned}$$

$p(r) = p \cdot r$ なる場合

$$\begin{aligned} \rho_0 &= a^3(a^2/5 + r^2/3) \log a - a^5/25 + 2a^3r^2/9 + 4r^5/225 \\ \rho_1 &= -r(a^4 \log a + a^4/4 + a^2r^2/2 - r^4/12)/2 \\ \rho_2 &= r^2\{8r^3/35 + a(a^2 - r^2)/2\}/6 \\ \rho_3 &= r^3\{a^2 - 19r^2/24 - r^2 \log(a/r)\}/36 \\ \rho_4 &= r^4(a/12 + r^2/20a - 8r/63)/4 \\ \rho_5 &= r^5\{\log(a/r) + r^2/3a^2 - 11/40\}/100 \\ \rho_m &= m^{-2}(m^2 - 1)^{-1}r^m[8m(m^2 - 1)(m^2 - 9)^{-1} \\ &\quad \times (m^2 - 25)^{-1}r^{-m+5} + a^{-m+3}\{(m-1)(m-3)^{-1}r^2 \\ &\quad - (m+1)(m-5)^{-1}a^2\}] \quad (m \geq 6) \end{aligned}$$

.....(3)

次に w_0 中の任意定数は次記で与えられる。

($W \equiv p/8\pi D$)

(a) 周辺固定端の場合

$$\begin{aligned} A_0 &= \{(a/2)\rho_0'(a) - \rho_0(a)\}(\theta_2 - \theta_1)W \\ B_0 &= -(2a)^{-1}\rho_0'(a)(\theta_2 - \theta_1)W \\ A_m &= a^{-m}\{a\rho_m'(a) - (m+2)\rho_m(a)\}W/2 \\ B_m &= a^{-m-2}\{m\rho_m(a) - a\rho_m'(a)\}W/2 \quad (m \geq 1) \end{aligned}$$

.....(4)

(b) 周辺回転端の場合

$$\begin{aligned} A_0 &= -\{\rho_0(a) - (a^2/2)(1+\nu)^{-1}\beta_0(a)\}(\theta_2 - \theta_1)W \\ B_0 &= -(1+\nu)^{-1}\beta_0(a)(\theta_2 - \theta_1)W/2 \\ A_m &= -(2m+1+\nu)^{-1}a^{-m}\{(m+1)\{(m+2) \\ &\quad - (m-2)\nu\}\rho_m(a) - a^2\beta_m(a)\}W/2 \\ B_m &= (2m+1+\nu)^{-1}a^{-m-2}\{m(m-1)(1-\nu)\rho_m(a) \\ &\quad - a^2\beta_m(a)\}W/2 \quad (m \geq 1) \end{aligned}$$

.....(5)

ただし (4), (5) 式中における記号は次式で与えられる。

$p(r) = p$ なる場合

$$\begin{aligned} \rho_0(a) &= a^4(3 \log a + 1)/4 \\ \rho_1(a) &= -a^4(2 \log a + 13/10)/3 \\ \rho_m(a) &= 2m^{-2}(m^2 - 1)^{-1}(m+2)^{-1}(m+4)^{-1} \\ &\quad \times (2m+3)a^4 \quad (m \geq 2) \\ \rho_0'(a) &= a^3(4 \log a + 3)/4 \\ \rho_1'(a) &= -a^3(2 \log a/3 + 9/10) \\ \rho_m'(a) &= -2m^{-2}(m^2 - 1)^{-1}(m+2)^{-1}(m+4)^{-1} \\ &\quad \times (m^2 - 2m - 4)a^3 \quad (m \geq 2) \end{aligned}$$

$$\beta_0(a) = a^2\{4(1+\nu) \log a + 5 + 3\nu\}/4$$

$$\beta_1(a) = -a^2(13+7\nu)/15$$

$$\beta_m(a) = -4m^{-2}(m+2)^{-1}(m+4)^{-1} \times \{2 + (m+2)\nu\}a^2 \quad (m \geq 2)$$

$p(r) = p \cdot r$ なる場合

$$\rho_0(a) = a^5(8 \log a/3 + 1)/5$$

$$\rho_1(a) = -a^5(\log a + 2/3)/2$$

$$\rho_m(a) = 4m^{-2}(m^2 - 1)^{-1}(m+3)^{-1}(m+5)^{-1} \times (m+2)a^5 \quad (m \geq 2)$$

$$\rho_0'(a) = 2a^4(\log a + 4/5)/3$$

$$\rho_1'(a) = -a^4(\log a + 4/3)/2$$

$$\rho_m'(a) = -2m^{-2}(m^2 - 1)^{-1}(m+3)^{-1}(m+5)^{-1} \times (m^2 - 2m - 5)a^4 \quad (m \geq 2)$$

$$\beta_0(a) = 2a^3\{(1+\nu) \log a + 2(3+2\nu)/5\}/3$$

$$\beta_1(a) = -a^3(2+\nu)/3$$

$$\beta_m(a) = -2m^{-2}(m+3)^{-1}(m+5)^{-1} \times \{5 + (2m+5)\nu\}a^3 \quad (m \geq 2)$$

.....(6)

円板上全面にわたって等分布荷重 p が作用している場合には $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$ とすれば

$$w = R_0 + \frac{p}{8\pi D} \cdot 2\pi \rho_0 = A_0 + B_0 r^2 + \frac{p}{4D} \rho_0$$

周辺固定の場合を計算すれば

$$\begin{aligned} w &= \{(a^2 - r^2)\rho_0'(a)/2a - \rho_0(a) + \rho_0\}p/4D \\ &= p(a^2 - r^2)^2/64D \end{aligned}$$

となる。この結果は等分布荷重を受けた円板のたわみに対する周知の解⁽²⁾である。周辺回転端の場合にも同様にして周知の解と一致することが証明される。

3. 数値計算例 数値計算の一例として半径 1 なる周辺固定の円板の半面に分布荷重が作用している場合を取り扱った。すなわち本計算例では

$$a = 1, \quad \theta_1 = -\pi/2, \quad \theta_2 = \pi/2$$

$$p(r) = p \quad \text{または} \quad p(r) = p \cdot r$$

とした。この場合板内各点のたわみは第 1 表および第 2 図または第 2 表および第 3 図となる。また円板の固定周辺上の各点の曲げモーメント M_r を計算した結果は第 3 表および第 4 図となる。

4. 結語 放射状の領域に分布荷重が作用している円板に対して、既に発表した同心円孔円板の場合と同様な方法で取り扱い、その結果の式のみを記載した。数値計算例として等分布荷重または半径に比例する分布荷重が周辺固定の円板の半面に作用している場合を取り扱い、たわみおよび周辺上曲げモーメントを求めたが、全面にわたって分布荷重を受けている場合として、これらの表の数値を板内および境界上の各点について重畳すると末位のけたで 1 以内の誤差において角 θ に無関係となることがみられる。

文 献

- (1) 著者, 機械学会論文集, 21 巻 107 号, 496 ページ。
- (2) Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, p. 60.

第1表 $p(r)=p$ たわみ $w \times 8\pi D/p$

r θ	0	0.25	0.5	0.75
0°	0.196 350	0.209 440	0.152 786	0.056 760
22°30'	—	0.206 950	0.150 520	0.055 979
45°	—	0.199 530	0.143 291	0.053 353
67°30'	—	0.187 582	0.129 970	0.047 839
90°	—	0.172 573	0.110 447	0.037 583
112°30'	—	0.157 564	0.090 923	0.027 327
135°	—	0.145 615	0.077 602	0.021 812
157°30'	—	0.138 195	0.070 374	0.019 186
180°	—	0.135 705	0.068 107	0.018 405

第2表 $p(r)=p \cdot r$ たわみ $w \times 8\pi D/p$

r θ	0	0.25	0.5	0.75
0°	0.083 776	0.093 133	0.072 818	0.029 366
22°30'	—	0.091 888	0.071 685	0.028 975
45°	—	0.088 272	0.068 018	0.027 621
67°30'	—	0.082 434	0.061 068	0.024 603
90°	—	0.075 104	0.050 615	0.018 490
112°30'	—	0.067 773	0.040 161	0.012 376
135°	—	0.061 935	0.033 211	0.009 358
157°30'	—	0.058 319	0.029 544	0.008 005
180°	—	0.057 075	0.028 412	0.007 613

第3表 固定周边上曲げモーメント
 $-M_r \times 8\pi/p$

θ	$p(r)=p$	$p(r)=p \cdot r$
0°	2.517 2	1.422 0
22°30'	2.494 6	1.407 1
45°	2.388 3	1.354 3
67°30'	2.162 7	1.225 3
90°	1.570 8	0.837 8
112°30'	0.978 9	0.450 3
135°	0.753 3	0.321 2
157°30'	0.646 9	0.268 4
180°	0.624 4	0.253 5

第2図 たわみ $p(r)=p$ 第3図 たわみ $p(r)=p \cdot r$

第4図 固定周边上曲げモーメント