621.833.065

直 線 接 触 歯 車 に 関 す る 研 究

(第 1 報 斜曲面歯形とかみあい限界)*

横 田 晃**

On Gears with Straight Contact Lines (1st Report)

by Akira Yokota

In this study some fundamental properties of skew gears with straight contact lines are investigated. The condition of meshing two ruled surfaces along a straight line is made clear. Therefore, four kinds of those gears are obtained from this condition. They are also classified as skew surface and developable surface. This report treats the skew surface gears. Their distribution parameter, basic differential invariants are obtained and interference of gearing is clarified.

1. 結 言

食違い軸歯車のうちで、直線接触をするものについては、平歯車・かさ歯車の類推として、古くから考えられている。M. Disteli⁽¹⁾はこれについて詳しい研究を行っている。直線接触食違い軸歯車のうち、斜曲面を歯形とするものについては、前田⁽²⁾の研究があり、可展面については、松山⁽³⁾の研究がある。また、E. Wildhaber⁽⁴⁾もこれについて論じているが、それは可展面歯形のうちのごく特殊なものに限られている。渡辺⁽⁵⁾は可展・非可展と区別せず、直線接触歯車の接触条件について論じている。直線接触歯車の可展・斜曲面歯車の由来については、M. Disteli によれば、媒介歯面として直線を与えた場合が斜曲面であり、平面を与えた場合が可展面であるとしている。しかし、このような場合以外に直線接触をするものがあるかどうかについては全く不明である。

直線接触歯車のうちで、可展面歯形は実用性があり、斜曲面歯形は実用性のないものと一般に考えられているようである。しかし、M. Disteli の提案した空間サイクロイド歯車*** は製作も容易であり、実用性が全くないと断定することはできない。したがって斜曲面歯形の内容について考察をすすめることも意味のないことではない。また前田は斜曲面歯形について、美しい理論を展開したが、實際上最も必要であるかみあい限界については全然触れていない。

ここに筆者は、食違い軸歯車理論の一般的立場⁽⁶⁾か

ら直線接触歯車について論じ、そのうち斜曲面歯形に関する考察をもって第 1 報とし、可展面に関する考察を続報に譲る。

以下の議論においては、断りのない限り、すべての量はベクトル量である。また、ドイツ文字およびギリシャ字の大文字は、二元ベクトル量である。

2. 接 触 線

2 軸 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ のまわりに回転している 1 組の歯車 I, II がある。この角速度をそれぞれ ω_1, ω_2 とし、その相対速度を $\omega = \omega_2 - \omega_1$ とする。2 軸の共通垂線が $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を切る点を O_1, O_2 とし、 $\vec{O_1O_2} \in \epsilon$ とする。一点 P を位置ベクトル $\mathbf{r}$ で表わし、 P における I の速度を $\mathbf{v}_1$, II の速度を $\mathbf{v}_2$ とし、その相対速度を $\mathbf{w} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ とする。位置ベクトルの原点における I の速度を $\bar{\omega}_1$, II の速度を $\bar{\omega}_2$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \omega_1 \times \mathbf{r} + \bar{\omega}_1, & \omega_1 \cdot \bar{\omega}_1 &= 0 \\ \mathbf{v}_2 &= \omega_2 \times \mathbf{r} + \bar{\omega}_2, & \omega_2 \cdot \bar{\omega}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1)$$

が成立つ。 $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$ とすると

$$\mathbf{w} = \omega \times \mathbf{r} + \bar{\omega}, \quad \omega \cdot \bar{\omega} / \omega^2 = h \dots\dots\dots (2.2)$$

となる。 h は $\mathbf{w}$ のつくるねじ速度の換算ピッチである。

今 1 本の直線が存在して、この直線上で瞬間軸と最短の点を $\mathbf{r}_0$ とすれば、直線の方角単位ベクトル ν , $\mathbf{r}$ からの距離を示すスカラー s を用いて、この直線は次のように表わされる。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\nu \dots\dots\dots (2.3)$$

(2.3) が表わす直線上の各点が接点となつて、(2.3) 全体として接触線となるためには、各点が静止空間に描く軌跡は、軌線の微分方程式を満足せねばならない⁽⁶⁾。静止空間中における時間 t による微分係数を

* 昭和 29 年 4 月 7 日 第 31 期定時総会講演会および昭和 29 年 9 月 24 日 北陸地方講演会において講演、原稿受付 昭和 31 年 6 月 19 日。

** 正員、山形大学工学部。

*** Räumliche Zykloidenverzahnung.

D/dt で表わすことにすれば、軌線の微分方程式は

$$D\mathbf{r} = (\mu_1 \mathbf{v}_2 + \mu_2 \mathbf{v}_1) dt, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1 \quad (2.4)$$

μ_1, μ_2 はすべり率の逆数を示すスカラーであるが、ここでは歯形係数と呼ぶことにする。もちろん、強度計算等に使われる歯形係数とは何の関係もない。したがって、直線上の各点が軌線を描いて新しい接触線に到達したとすれば、その接触線を $\mathbf{r}^*$ とし、

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^* &= \mathbf{r} + D\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v} + (\mu_1 \mathbf{v}_2 + \mu_2 \mathbf{v}_1) dt \\ &= \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v} + (\mu_1 \mathbf{w}_0 + \mathbf{v}_{10} + s\mu_1 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + s\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}) dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。ここに

$$\mathbf{v}_{10} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_0 + \bar{\boldsymbol{\omega}}_1, \quad \mathbf{w}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0 + \bar{\boldsymbol{\omega}}$$

である。

$\mu_1 \mu_2$ はともに s の関数であるとして、 $\mathbf{r}^*$ の s による微分係数を求めると

$$d\mathbf{r}^*/ds = \mathbf{v} + (\mathbf{w}_0 d\mu_1/ds + \mu_1 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + s\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} d\mu_1/ds + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}) dt \quad (2.6)$$

であるが、このベクトルの単位ベクトルを $\mathbf{t}$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= [\mathbf{v} + \{\mathbf{w}_0 d\mu_1/ds + (\mu_1 + s d\mu_1/ds) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}\} dt] / \sqrt{(1 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_0 dt d\mu_1/ds)} \\ &= \mathbf{v} + \{\mathbf{w}_0 d\mu_1/ds - \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} d\mu_1/ds \\ &\quad + (\mu_1 + s d\mu_1/ds) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}\} dt \quad (2.7) \end{aligned}$$

となる。 $\mathbf{t}$ は新しい接触線の単位切線ベクトルである。新しい接触線が直線であるためには、 $\mathbf{t}$ は s に関せず一定でなければならない。したがって、

$$dt/ds = 0 \quad (2.8)$$

が、新しい接触線が直線となる条件である。換言すれば、(2.8) が直線接触の条件である。(2.7) より、

$$dt/ds = \{\mathbf{w}_0 d^2\mu_1/ds^2 - \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} d^2\mu_1/ds^2 + (2 d\mu_1/ds + s d^2\mu_1/ds^2) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}\} dt$$

よって、(2.8) の条件を満足するためには、

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v}) d^2\mu_1/ds^2 + (2 d\mu_1/ds + s d^2\mu_1/ds^2) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.9)$$

なるを要する。(2.9) は $\mathbf{v} \times (\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v})$ と $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ とが一次独立な場合と、一次従属な場合とでは全く異なった内容を持つので、 $\mathbf{v} \times (\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v})$ と $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ の独立性について吟味をする。 $\mathbf{v} \times (\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v})$ と $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ が一次従属であれば

$$\{\mathbf{v} \times (\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v})\} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0$$

$$\therefore [\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} \mathbf{v} \boldsymbol{\omega}] = 0 \quad (2.10)$$

また、 $\mathbf{r}_0$ 点は接触直線上で瞬間軸と最短の点であるから、

$$[\mathbf{w}_0 \mathbf{v} \boldsymbol{\omega}] = 0 \quad (2.11)$$

が成立している。 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \neq 0$ とすれば (2.10) (2.11) から、

$$\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.12)$$

すなわち、 $\mathbf{v} \times (\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v})$ と $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ が一次従属なることは、 $\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} = 0$ または $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0$ ということである。

そこで、(2.9) について考える。

(i) $[\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} \mathbf{v} \boldsymbol{\omega}] \neq 0$ の場合 $\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}_0)$ と $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ は一次独立であるから (2.9) が成立するためには

$$\left. \begin{aligned} d^2\mu_1/ds^2 &= 0 \\ 2d\mu_1/ds + s d^2\mu_1/ds^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

これを解いて、

$$\mu_1 = \text{const.} \quad (2.14)$$

すなわち、この場合には歯形係数が (したがって、すべり率が) 接触線上のすべての点で等しくなければならない。

(ii) $\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} = 0$, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \neq 0$ の場合 (2.9) が成立するためには、

$$s d^2\mu_1/ds + 2 d\mu_1/ds = 0 \quad (2.15)$$

これを解いて

$$\mu_1 = C_1/s + C_2 \quad C_1, C_2 \text{ 定数} \quad (2.16)$$

この場合は歯形係数が接触線上で一定ではない。しかし $\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} = 0$ という条件が継続して保たれなければ、次の瞬間には $\mu_1 = \text{const.}$ とならねばならぬので、歯形係数がすべり線に沿って不連続になるという現象がおこる。 $\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} = 0$ がひきつづいて保たれる場合を考える。 dt 後の接触線は

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v} + \{(C_1/s + C_2)\mathbf{w}_0 + (C_1 + C_2s)\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{v}_{10} + s\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}\} dt \quad (2.17)$$

であり、この接触線の方向単位ベクトル $\mathbf{v}^*$ は

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{t} = \mathbf{v} + (C_2\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{v} dt \quad (2.18)$$

である。またこの直線上の相対速度は、

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^* &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^* + \bar{\boldsymbol{\omega}} \\ &= \mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times \{(C_1/s + C_2)\mathbf{w}_0 + \mathbf{v}_{10} \\ &\quad + (C_1 + sC_2)\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + s\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}\} dt \end{aligned} \quad (2.19)$$

で示される。 $\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} = 0$ ということは、 $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \neq 0$ として

$$[\mathbf{w} \mathbf{v} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] = 0 \quad (2.20)$$

ということであったから、これを微分して、

$$[D\mathbf{w} \mathbf{v} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] + [\mathbf{w} D\mathbf{v} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] + [\mathbf{w} \mathbf{v} D\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] = 0 \quad (2.21)$$

が成立てば、 dt 後にも $\mathbf{w}_0^* \times \mathbf{v}^* = 0$ という条件が保たれているわけである。(2.18) (2.19) より、

$$\begin{aligned} D\mathbf{w} &= \boldsymbol{\omega} \times \{(C_1/s + C_2)\mathbf{w}_0 + \mathbf{v}_{10} \\ &\quad + (C_1 + sC_2)\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + s\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}\} dt \\ D\mathbf{v} &= (C_2\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{v} dt \end{aligned}$$

であるから、これを (2.21) に代入して整理すると

$$C_1 = [\mathbf{v} \boldsymbol{\omega} \mathbf{q}_0 \times \mathbf{v}] / (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})^2 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} \quad (2.22)$$

をうる。ここに $\mathbf{q}_0 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}_{10} - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{20}$ である。すなわち、 $\mu_1 = C_1/s + C_2$ という歯形係数のうち、 C_1 の値を (2.22) に示された値に保ちつつ接触面を形成してゆけば、常に $\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} = 0$ となしうる。 C_1 を勝手に選べば、次の瞬間には $\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} \neq 0$ となって、直線接触を継続するには、 $\mu_1 = C_1/s + C_2$ ではいけないことになる。

この結果、すべり率はすべり線に沿って不連続となるわけである。 $\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} = 0$ を常に保つ歯車は、可展面を形成するが、これについては第 2 報において詳論する。

(iii) $\mathbf{w}_0 \times \mathbf{v} \neq 0$, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0$ の場合 この場合には (2.9) は

$$d^2\mu_1/ds^2 = 0 \quad (2.23)$$

となる。これを解いて、

$$\mu_1 = C_1 s + C_2 \quad C_1, C_2 \text{ 定数} \quad (2.24)$$

この場合 $d\mu_1/ds = C_1$ であるから、

$$t = \nu + \{C_1 \nu \times (w_0 \times \nu) + \omega_1 \times \nu\} dt$$

ただし、 $\omega \times \nu = 0$ であるから、接触線は瞬間軸に平行である。そこで x_0 は接触線上の任意の定点とする。

$$\omega \times t = [C_1 \omega \times \{\nu \times (w_0 \times \nu)\} + \omega \times (\omega_1 \times \nu)] dt$$

となるから、 $\omega \times \nu^* = 0$ となるのは

$$[\omega \times \{\nu \times (w_0 \times \nu)\}] \times [\omega \times (\omega_1 \times \nu)] = 0$$

の場合だけである。これより、

$$[\omega \times w_0 \times \omega \times \omega_1] = 0 \quad (2.25)$$

が成立するとき、 $\omega \times \nu^* = 0$ となる。このとき C_1 は

$$C_1 = (\omega_1 \times \nu)^2 / [w_0 \nu \omega_1] \quad (2.26)$$

となる。

さて、(2.25) を満足する位置に接触線があり（これは瞬間軸を含み 2 軸に平行なる平面上に接触線があることである）、(2.26) を満足するならば dt 後にも $\omega \times \nu = 0$ となるが、更にこの時もまた (2.25) を満足する位置になければ、 $\omega \times \nu = 0$ という条件を継続してゆくことはできない。

(2.25) を微分して、

$$[\omega \times dw_0 \times \omega \times \omega_1] = 0.$$

$dw_0 = \omega \times dx_0$ であるから $dx_0 = (\mu_1 w_0 + v_{10}) dt$ を用いると、 $\mu_1 = (C_1 s + C_2)_{s=0} = C_2$ であるから

$$[\omega \times \{\omega \times (C_2 w_0 + v_{10})\} \times \omega_1] = 0$$

$$\therefore [\omega_1 \times C_2 w_0 + v_{10}] = 0$$

これより C_2 を求めると、

$$C_2 = -[\omega_1 \times \omega \times v_{10}] / [\omega_1 \times \omega \times w_0] \quad (2.27)$$

(2.26) (2.27) によって $\mu_1 = C_1 s + C_2$ を求めると

$$\mu_1 = C_1 s + C_2$$

$$= -[v_{10} \times \omega_1 \times \omega] / [w_0 \times \omega_1 \times \omega] \quad (2.28)$$

よって、(2.25) を満たし、(2.28) を満足するような場合には、継続的に $\omega \times \nu = 0$ なる直線接触歯車を得られる。(2.25) からわかるように、これはオリビエの歯形において $\omega \times \nu = 0$ となった場合である。

(iv) $w_0 \times \nu = 0, \omega \times \nu = 0$ なる場合 この条件が満足されるのは瞬間軸上に限られる。したがって軌線は瞬間軸に一致する。

$$Dx = (\mu_1 w + v_1) dt,$$

したがって $\mu_1 = \infty$ なるを要する。このとき $\mu_2 = \infty$ である。この場合の歯形は二つの回転双曲面である。

すべり線上ですべり率が不連続となることを許すならば、上記の四つの場合は時間の経過とともに混合して起りうる。不連続となることを許さなければ、上記の 4 種類の歯車に分類される。かつ、この四つの場合以外に直線接触歯車は存在しない。

上記の理論を直線接触をするための条件についての渡辺博士の理論⁽⁵⁾と対照してみよう。渡辺の理論は直角座標で書かれているために、その幾何学的内容が明りょうでないので、ベクトル表示によって対照してゆく。まず接触線の軌跡面として、線織面

$$x(u, v) = x_0(u) + v\nu(u) \quad (2.29)$$

があるときに、 $x(u, v)$ が $u = \text{const.}$ とおいた直線が接触線となるためには次の接触条件式を満足せねばならない。

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u} - v_1 \frac{\partial x}{\partial v} - w \right] = 0 \quad (2.30)$$

渡辺博士は、(2.30) を直角座標で表わしたものを機構学的必要条件と呼んでいる。

(2.29) より、

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x_0}{\partial u} + v \frac{\partial \nu}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \nu$$

ゆえに、(2.30) は、

$$\left[\frac{\partial x_0}{\partial u} + v \frac{\partial \nu}{\partial u} - v_1 \nu - w \right] = 0 \quad (2.31)$$

ここで、 $v_1 = v_{10} + v \omega_1 \times \nu$, $w = w_0 + v \omega \times \nu$

を代入して、 v のべきで整理すると、

$$\begin{aligned} & v^2 \left[\frac{\partial \nu}{\partial u} - \omega_1 \times \nu \nu \times \omega \times \nu \right] \\ & + v \left[\left[\frac{\partial x_0}{\partial u} - v_{10} \nu \times \omega \times \nu \right] + \left[\frac{\partial \nu}{\partial u} - \omega_1 \times \nu \nu \times w_0 \right] \right] \\ & + \left[\frac{\partial x_0}{\partial u} - v_{10} \nu \times w_0 \right] = 0 \quad (2.32) \end{aligned}$$

(2.32) は、 v のいかににかかわらず成立すべきによつて、

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{\partial \nu}{\partial u} - \omega_1 \times \nu \nu \times \omega \times \nu \right] = 0 \\ & \left[\frac{\partial x_0}{\partial u} - v_{10} \nu \times \omega \times \nu \right] + \left[\frac{\partial \nu}{\partial u} - \omega_1 \times \nu \nu \times w_0 \right] = 0 \\ & \left[\frac{\partial x_0}{\partial u} - v_{10} \nu \times w_0 \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

渡辺博士は (2.33) を直角座標で表わした式を直線接触の条件式として提示しておられるのである。(2.33) から、 w_0, ν, ω の独立性について吟味をして議論を進めれば、前述の理論と同じ結論をうることができる。(ただし $[w_0 \times \nu \times \omega \times \nu] = 0$ の場合に歯形係数に着目しなければ、その幾何学的内容にまで議論を進めることは困難である。) すなわち、渡辺の理論は、それを押し進めて、展開してゆけば筆者の理論のように可展面や斜曲面の生ずる条件も明らかにされるものである。これに反して、前田の理論は、接触直線を Dual 球面上の点に対応させたために斜曲面だけを、松山の理論は媒介平面を仮定したために可展面だけを説明するに終っている。

3. $[w_0 \times \nu \times \omega] \neq 0$ の歯形

まず前節における (i) の場合の歯形、すなわち $\mu_1 = \text{const.}$ の歯形について考える。歯面の単位法線ベクトルを n とすれば、

$$w \times \nu = w_0 \times \nu + s(\omega \times \nu) \times \nu$$

であり、かつ $w_0 \times \nu$ と $(\omega \times \nu) \times \nu$ とは独立であるから、 $w \times \nu \neq 0$ であるから

$$n = w \times \nu / \sqrt{(w \times \nu)^2} \dots\dots\dots (3.1)$$

で表わされる。(3.1)を s で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{dn}{ds} &= \frac{dw}{ds} \times \nu / \sqrt{(w \times \nu)^2} \\ &\quad - \frac{dw}{ds} \times \nu \cdot w \times \nu / \sqrt{(w \times \nu)^2}^3 \\ &= (w \times \nu) \times \nu / \sqrt{(w \times \nu)^2} \\ &\quad - [\nu \cdot w] w \times \nu / \sqrt{(w \times \nu)^2}^3 \dots\dots\dots (3.2) \end{aligned}$$

$(w \times \nu) \times \nu$ と $w \times \nu$ は一次独立なベクトルであるから, (3.2)は0となることはない. すなわち, 歯形は斜曲面である. この場合, κ をこの直線に沿う配分媒介変数 (distribution parameter) とすれば, 斜曲面に関する Chasles の定理⁽⁷⁾を用いて,

$$dn/ds = \kappa(w \times \nu) \times \nu / \{(s-l)^2 + \kappa^2\} \sqrt{(w \times \nu)^2} \dots\dots\dots (3.3)$$

ここに l は接触線の中心 (center) を示す s の値である. (中心とは歯面上の締結線 line of striction と接触線との交点である.) (3.2)と(3.3)とは全く等しいはずであるから

$$\begin{aligned} (w \times \nu)^2 (w \times \nu) \times \nu - [\nu \cdot w] w \times \nu \\ - \kappa (w \times \nu) \times \nu (w \times \nu)^2 / \{(s-l)^2 + \kappa^2\} = 0 \end{aligned}$$

w を内積すると

$$[w \times \nu \cdot \nu w] + \kappa (w \times \nu)^2 / \{(s-l)^2 + \kappa^2\} = 0$$

これに $w = w_0 + s w \times \nu$ を代入すると

$$\begin{aligned} s^2 [w \times \nu \cdot \nu w_0] + \kappa (w \times \nu)^2 - 2ls [w \times \nu \cdot \nu w_0] \\ + \kappa (w_0 \times \nu)^2 + \kappa^2 [w \times \nu \cdot \nu w_0] + l^2 [w \times \nu \cdot \nu w_0] \\ = 0 \dots\dots\dots (3.4) \end{aligned}$$

この式は s のいかんにかかわらず成立すべきものであるから, s^1 の項より,

$$l [w \times \nu \cdot \nu w_0] = 0$$

をうる. $[w \times \nu \cdot \nu w_0] \neq 0$ であるから

$$l = 0 \dots\dots\dots (3.5)$$

また s^2 の項と s^0 の項とから

$$\begin{aligned} [w \times \nu \cdot \nu w_0] + \kappa (w \times \nu)^2 = 0 \\ (w_0 \times \nu)^2 + \kappa [w \times \nu \cdot \nu w_0] = 0 \end{aligned}$$

この両式より

$$\kappa = \sqrt{(w_0 \times \nu)^2} / \sqrt{(w \times \nu)^2} \dots\dots\dots (3.6)$$

をうる. (3.5)の意味は, 接触線上の瞬間軸との最短点と, 中央点とは一致することを示している. そして接触線が与えられれば, それに沿う配分媒介変数は(3.6)によって決まる. すなわち $[w_0 \cdot \nu \cdot w \times \nu] \neq 0$ の歯形は, e_0 を中央点として, 配分媒介変数が κ なる斜曲面である.

かさ歯車および平歯車では w_0 および $w \times \nu$ をそれぞれいかに小さくすることが可能である. したがって, この極限として $\kappa=0$ なる歯形が生れる. これはふつうに用いられている直歯かさ歯車および直歯平歯車である. 一般の軸位置においても, $w_0 \times \nu \rightarrow 0$ の極限として $\kappa \rightarrow 0$ ならしめることは可能である. この歯形は(2.16)において $C_1 \rightarrow 0$ の場合にも相当するので第2報で詳論するが, これが斜曲面と可展面の

境界を形作っている歯形である.

さて, 歯面上の相隣る接触線のなす二角のピッチは κ であるが, 今その二角と, 相隣る接触線の中央点における接触線に直交する歯面切線のなす二角に注目しよう. この二つの二角がわかれば線織面は局所的に決定される. 接触線の中央点に, 接触線 $\mathcal{G}_1$, 歯面法線 $\mathcal{G}_2$ 歯面切線 $\mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ なる三角すいを設定すると, ($\mathcal{G}_i$ は二元ベクトルである.)

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}_1' &= P \mathcal{G}_2 & P &= \sqrt{\mathcal{G}_1'^2} \\ \mathcal{G}_2' &= -P \mathcal{G}_1 + Q \mathcal{G}_3 & Q &= \frac{[\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_1' \mathcal{G}_1'']}{\mathcal{G}_1'^2} \\ \mathcal{G}_3' &= -Q \mathcal{G}_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.7)$$

が成立する⁽⁸⁾. 前述した二つの二角は Pdt , Qdt に外ならない.

$$\mathcal{G}_i' dt = d\mathcal{G}_i \quad (i=1, 2, 3)$$

とする. 静止空間内における $\mathcal{G}_i$ の変化は $D\mathcal{G}_i$ で示すことにする. かつI, IIの系内での $d\mathcal{G}_i$ をそれぞれ $d_1\mathcal{G}_i$, $d_2\mathcal{G}_i$ で表わす.

$$\mathcal{Q}_j = \omega_j + \epsilon \bar{\omega}_j \quad (j=1, 2) \dots\dots\dots (3.8)$$

とすれば,

$$D\mathcal{G}_i = d_j \mathcal{G}_i + \mathcal{Q}_j \times \mathcal{G}_i dt \dots\dots\dots (3.9)$$

接触線すなわち $\mathcal{G}_1$ についてはその動きは判明している. すなわち,

$$\mathcal{Q}_3 = \mu_1 \mathcal{Q}_2 + \mu_2 \mathcal{Q}_1 \dots\dots\dots (3.10)$$

とすると,

$$D\mathcal{G}_1 = \mathcal{Q}_3 \times \mathcal{G}_1 dt \dots\dots\dots (3.11)$$

これより

$$d\mathcal{G}_1 = (\mathcal{Q}_3 \times \mathcal{G}_1 - \mathcal{Q}_1 \times \mathcal{G}_1) dt = \mu_1 \mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1 dt \dots\dots (3.12)$$

したがって,

$$\begin{aligned} P &= \mu_1 \sqrt{(\mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1)^2} = \mu_1 \sqrt{\{(\omega + \epsilon \bar{\omega}) \times (\nu + \epsilon \bar{\nu})\}^2} \\ &= \mu_1 \sqrt{\{(w \times \nu)^2 + \epsilon \sqrt{(w_0 \times \nu)^2}\}^2} \dots\dots\dots (3.13) \end{aligned}$$

をうる. 配分媒介変数 κ は $\kappa = \partial P / \partial P$ であるから, $\kappa = \sqrt{(w_0 \times \nu)^2} / \sqrt{(w \times \nu)^2}$ となり(3.6)に一致する.

(3.7)と(3.12)より

$$\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1' / \sqrt{\mathcal{G}_1'^2} = \mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1 / \sqrt{(\mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1)^2}$$

これに微分記号 D を operate すると,

$$\begin{aligned} D\mathcal{G}_2 &= \mathcal{Q}_2 \times D\mathcal{G}_1 / \sqrt{(\mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1)^2} - \mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1 \mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1 \\ &\quad \times D\mathcal{G}_1 / \{ \sqrt{(\mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1)^2} \}^3 \dots\dots\dots (3.14) \end{aligned}$$

これに $D\mathcal{G}_1 = \mathcal{Q}_3 \times \mathcal{G}_1 dt$, $\sqrt{(\mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1)^2} = P / \mu_1$ を代入して整理をすると次式をうる.

$$\begin{aligned} D\mathcal{G}_2 &= \{ \mu_1 \mathcal{Q}_2 \times (\mathcal{Q}_3 \times \mathcal{G}_1) / P \\ &\quad - \mu_1^3 \mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1 [\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 \mathcal{G}_1] \mathcal{Q}_2 \cdot \mathcal{G}_1 / P^3 \} dt \dots\dots (3.15) \end{aligned}$$

(3.9)より

$$\begin{aligned} d_1 \mathcal{G}_2 &= D\mathcal{G}_2 + \mathcal{Q}_1 \times \mathcal{G}_2 dt \\ &= \{ \mu_1^2 \mathcal{Q}_2 \times (\mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1) / P + \mu_1 \mathcal{G}_1 \times (\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2) / P \\ &\quad - \mu_1^3 \mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1 [\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 \mathcal{G}_1] \mathcal{Q}_2 \cdot \mathcal{G}_1 / P^3 \} dt \dots\dots (3.16) \end{aligned}$$

(3.7)より

$$\begin{aligned} Q &= [\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_1' \mathcal{G}_1''] / \mathcal{G}_1'^2 \\ &= [\mathcal{G}_1 P \mathcal{G}_2 P' \mathcal{G}_2 + P \mathcal{G}_2'] / P^2 \\ &= \mu_1^2 [\mathcal{G}_1 \mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1 \mu_1 \mathcal{Q}_2 \times (\mathcal{Q}_2 \times \mathcal{G}_1) + \mathcal{G}_1 \times (\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2)] / P^2 \end{aligned}$$

これより

$$Q = \mu_1 \Omega \cdot \mathcal{G}_1 + \mu_1 \mathcal{G}_2 \cdot \Omega_1 \times \Omega_2 / P \\ = \mu_1 \Omega \cdot \mathcal{G}_1 - \mu_1 \Pi \cdot \mathcal{G}_2 / P \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

ここに $\Pi = \Omega_2 \times \Omega_1 = \pi + \epsilon \bar{\pi}$ である。(3.17) に $\Omega = (\omega + \epsilon \bar{\omega})$, $\Pi = (\pi + \epsilon \bar{\pi})$, $\mathcal{G}_1 = \nu + \epsilon \xi_0 \times \nu$, $\mathcal{G}_2 = n + \epsilon \epsilon_0 \times n$ を代入し, かつ, $w_0 = \omega \times \xi_0 + \bar{\omega}$, $q_0 = \pi \times \xi_0 + \bar{\pi}$ に着目して整理をすると,

$$Q = \mu_1 \omega \cdot \nu - [\omega_2 \omega_1 n] / \sqrt{(\omega \times \nu)^2} + \epsilon \{ \mu_1 w_0 \cdot \nu \\ + [\omega_2 \omega_1 n] \sqrt{(w_0 \times \nu)^2} / (\omega \times \nu)^2 \\ - q_0 \cdot n / \sqrt{(\omega \times \nu)^2} \} \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

をうる。P, Q なる二つの微分不変量が判明すれば, この歯面の局所的な形はわかる。

4. 斜曲面歯形のかみあい限界

n を歯面 I の外向き単位法線ベクトルとすると, 干渉がおこらぬためには,

$$n \cdot q / \mu_1 \mu_2 < 0 \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

なるを要する。この条件を満たし, かつ n 方向の分速度に対して

$$n \cdot v_1 = n \cdot v_2 > 0 \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

ならば, 歯 I が歯 II に運動を伝えることができる⁽⁶⁾。斜曲面歯形について考えれば, 接触直線に沿っては, $\mu_1 \mu_2 = \text{const.}$ であるから, $\mu_1 \mu_2 < 0$ なる接触線上においては,

$$n \cdot q > 0 \quad n \cdot v_1 > 0 \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

が要求される。 $\mu_1 \mu_2 < 0$ から $\mu_1 \mu_2 > 0$ に変化するときには, 同時にその接触線全体にわたり $n \cdot q$ の符号が変らなければ, その接触線は一つのかみあい限界である。これは $\mu_1 = 0$ または $\mu_2 = 0$ でおこる。すなわちすべり率が ∞ なる場合である。

(4.3) は $n = w \times \nu / \sqrt{(w \times \nu)^2}$ と考えれば,

$$[w \nu] > 0 \quad [v_1 v_2 \nu] > 0 \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

である。ここで

$$w = \omega \times \xi + \bar{\omega} \quad h = \omega \cdot \bar{\omega} / \omega^2 \\ q = \pi \times \xi + \bar{\pi} \quad p = \pi \cdot \bar{\pi} / \pi^2 \\ \xi = \xi_0 + s \nu$$

を代入して整理すると,

$$[w q \nu] = s^2 [\omega \pi \nu] + s \{ [\omega \times \nu q_0 \nu] + [w_0 \pi \times \nu \omega] \} \\ + [w_0 q_0 \nu] \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

となる。また

$$v_i = \omega_i \times \xi + \bar{\omega}_i \quad \omega_i \cdot \bar{\omega}_i = 0 \quad (i=1, 2)$$

によって,

$$[v_1 v_2 \nu] = s^2 [\omega_1 \omega_2 \nu] + s \{ [\omega_1 \times \nu v_{20} \nu] \\ + [v_{10} \omega_2 \times \nu \nu] \} + [v_{10} v_{20} \nu] \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

となる。

$[w q \nu] = 0$, $[v_1 v_2 \nu] = 0$ がそれぞれ相異 2 実根を持つとき, この s に対応してかみあい限界が与えられる。相異 2 実根を持たないときには, この直線上にかみあい限界はなく, 直線全体にわたって干渉圏内にあるか, 安全圏内にあるかということになる。これは (4.5) (4.6) の判別式が負であるところでおこる。2 式の判別式をそれぞれ D_1 , D_2 とすると,

$$D_1 = \{ [\omega \times \nu q_0 \nu] + [w_0 \pi \times \nu \nu] \}^2 \\ - 4 [\omega \pi \nu] [w_0 q_0 \nu] \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

$$D_2 = \{ [\omega_1 \times \nu v_{20} \nu] + [v_{10} \omega_2 \times \nu \nu] \}^2 \\ - 4 [\omega_1 \omega_2 \nu] [v_{10} v_{20} \nu] \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

したがって,

$$D_1 \leq 0 \quad D_2 \leq 0 \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

が, 接触直線上にかみあい限界の存在しない条件である。

斜曲面歯車において, 接触直線上にかみあい限界がなければ, 1 対の歯形のかみあい限界を考えるのには, 1 対のすべり線の近傍のかみあい限界だけを考慮すればよいことになる。これは直歯平歯車や直歯かさ歯車の持っている性質である。したがってこのようなスキューギヤは直歯スキューギヤと呼ぶにふさわしいものである。この場合にかみあい限界があるならば, 接触直線の全線の点が同時にかみあい限界となる場合である。これは (4.5) (4.6) が s のいかににかかわらず 0 となるところである。

(i) $[w q \nu] = 0$ の場合 これは, 平歯車やかさ歯車の圧力角 0° の場合に相当する。このときは, (4.5) の s^2, s^1, s^0 の各係数から

$$[\omega \pi \nu] = 0 \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

$$[\omega \times \nu q_0 \nu] + [w_0 \pi \times \nu \nu] = 0 \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

$$[w_0 q_0 \nu] = 0 \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

が同時に成立する。 $[w_0 \omega \nu] = 0$ であるから, $w_0 q_0$, ω , ν , π がすべて共面である。したがって

$$[\omega \pi q_0] = 0, \quad [\omega \pi w_0] = 0$$

この両式を同時に満足する ξ_0 は

$$\xi_0 = r + u \omega \times \pi / \sqrt{(\omega \times \pi)^2} \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

で表わされる。ここに r は瞬間軸と Π 軸との交点であり, u は r からの距離を示すスカラーである。したがって, 求めるかみあい限界を表わす直線は

$$\xi = r + u \omega \times \pi / \sqrt{(\omega \times \pi)^2} + s \nu \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

となる。これを (4.11) に代入すると,

$$[\omega \times \nu p \pi + u \pi \times (\omega \times \pi) / \sqrt{(\omega \times \pi)^2} \nu] \\ + [h \omega + u \omega \times (\omega \times \pi) / \sqrt{(\omega \times \pi)^2} \pi \times \nu \nu] = 0$$

これより,

$$u = (p - h) \omega \cdot \nu \nu \cdot \pi / \sqrt{(\omega \times \pi)^2} \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

$\omega \cdot \nu = \cos \alpha \sqrt{\omega^2}$ とすれば, $\pi \cdot \nu = \sin \alpha \sqrt{\pi^2}$ となり

$$u = (p - h) \sin 2\alpha / 2 \quad \dots\dots\dots (4.16)$$

をうる。これは cylindroid と呼ばれる三次の線織面である。

(ii) $[v_{10} v_{20} \nu] = 0$ の場合 (i) の場合と全く同様に (4.6) から

$$[\omega_1 \omega_2 \nu] = 0 \quad \dots\dots\dots (4.17)$$

$$[\omega_1 \times \nu v_{20} \nu] + [v_{10} \omega_2 \times \nu \nu] = 0 \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

$$[v_{10} v_{20} \nu] = 0 \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

が同時に成立するところを求めると, (4.17), (4.19) より,

$$\xi_0 = c + u \omega_1 \times \omega_2 / \sqrt{(\omega_1 \times \omega_2)^2} \quad \dots\dots\dots (4.20)$$

をうる。c は 2 軸の最短線の中点を表わす。ここで,

$i = \omega_1 \times \omega_2 / \sqrt{(\omega_1 \times \omega_2)^2}$ と $\omega_1 \cdot j / \sqrt{\omega_1^2} = \omega_2 \cdot j / \sqrt{\omega_2^2}$ なる j と, $f = i \times j$ なる三つの直交単位ベクトルを導入する. そして

$$\left. \begin{aligned} a &= n \cdot i \omega_2 \cdot f \omega_1 \cdot f / \sqrt{(\omega_1 \times \omega_2)^2} \\ b &= n \cdot i \omega_2 \cdot j \omega_1 \cdot j / \sqrt{(\omega_1 \times \omega_2)^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (4.21)$$

なる定数を用いると, (4.18) に (4.20) を代入して,

$$\begin{aligned} u &= (b-a) f \cdot j \cdot \nu \sqrt{(\omega_1 \times \omega_2)^2} / [\omega_1 \omega_2 i] \\ &= (b-a) \sin 2\gamma / 2 \dots \dots \dots (4.22) \end{aligned}$$

ここに $j \cdot \nu = \sin \gamma$ である. これも一つの cylindroid を表わす.

さて, 上述のようにして, 二つの cylindroid が導かれたが, これはまた次のように考えられる.

今 w, q を一般的なねじ速度とする. $[w q \nu] = 0$ は, $(w \times \nu) \times (q \times \nu) = 0$ と同義である. この条件を満足するような $g + s\nu$ なる直線は, これを軸とするあるねじ運動速度 f について

$$(w \times f) \times (q \times f) = 0$$

が成立しているならばよい. ねじ速度によって誘起される一次直線衆 (linear line complex) に着目すれば, この直線は, w, q の誘起する一次直線衆と束をなすねじ速度 f による一次直線衆の軸であることがわかる. このような軸は cylindroid を形成する⁽⁹⁾. このように考えれば上記の条件をみたす直線が cylindroid を形成することが明らかとなった. 最初に述べたように $\mu_1 \mu_2 > 0$ から $\mu_1 \mu_2 < 0$ に変化すれば $\mu_1 \mu_2 = 0$ なるところが干渉限界になるが, このとき接触線が $[w q \nu] = 0$ を表わす cylindroid の母線となっていると干渉をおこさない. 平面歯形の直歯平歯車 (スプライン軸) の接触点の軌跡たるリマソンが圧力角 0° の平面と交わる点が干渉限界にならないのはこの場合に相当する.

さて, この直歯スキューギヤの母線の方向がうける制約について考えてみよう. これは (4.5) および (4.6) の s^2 の係数によって (4.5) (4.6) の符号が決まるから

$$[\omega \pi \nu] \leq 0 \text{ に応じて } [\omega_1 \omega_2 \nu] \geq 0$$

が要求される. これはオフセットがないと考えたときに得られる直歯かさ歯車系における接触線の軌跡のうける制約と等しい. したがって, ω の向きの付近で連続的にかみあうためには, $\omega \times \nu = 0$ となるときがなければならない. このとき (4.7) (4.8) の判別式は

$$D_1 = [w_0 \pi \times \omega \omega]^2 \leq 0, \quad D_2 = [\omega_2 \times \nu w_0 \nu]^2 \leq 0$$

となり, $w_0 \times \omega = 0$ をうる. これは接触線が瞬間軸に一致することである. すなわち, スキューギヤにおいても直歯性の制約を与えると, 平歯車やかさ歯車のときと同じように, 接触線の軌跡が瞬間軸を通ることを要求される.

これらの議論は, 平歯車やかさ歯車においてはどうかであるだろうか.

(i) **かさ歯車** かさ歯車においては, $p=0, h=0$ であるから座標原点を 2 軸の交点に選ぶと,

$$D_1 = [\nu \nu \times (\omega \times \pi) \varepsilon_0]^2 \leq 0$$

となり, 接触線は $g = w \nu \times (\omega \times \pi)$ と交わらねばならない. また $n=0$ であるから,

$$D_2 = [\nu \nu \times (\omega_1 \times \omega_2) \varepsilon_0]^2 \leq 0$$

となり, 接触線は $g = w \nu \times \pi$ と交わらねばならない. したがって, 接触線上でかみあい限界をもたぬためには, 2 軸の交点を接触線が通過せねばならない. われわれの知っている直歯かさ歯車である.

(ii) **平歯車** 平歯車においては $\omega_1 \times \omega_2 = 0, p=\infty, h=0$ であるから

$$D_1 = [\omega \times \nu p \pi \nu]^2 \leq 0$$

すなわち, ν は ω か π に直交せねばならぬ.

また

$$D_2 = [i \times \nu k \nu]^2 \leq 0$$

すなわち, i か k に直交せねばならぬ. 常に $[v_1 v_2 \nu] = 0$ となる場合を除外すれば, ν は ω と同じ方向をむかへねばならない. これはわれわれのよく知っている直歯平歯車である.

かさ歯車および平歯車においては, $[w q \nu] = 0$ は圧力角 0° の平面を, $[v_1 v_2 \nu] = 0$ は圧力角 90° の平面を表わしている.

5. 結 言

直線が 1 対の歯形の接触線となるための条件を求め, これより, すべり率が接触線に沿って一定なものとならないものと 2 種類あることを導き, 前者は斜曲面歯形, 後者は可展面歯形をもつことを明らかにした. そして, 斜曲面歯形の配分媒介変数, 基礎微分不変量を求め, かみあい限界を明らかにした. 特にかみあい限界点が, 接触直線上にない歯車を直歯スキューギヤと呼ぶことを提案し, この場合のかみあい限界は, 接触直線全体にわたっておこり, そのような直線が cylindroid を形成することを導いた. この結果, 直歯スキューギヤの接触面は瞬間軸を通るべきことを明らかにし, 直歯かさ歯車・直歯平歯車との関連について論じた.

文 献

- (1) M. Disteli, Z. f. Math. u. Phys., Bd. 59, Heft 3, (1911).
- (2) 前田, 科学計測研究所報告, 1 巻 1 号 (昭 26-3).
- (3) 松山, 科学計測研究所報告, 1 巻 3 号 (昭 26-12).
- (4) E. Wildhaber, Am. Machinist, 90 (1946) Aug. 1,
- (5) 渡辺, 機械学会論文集, 17 巻 59 号 (昭 26).
- (6) 谷村, 機械学会論文集, 5 巻 18 号 (昭 14).
- (7) 窪田, 微分幾何学, 266 ページ (昭 15).
- (8) W. Blaschke, Vorlesungen über differentialgeometrie I, p. 196, (1924).
- (9) 窪田, 解析幾何学, 2 巻, 321 ページ (昭 24).