539.382 : 539.386 : 624.073.1

接触する二円孔をもつ無限板の応力*

宮 尾 嘉 寿**

The Stresses in a Plate of Infinite Size Having
Two Contacted Circular Holes

by Kazyu MIYAO

This paper deals with the stresses in a plate of infinite size having two contacted circular holes of equal diameter under 1) tension in all direction, 2) tension or 3) shear in the arbitrary direction. This plate was shaped with the orthogonal curvilinear coordinates used for inversion, and Airy function was determined from the edge conditions with the aid of Fourier transform and the stresses along the rim of holes were derived from it. The stress distributions under tension or shear in various directions were calculated. The maximum factor of stress concentration was 3.869 (under tension), and 4.843 (under shear).

1. 緒 論

種々の形の穴がある無限平板の応力に関しては古くから幾多の研究があることは周知のとおりである。直交曲線座標を用いた例としては極座標⁽¹⁾, 円座標⁽²⁾, 双極座標その他⁽³⁾多くのものがある。なかでも双極座標を用いたものは Jeffery⁽⁴⁾, 渡辺⁽⁵⁾, 鵜戸口氏⁽⁶⁾らの二円孔をもつ無限平板がある。また C. B. Ling 氏⁽⁷⁾は双極座標により同大二円弧にかこまれた形の穴のある無限板を解析し, その極限値として接触二円孔の場合にふれているが, これからは応力分布は計算できない。本報告は始めから接触する同大二円孔がある無限平板を円座標によってその形をあらわし, それが全方向引張り, 任意方向引張り, あるいはせん断をうける場合の応力式を導き, 数値計算により円孔周辺の応力分布を明らかにしたものである。解法の方針は Jeffery にならい曲線座標に変換された平衡方程式および周辺条件式を満たす Airy 応力関数を用いた。

2. 円座標と応力関数

表題に適する直交曲線座標として

$$x+iy=a/(\alpha+i\beta) \dots\dots\dots(1)$$

であらわされる円座標を用いる。(1) 式より次の関係式をうる。

$$x=a\alpha/(\alpha^2+\beta^2), \quad y=-a\beta/(\alpha^2+\beta^2) \dots\dots\dots(2)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(x-\frac{a}{2\alpha}\right)^2+y^2 &= \left(\frac{a}{2\alpha}\right)^2, \\ x^2+\left(y+\frac{a}{2\beta}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2\beta}\right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

すなわち α = 一定は y 軸に接する半径 $a/2\alpha$ の円, β

第 1 図

=一定は x 軸に接する半径 $a/2\beta$ の円をあらわす。 x 軸, y 軸はそれぞれ $\beta=0, \alpha=0$ となり $\alpha=\beta=\pm\infty$ はともに原点に一致する。本問題の穴は第 1 図のように $\beta=\pm\beta_1, (\beta_1>0)$ の二円によってあらわされ, xy 座標上の領域は $\alpha\beta$ 座標上の $\alpha=-\infty\sim\infty, \beta=-\beta_1\sim\beta_1$ なる α 軸に平行な無限長帯状領域に写像される。なお写像縮小率 h は

$$\frac{1}{h^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 \dots\dots\dots(4)$$

の関係より (5) 式のようになる。

$$h = (\alpha^2 + \beta^2)/a \dots\dots\dots(5)$$

いま χ を x, y 座標における Airy 応力関数とすれば応力成分は

$$\sigma_x = \partial^2 \chi / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 \chi / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \chi / \partial x \partial y \dots\dots\dots(6)$$

* 昭和 30 年 9 月 22 日 北陸地方講演会において講演, 原稿受付 昭和 31 年 4 月 19 日。

** 正員, 金沢大学工学部。

で与えられ、 χ の満たすべき微分方程式は

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

である⁽⁸⁾。これを円円座標に変換し、かつ応力関数を $h\chi$ の形にすると (6), (7) 式に相当する式はそれぞれ (8), (9) 式になる⁽⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_a &= \left\{ (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - 2\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + 2 \right\} (h\chi) \\ a\sigma_\beta &= \left\{ (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - 2\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + 2 \right\} (h\chi) \\ a\tau_{a\beta} &= -(\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (h\chi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right) (h\chi) = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

(9) 式の一般解のうち α に関する Fourier 積分の形であらわされるものは

$$\begin{aligned} h\chi &= \int_0^\infty (A\beta \sinh n\beta + B\beta \cosh n\beta + C \sinh n\beta \\ &\quad + D \cosh n\beta) \cos n\alpha dn \\ &\quad + \int_0^\infty (A'\beta \sinh n\beta + B'\beta \cosh n\beta + C' \sinh n\beta \\ &\quad + D' \cosh n\beta) \sin n\alpha dn \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

となる。ここに $A, B, C, D, A', B', C', D'$ は周辺条件によって決定される定数である。

3. 周辺条件式と解の形

β = 一定円が自由周辺であるためには、そこで $\sigma_\beta = \tau_{a\beta} = 0$ でなければならない。 $\tau_{a\beta} = 0$ を (8) 式の第3式に用いて

$$\partial(h\chi)/\partial\beta = \lambda \quad \dots\dots\dots (11)$$

をうる。これを (8) 式の第2式に入れて $\sigma_\beta = 0$ とすると

$$\left\{ (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + 2 \right\} (h\chi) = 2\beta\lambda \quad \dots\dots\dots (12)$$

をうる。これを α に関して解くと (13) 式になる。

$$h\chi = \lambda\beta + \mu(\alpha^2 - \beta^2) + \nu\alpha \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに λ, μ, ν は自由周辺の3定数である。(11), (13) 式が β = 一定周辺において $h\chi$ の満たすべき条件式であるが、 λ, μ, ν の値いかんは (8) 式よりわかるように応力に無関係であり、 $\lambda = \mu = \nu = 0$ としても解の一般性は失われないから周辺条件式を (14) 式にする。

$$\partial(h\chi)/\partial\beta = h\chi = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

さて穴のない無限板が無限遠において全方向引張り T , x 軸に θ (反時計向きを正とする) の方向の引張り T , あるいはせん断 S をうけるときの応力関数はそれぞれ *

$$\begin{aligned} \frac{h\chi}{a\delta} &= 8K \int_0^\infty \frac{e^{-2n\beta_1}}{n^3} \{ n(1+2n\beta_1) (\beta_1 \cosh n\beta - \beta \sinh n\beta) + (1+n\beta_1) \cosh n\beta - (1+n\beta) e^{n(2\beta_1-\beta)} \} \cos n\alpha dn \\ &\quad + \gamma\beta \int_0^\infty e^{-n\beta} \cos n\alpha dn + \zeta\beta \int_0^\infty e^{-n\beta} \sin n\alpha dn + \int_0^\infty (A\beta \sinh n\beta + B \cosh n\beta) \cos n\alpha dn \\ &\quad + \int_0^\infty (A'\beta \cosh n\beta + B' \sinh n\beta) \sin n\alpha dn \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} * \quad \chi_0 &= \frac{T}{2} (x^2 + y^2) \\ \chi_0 &= \frac{T}{2} (x \sin \theta - y \cos \theta)^2 \\ \chi_0 &= S(x \cos \theta + y \sin \theta)(x \sin \theta - y \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる。(15) 式を (2) 式の関係を用いて書きなおすと (16) 式になる。

$$\frac{h\chi_0}{a\delta} = \xi + \eta \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \zeta \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに δ, ξ, η, ζ は (17) 式に与える。

全方向引張りのとき

$$\delta = T, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0$$

θ 方向引張りのとき

$$\delta = T, \quad \xi = \frac{1}{2} \sin^2 \theta, \quad \eta = \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \zeta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

θ 方向せん断のとき

$$\delta = S, \quad \xi = \frac{1}{2} \sin 2\theta, \quad \eta = -\sin 2\theta, \quad \zeta = \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots (17)$$

次に穴のない無限板において穴の中心に相当する点 $(0, -a/2\beta_1)$ および $(0, a/2\beta_1)$ を圧縮の中心とする応力関数 $h\chi_2$, および全方向一様圧縮の応力関数 $h\chi_3$ は K を定数としてそれぞれ (18), (19) 式に与える。

$$\begin{aligned} h\chi_2 &= K(\alpha^2 + \beta^2) \\ &\quad \times \log \frac{\{\alpha^2 + (2\beta_1 + \beta)^2\} \{\alpha^2 + (2\beta_1 - \beta)^2\}}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$h\chi_3 = -\xi - 8K\beta_1^2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

穴をあけたための補正応力関数を (10) 式の形とし本問題に適するものとして (20) 式に与える。

$$\begin{aligned} h\chi_1 &= \int_0^\infty (A\beta \sinh n\beta + B \cosh n\beta) \cos n\alpha dn \\ &\quad + \int_0^\infty (A'\beta \cosh n\beta + B' \sinh n\beta) \sin n\alpha dn \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

以上より問題に適する応力関数を

$$h\chi = h\chi_0 + a\delta(h\chi_1 + h\chi_2 + h\chi_3) \quad \dots\dots\dots (21)$$

とすれば無限遠の条件は (22) 式になる。

$$[h\chi]_{a=\beta=0} = [h\chi_0]_{a=\beta=0} \quad \dots\dots\dots (22)$$

積分式⁽¹⁰⁾

$$\beta \int_0^\infty \frac{\cos n\alpha dn}{\alpha^2 + \beta^2} = \int_0^\infty \alpha \frac{\sin n\alpha dn}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2} e^{-n\beta}, \quad \beta > 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

を用いて (16), (18) 式を Fourier 積分形に展開すると (21) 式は

となるから (14), (24) 式より次の 2 組の方程式をうる.

$$\left. \begin{aligned} A(n\beta_1 \cosh n\beta_1 + \sinh n\beta_1) + Bn \sinh n\beta_1 &= -8K \frac{\beta_1}{n} (\sinh n\beta_1 - 2n\beta_1 e^{-n\beta_1}) e^{-2n\beta_1} - \gamma(1-n\beta_1) e^{-n\beta_1} \\ A\beta_1 \sinh n\beta_1 + B \cosh n\beta_1 &= 8K \frac{1}{n^3} \{ (1+n\beta_1) \sinh n\beta_1 - n\beta_1(1+2n\beta_1) e^{-n\beta_1} \} e^{-2n\beta_1} - \gamma\beta_1 e^{-n\beta_1} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} A'(n\beta_1 \sinh n\beta_1 + \cosh n\beta_1) + B'n \cosh n\beta_1 &= -\zeta(1-n\beta_1) e^{-n\beta_1} \\ A'\beta_1 \cosh n\beta_1 + B' \sinh n\beta_1 &= -\zeta\beta_1 e^{-n\beta_1} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

これを解いて (27) 式をうる.

$$\left. \begin{aligned} A &= -16K \frac{e^{-2n\beta_1}}{n^2} \frac{(1+2n\beta_1) \sinh^2 n\beta_1 - 2n^2\beta_1^2}{\sinh 2n\beta_1 + 2n\beta_1} + 2\gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{\cosh^2 n\beta_1}{\sinh 2n\beta_1 + 2n\beta_1} \right) \\ B &= 16K \frac{e^{-2n\beta_1}}{n^3} \frac{(1+2n\beta_1 + 2n^2\beta_1^2) \sinh^2 n\beta_1 - n^2\beta_1^2(1+2n\beta_1)}{\sinh 2n\beta_1 + 2n\beta_1} - 2\gamma \frac{n\beta_1^2}{\sinh 2n\beta_1 + 2n\beta_1} \\ A' &= -2\zeta \left(\frac{1}{2} - \frac{\sinh^2 n\beta_1}{\sinh 2n\beta_1 - 2n\beta_1} \right), \quad B' = -2\zeta \frac{n\beta_1^2}{\sinh 2n\beta_1 - 2n\beta_1} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(27) 式を (24) 式に入れると所要応力関数は

$$\begin{aligned} \frac{h\chi}{2a\delta} &= 8K(\beta_1 - \beta) \int_0^\infty \frac{1}{n^2} \frac{n\beta_1 \cosh n\beta + \sinh n\beta}{\sinh 2n\beta_1 + 2n\beta_1} \cos n\alpha dn \\ &\quad - 8K \int_0^\infty \frac{1}{n^3} \frac{n\beta \cosh n\beta_1 + \sinh n\beta_1}{\sinh 2n\beta_1 + 2n\beta_1} \sinh n(\beta_1 - \beta) \cos n\alpha dn \\ &\quad - \gamma \int_0^\infty \frac{n\beta_1(\beta_1 - \beta) \cosh n\beta - \beta \cosh n\beta_1 \sinh n(\beta_1 - \beta)}{\sinh 2n\beta_1 + 2n\beta_1} \cos n\alpha dn \\ &\quad - \zeta \int_0^\infty \frac{n\beta_1(\beta_1 - \beta) \sinh n\beta - \beta \sinh n\beta_1 \sinh n(\beta_1 - \beta)}{\sinh 2n\beta_1 - 2n\beta_1} \sin n\alpha dn \quad (28) \end{aligned}$$

となる. K を求める式は (16), (22), (28) 式より (29) 式になる.

$$16K \int_0^\infty \frac{1}{n^3} \frac{\sinh^2 n\beta_1 - n^2\beta_1^2}{\sinh 2n\beta_1 + 2n\beta_1} dn = -\xi - 2\gamma\beta_1^2 \int_0^\infty \frac{ndn}{\sinh 2n\beta_1 + 2n\beta_1} \quad (29)$$

4. 円孔周辺応力

板の任意点の応力は (28) 式を (8) 式に用いて計算できるが, この種の問題で最も注目を要する円孔周辺主応力 σ_a を求めておく. $\beta = \beta_1$ においては (14), (28) 式より $h\chi = \partial(h\chi)/\partial\alpha = \partial(h\chi)/\partial\beta = 0$ であるか *

* ら (8) 式より (30) 式をうる.

$$\frac{1}{\delta} [\sigma_a]_{\beta=\beta_1} = (\alpha^2 + \beta_1^2) \left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \left(\frac{h\chi}{a\delta} \right) \right]_{\beta=\beta_1} \quad (30)$$

これを計算すると (31) 式をうる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\delta} [\sigma_a]_{\beta_1} &= -8K(\alpha^2 + \beta_1^2) \beta_1 \int_0^\infty \frac{\sinh n\beta_1}{\sinh 2n\beta_1 + 2n\beta_1} \cos n\alpha dn \\ &\quad + \gamma(\alpha^2 + \beta_1^2) \int_0^\infty n \frac{n\beta_1 \sinh n\beta_1 - \cosh n\beta_1}{\sinh 2n\beta_1 + 2n\beta_1} \cos n\alpha dn \\ &\quad + \zeta(\alpha^2 + \beta_1^2) \int_0^\infty n \frac{n\beta_1 \cosh n\beta_1 - \sinh n\beta_1}{\sinh 2n\beta_1 - 2n\beta_1} \sin n\alpha dn \quad (31) \end{aligned}$$

円孔周辺応力分布を数値計算するにあたって $\beta_1 = 1$, $n = m$ と書くと (29), (31) 式はそれぞれ (32), (33) 式になる.

$$\begin{aligned} 16K \int_0^\infty \frac{1}{m^3} \frac{\sinh^2 m - m^2}{\sinh 2m + 2m} dm \\ = -\xi - 2\gamma \int_0^\infty \frac{mdm}{\sinh 2m + 2m} \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\delta} [\sigma_a]_{\beta_1=1} \\ = -8K(1 + \alpha^2) \int_0^\infty \frac{\sinh m}{\sinh 2m + 2m} \cos m\alpha dm \\ + \gamma(1 + \alpha^2) \int_0^\infty m \frac{m \sinh m - \cosh m}{\sinh 2m + 2m} \cos m\alpha dm \end{aligned}$$

$$+ \zeta(1 + \alpha^2) \int_0^\infty m \frac{m \cosh m - \sinh m}{\sinh 2m - 2m} \sin m\alpha dm \quad (33)$$

(32) 式より K の値を計算すると

$$K = -\frac{\xi + 0.76857\gamma}{2.9126} \quad (34)$$

となる. (33), (34) 式により全方向引張り, $\theta = 0^\circ$ より 15° ごとに 90° までの引張りあるいはせん断をうける場合の β_1 円孔周辺応力分布を計算し第 2, 3, 4 図を得た. 円孔上の点の位置は図のごとく, 円の中心角 φ° で与えた. せん断の場合 $\theta = 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ の応力分布曲線はそれぞれ $\theta = 30^\circ, 15^\circ, 0^\circ$ の曲線にお

第 1 表

θ°	φ°	$\sigma_{\max}/T$
0	0	3.869
15	15	3.843
30	30	3.785
45	45	3.658
60	60	3.483
75	75	3.164
90	90	2.569
All-around	0	2.894

第 2 表

θ°	φ°	$\sigma_{\max}/S$
0	-45	-4.729
15	-30	-4.791
30	-15	-4.824
45	0	-4.843

いて φ° の値を正負逆にしたものになるから第4図には記載しなかった。第1,2表にはそれぞれ引張りあるいはせん断における最大応力の生ずる位置 φ° と応力集中度を θ° の各値ごとに記した。

5. 結 語

以上表題の穴をもつ無限板の応力を解析し、数値計算により円孔周辺応力分布を明らかにした。その結果引張りにおいては $\theta=0^\circ$ 、すなわち二円孔の中心を結ぶ線に直角の方向に引張るとき、また、せん断においては

$\theta=45^\circ$ すなわち同線に 45° の角度のとき最大応力を生じた。前者は双極座標より導いた C.B. Ling 氏の結果に一致する。本報告は接触二円孔をもつ板ばかりでなく、近接する二円孔をもつ板にも近似的に応用できると思う。

終りに本報告は C.B. Ling, 鵜戸口氏の論文に負うところが多く、ここに厚く感謝の意をあらわす次第である。

第 2 図

第 3 図

第 4 図

文 献

- (1) たとえば 倉西, 弾性学, 366 ページ。
- (2) C.E. Inglis, *Trans. Inst. Naval Architects*, (1913). Part I, p. 219.
- (3) たとえば 浅羽, 造船協会会報, 42 号。
- (4) G.B. Jeffery, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. A. 221, 1921, p. 265.
- (5) 渡辺恵弘, 九州帝大工学集報, 6 巻 2 号, 86 ページ。
- (6) 鵜戸口, 機械学会論文集, 13 巻 44 号, 17 ページ。
- (7) C.B. Ling, *J. Appl. Physics*, Vol. 19, 1948, p. 405.
- (8) Love, *Math. Theo. Elasticity*, 1927, p. 88.
- (9) 宮尾, 金沢大学工学部紀要, 1 巻 3 号, 110 ページ。
- (10) D. Bierens, *Nouvelles Tables d' Integrales*, p. 390.