半無限体および厚板の定常熱応力*

牟 岐 鹿 楼**

Thermal Stress in a Semi-Infinite Solid and a Large Thick Plate
with Steady Distribution of Temperature

by Rokurō MUKI

This paper contains exact and general solutions for the thermal stress in a semi-infinite solid and a large thick plate with steady distribution of temperature. It is found that the stresses in the direction normal to the plane surface, that is, σ_z , $\tau_{\theta z}$ and τ_{zr} vanish everywhere in a semi-infinite solid and a plate with infinite extent when the distribution of temperature is steady. The general solution is then used to solve a particular problem of a thick plate. Numerical calculation is carried out and the result is compared with the corresponding solution for a thin plate.

1. 緒 言

三次元的に変化している温度分布によって生じる熱応力に関しては従来余り研究が行われていないようである。この種の問題に対する解は、球に対しては E. Almansi⁽¹⁾により、円筒体に対しては 栖原博士⁽²⁾, E. Melan⁽³⁾, 坪内氏⁽⁴⁾により、回転円体に対しては著者⁽⁵⁾によりそれぞれ求められている。

本報においては、熱弾性方程式の特解のハンケル変換による一般的な表現を先につりあいの方程式の一般解に用いたと同様の方法⁽⁶⁾により求め、ついでこれに基礎をおいて半無限体と無限のひろがりをもつ厚板の定常熱応力の一般解を求め、同時にその興味ある二三の特性を論じ、更に一般解を簡単な温度条件の場合に適用し、数値計算を行って弾性体内の応力状態を明らかにした。

2. 熱弾性方程式の特解

円柱座標系 (r, θ, z) を用いれば、熱弾性方程式を満足する r, θ および z 方向の変位 u, v, w および応力は次のように書かれる⁽⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad v = \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \Omega}{r \partial \theta}, \\ w &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{2\mu} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} - T \right], \\ \frac{\sigma_\theta}{2\mu} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} - T \right], \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_z}{2\mu} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - T \right], \\ \frac{\tau_{\theta z}}{2\mu} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial^2 \Omega}{r \partial \theta \partial z}, \\ \frac{\tau_{zr}}{2\mu} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z}, \\ \frac{\tau_{r\theta}}{2\mu} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{1}{r \partial \theta} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\Omega}{r} \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

ただし $\nabla^2 \Omega = T$. $\dots\dots (3)$

ここで ν はポアソン比, ε は線膨張係数, μ は横弾性係数, T は任意の温度分布 (定常または非定常), ∇^2 はラプラス演算子をそれぞれ表わすものとする。便宜上, Ω および T を次のように書きかえる。

$$\left. \begin{aligned} \Omega(r, \theta, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} [\bar{\Omega}_m(r, z, t) \cos m\theta \\ &\quad + \bar{\Omega}_m(r, z, t) \sin m\theta], \\ T(r, \theta, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} [\bar{T}_m(r, z, t) \cos m\theta \\ &\quad + \bar{T}_m(r, z, t) \sin m\theta] \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

(1), (2) の導出において、弾性方程式の慣性項は、温度変化の加速度が一般に余り大きくならないから、無視してある。したがって (1)~(4) においては、時間 t のある値に対する温度分布およびその温度分布に対する応力の式と考えることができる。

(4) において、 $\bar{\Omega}_m = \bar{T}_m = 0$ とおき、かつ m の一項についてのみ考えることにする。(4) を (3) に代入すれば

$$\nabla^2 \bar{\Omega}_m = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{\Omega}_m = \bar{T}_m, \dots\dots (5)$$

となり、さらに (5) にハンケル変換⁽⁸⁾をほどこすと次

* 昭和 30 年 9 月 8 日 第 5 回応用力学連合講演会において講演、原稿受付 昭和 31 年 2 月 14 日。

** 正員、慶応義塾大学工学部大学院。

式をうる。

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2\right)L_m = M_m \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで

$$L_m = \int_0^\infty r \Omega_m J_m(\xi r) dr, \quad M_m = \int_0^\infty r T_m J_m(\xi r) dr \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^\infty \left[\int_0^\infty \xi^2 L_m J_{m+1} d\xi - \int_0^\infty \xi^2 L_m J_{m-1} d\xi \right] \cos m\theta, \\ v &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^\infty \left[\int_0^\infty \xi^2 L_m J_{m+1} d\xi + \int_0^\infty \xi^2 L_m J_{m-1} d\xi \right] \sin m\theta, \\ w &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \sum_{m=0}^\infty \left[\int_0^\infty \xi \frac{dL_m}{dz} J_m d\xi \right] \cos m\theta, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{2\mu} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \sum_{m=0}^\infty \left[-\int_0^\infty \xi \frac{d^2 L_m}{dz^2} J_m d\xi + \frac{1}{2r} (m+1) \int_0^\infty \xi^2 L_m J_{m+1} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2r} (m-1) \int_0^\infty \xi^2 L_m J_{m-1} d\xi \right] \cos m\theta, \\ \frac{\sigma_\theta}{2\mu} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \sum_{m=0}^\infty \left[-\int_0^\infty \xi M_m J_m d\xi - \frac{1}{2r} (m+1) \int_0^\infty \xi^2 L_m J_{m+1} d\xi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2r} (m-1) \int_0^\infty \xi^2 L_m J_{m-1} d\xi \right] \cos m\theta, \\ \frac{\sigma_z}{2\mu} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \sum_{m=0}^\infty \left[\int_0^\infty \xi^3 L_m J_m d\xi \right] \cos m\theta, \\ \frac{\tau_{\theta z}}{2\mu} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^\infty \left[\int_0^\infty \xi^2 \frac{dL_m}{dz} J_{m+1} d\xi + \int_0^\infty \xi^2 \frac{dL_m}{dz} J_{m-1} d\xi \right] \sin m\theta, \\ \frac{\tau_{zr}}{2\mu} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^\infty \left[\int_0^\infty \xi^2 \frac{dL_m}{dz} J_{m+1} d\xi - \int_0^\infty \xi^2 \frac{dL_m}{dz} J_{m-1} d\xi \right] \cos m\theta, \\ \frac{\tau_{r\theta}}{2\mu} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^\infty \left[\frac{m+1}{r} \int_0^\infty \xi^2 L_m J_{m+1} d\xi - \frac{m-1}{r} \int_0^\infty \xi^2 L_m J_{m-1} d\xi \right] \sin m\theta. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ただし、 J_m は $J_m(\xi r)$ を表わすものとする。

今までは一般的な温度分布について定常、非定常に限定せずに論じてきたが、これからは弾性体内部に熱源（電磁氣的発熱等）をもたない定常温度分布の場合、すなわち $\nabla^2 T = 0$ の場合についてのみ考えることにすると、(4) から T_m は次式の解となる。

$$\nabla_m^2 T_m = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

(10) にハンケル変換をほどこし、(7) を考慮すれば

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2\right)M_m = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

(11) の一般解は

$$M_m = a_m e^{\xi z} + b_m e^{-\xi z} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\text{または } M_m = a_m \cosh \xi z + b_m \sinh \xi z \quad \dots\dots\dots(13)$$

で、 a_m 、 b_m は温度の境界条件から決定される定数である。これらの定数が決定されると、 T_m は (12) または (13) から、ハンケルの逆変換の公式を用いて次式から求められる。

$$T_m = \int_0^\infty M_m \xi J_m(\xi r) d\xi. \quad \dots\dots\dots(14)$$

さらに (6), (12), (13) を考慮すれば、 L_m は次のようになることがわかる。

$$L_m = \frac{z}{2\xi} [a_m e^{\xi z} - b_m e^{-\xi z}], \quad \dots\dots\dots(15)$$

または

以上から、弾性体内の温度分布が与えられれば、熱弾性方程式の対応する特解のハンケル変換は常微分方程式 (6) の特解として与えられることがわかる。

特解による変位および応力のハンケル変換による表現は、先につりあいの方程式の一般解に用いたと全く同様の方法⁽⁶⁾により求められるので、ここにはその結果のみを示す。

$$L_m = \frac{z}{2\xi} [a_m \sinh \xi z + b_m \cosh \xi z]. \quad \dots\dots\dots(16)$$

3. 半無限体に対する解

z 軸を表面に垂直に内部に向って取り、かつ表面の温度分布は次式で与えられていると仮定する。

$$T(r, \theta, 0) = \sum_{m=0}^\infty t_m(r) \cos m\theta \quad \dots\dots\dots(17)$$

さらに、表面は自由であるとすれば、 $z=0$ において

$$\sigma_z = \tau_{\theta z} = \tau_{zr} = 0 \quad \dots\dots\dots(18)$$

z が無限大に向えば、温度が 0 になるという条件から、(11) の解として次式をとる。

$$M_m = \int_0^\infty T_m(r, z) r J_m(\xi r) dr = b_m e^{-\xi z}. \quad \dots\dots\dots(19)$$

$z=0$ とおき、温度の境界条件 (17) を代入すれば

$$b_m = \int_0^\infty t_m(r) r J_m(\xi r) dr. \quad \dots\dots\dots(20)$$

また (15) と (19) から

$$L_m = -\frac{b_m z}{2\xi} e^{-\xi z}. \quad \dots\dots\dots(21)$$

(9) の σ_z をハンケル変換の公式を使って変換すれば

$$\int_0^\infty \left[\frac{\sigma_z}{2\mu \cos m\theta} \right] r J_m(\xi r) dr = \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \xi^2 L_m$$

$$= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon b_m \xi z}{2} e^{-\xi z},$$

また, $\tau_{\theta z}$ と τ_{zr} とを組合わせて

$$\int_0^\infty \left[\frac{\tau_{\theta z}}{2\mu \sin m\theta} + \frac{\tau_{zr}}{2\mu \cos m\theta} \right] r J_{m+1}(\xi r) dr$$

$$= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \xi \frac{dL_m}{dz} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon b_m}{2} (1-\xi z) e^{-\xi z},$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{\tau_{\theta z}}{2\mu \sin m\theta} - \frac{\tau_{zr}}{2\mu \cos m\theta} \right] r J_{m-1}(\xi r) dr$$

$$= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \xi \frac{dL_m}{dz} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon b_m}{2} (1-\xi z) e^{-\xi z}.$$

.....(22)

L_m による応力は, 弾性境界条件 (18) を満足しないから, 前報⁽⁹⁾(4) の弾性体内において有界な次の解を用いる.

$$\left. \begin{aligned} G_m(\xi, z) &= (C_m + D_m z) e^{-\xi z}, \\ H_m(\xi, z) &= F_m e^{-\xi z}. \end{aligned} \right\} \text{.....(23)}$$

L_m と同様にして, G_m, H_m による応力場のハンケル変換が前報 (7) のごとく求まり, この応力場と L_m の応力場 (22) との和が $z=0$ において 0 であるということから, 定数 C_m, D_m, F_m がきまり, G_m, H_m は次のように決定される.

$$\left. \begin{aligned} G_m &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{b_m}{2\xi^2} [-(1-2\nu) + \xi z] e^{-\xi z}, \\ H_m &= 0. \end{aligned} \right\} \text{.....(24)}$$

(21) の L_m , (24) の G_m による変位および応力成分を独立に求めて加え合わせれば, 半無限体の定常熱応力の一般解が次のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} T &= \sum_{m=0}^{\infty} I_m^{1,1}(r, z) \cos m\theta \text{.....(25)} \\ u &= (1+\nu) \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{\infty} [I_{m+1}^0 - I_{m-1}^0] \cos m\theta, \\ v &= (1+\nu) \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{\infty} [I_{m+1}^0 + I_{m-1}^0] \sin m\theta, \\ w &= -(1+\nu) \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} I_m^0 \cos m\theta \end{aligned} \right\} \text{.....(26)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{E} &= -\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{m+1}{2r} I_{m+1}^0 + \frac{m-1}{2r} I_{m-1}^0 \right] \cos m\theta, \\ \frac{\sigma_\theta}{E} &= \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left[-I_{m+1}^0 + \frac{m+1}{2r} I_{m+1}^0 + \frac{m-1}{2r} I_{m-1}^0 \right] \cos m\theta, \\ \sigma_z &= \tau_{\theta z} = \tau_{zr} = 0 \\ \frac{\tau_{r\theta}}{E} &= -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{m+1}{r} I_{m+1}^0 - \frac{m-1}{r} I_{m-1}^0 \right] \sin m\theta. \end{aligned} \right\} \text{.....(27)}$$

E は縦弾性係数.

ただし, $I_{m+q}^p(r, z) = \int_0^\infty b_m e^{-\xi z} \xi^p J_{m+q}(\xi r) d\xi \dots (28)$
で b_m は (20) で与えられる.

4. 厚板に対する解

$z = \pm d$ の 2 平面によって区切られ, 無限のひろがりをもつ厚板を考える. 表面における境界条件は温度に対しては,

$$\left. \begin{aligned} T &= \sum_{m=0}^{\infty} t_m^1(r) \cos m\theta, & z &= +d \\ T &= \sum_{m=0}^{\infty} t_m^2(r) \cos m\theta, & z &= -d \end{aligned} \right\} \text{.....(29)}$$

で, また応力に対しては, 次式で与えられるものとする.

$$\sigma_z = \tau_{\theta z} = \tau_{zr} = 0. \quad z = \pm d. \text{.....(30)}$$

また, 無限遠では支持反力等は存在せず完全に無拘束であるとする.

(11) の解として, (13) を用いれば, 半無限体に対する場合と同様にして, M_m, L_m は次のように決定される.

$$\left. \begin{aligned} M_m &= \int_0^\infty T_m(r, z) r J_m(\xi r) dr \\ &= \frac{\bar{t}_m^1 + \bar{t}_m^2}{2} \frac{\cosh \xi z}{\cosh \xi d} + \frac{\bar{t}_m^1 - \bar{t}_m^2}{2} \frac{\sinh \xi z}{\sinh \xi d}, \end{aligned} \right\} \text{.....(31)}$$

$$\left. \begin{aligned} L_m &= \frac{z}{2\xi} \left[\frac{\bar{t}_m^1 + \bar{t}_m^2}{2} \frac{\sinh \xi z}{\cosh \xi d} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{t}_m^1 - \bar{t}_m^2}{2} \frac{\cosh \xi z}{\sinh \xi d} \right], \end{aligned} \right\} \text{.....(32)}$$

ただし

$$\bar{t}_m^{1,2} = \int_0^\infty t_m^{1,2}(r) r J_m(\xi r) dr. \text{.....(33)}$$

この場合は, 前報 (4) のつりあいの方程式の一般解として次式を用いる.

$$\left. \begin{aligned} G_m &= [A_m + B_m z] \cosh \xi z + [C_m + D_m z] \sinh \xi z, \\ H_m &= E_m \cosh \xi z + F_m \sinh \xi z. \end{aligned} \right\} \text{.....(34)}$$

$A_m \sim F_m$ の定数を半無限体の場合と同様の方法で定めると, G_m, H_m は次のように求まる.

$$\left. \begin{aligned} G_m &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon}{4} (\bar{t}_m^1 + \bar{t}_m^2) \frac{\{(1-2\nu) \text{sh } \xi z + \xi z \text{ch } \xi z\}}{\xi^3 \text{ch } \xi d} \\ &\quad + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon}{4} (\bar{t}_m^1 - \bar{t}_m^2) \frac{\{(1-2\nu) \text{ch } \xi z + \xi z \text{sh } \xi z\}}{\xi^3 \text{sh } \xi d} \\ H_m &= 0. \end{aligned} \right\} \text{.....(35)}$$

以上から, 任意の定常温度分布に対する厚板の熱応力の一般解が求まるわけであるが, 任意の温度分布を $z=0$ の面に関して上下対称な場合と, 上下反対称の場合とに分けて考えることにしよう.

上下対称な場合は

$$t_m^1(r) = t_m^2(r) = t_m(r) \text{.....(36)}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} L_m &= \frac{z \bar{t}_m \sinh \xi z}{2 \xi \cosh \xi d}, \\ G_m &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon}{2 \bar{t}_m} \left\{ (1-2\nu) \frac{\sinh \xi z + \xi z \cosh \xi z}{\xi^3 \cosh \xi d} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

L_m, G_m の変位および応力場を独立に計算して加え合わせれば、この場合に対する解は次のように求められる。

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \bar{t}_m \frac{\cosh \xi z}{\cosh \xi d} \xi J_m(\xi r) d\xi \right] \cos m\theta, \dots\dots\dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= (1+\nu) \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{\infty} [u_{m+1}(r, z) - v_{m-1}(r, z)] \cos m\theta, \\ v &= (1+\nu) \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{\infty} [u_{m+1}(r, z) + v_{m-1}(r, z)] \sin m\theta, \\ w &= (1+\nu) \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \bar{t}_m \frac{\sinh \xi z}{\cosh \xi d} \right. \\ &\quad \left. \times J_m(\xi r) d\xi \right] \cos m\theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{E} &= -\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{m+1}{2r} u_{m+1} + \frac{m-1}{2r} v_{m-1} \right] \cos m\theta, \\ \frac{\sigma_\theta}{E} &= \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left[-\int_0^{\infty} \bar{t}_m \frac{\cosh \xi z}{\cosh \xi d} \xi J_m(\xi r) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{m+1}{2r} u_{m+1} + \frac{m-1}{2r} v_{m-1} \right] \cos m\theta, \\ \sigma_z &= \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0 \\ \frac{\tau_{r\theta}}{E} &= \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left[-\frac{m+1}{2r} u_{m+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m-1}{2r} v_{m-1} \right] \sin m\theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} u_{m+1} &= \int_0^{\infty} \bar{t}_m \frac{\cosh \xi z}{\cosh \xi d} J_{m+1}(\xi r) d\xi, \\ v_{m-1} &= \int_0^{\infty} \bar{t}_m \frac{\cosh \xi z}{\cosh \xi d} J_{m-1}(\xi r) d\xi, \\ \bar{t}_m &= \int_0^{\infty} t_m r J_m(\xi r) dr. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

温度分布が上下反対称である場合には、温度境界条件は

$$t_m^1(r) = -t_m^2(r) = t_m(r), \dots\dots\dots (42)$$

であり、この場合に対する解は (38)~(41) において $\text{ch} \rightarrow \text{sh}$, $\text{sh} \rightarrow \text{ch}$ $\dots\dots\dots (43)$

と書き換えれば得られる。

(27) の半無限体および (40) の厚板の定常熱応力の一般解から次の結論を導き出すことができる。

(1) 表面に直角な方向に働く応力、すなわち σ_z , $\tau_{\theta z}$, σ_{rz} は弾性体内のいたる所で消失する。

(2) 表面の応力は表面の温度分布によって完全にきまり、しかもその温度分布に対する薄板の解と完全に一致する。

(3) 無次元応力 $\sigma/\varepsilon E T_0$ の分布は温度分布によって完全にきまり、ポアソン比に関係しない。

以上の結論は、先に坪内氏⁽⁴⁾によって、特殊の温度条件下の厚肉円板に対して得られた結論と一致している。しかし、坪内氏の解においては円筒面上における弾性境界条件の満足に多少難点があるように思われるので、以上の結論が厚肉円板に対しても完全に成立つかどうかはまだ検討を要するに思う。

5. 応用例 (その1)

最初の例として温度の境界条件が次式で与えられた場合を考えよう。

$$\left. \begin{aligned} T(r, +d) &= T(r, -d) = t_0(r), \\ t_0(r) &= T_0, & r < a \\ &= 0, & r > a. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

(41) から

$$\bar{t}_0 = \int_0^{\infty} t_0 r J_m(\xi r) dr = T_0 \frac{a J_1(\xi a)}{\xi} \dots\dots\dots (45)$$

この場合は変形が上下対称であるから、(38)~(41) を用いて

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 R_0(r, z) \dots\dots\dots (46) \\ u &= (1+\nu) a \varepsilon T_0 R_1, & w &= (1+\nu) a \varepsilon T_0 R_2. \\ \frac{\sigma_r}{E} &= -\varepsilon T_0 \frac{a}{r} R_1, & \frac{\sigma_\theta}{E} &= \varepsilon T_0 \left\{ -R_0 + \frac{a}{r} R_1 \right\}, \\ v &= \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = \tau_{r\theta} = 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} R_0(r, z) &= a \int_0^{\infty} \frac{\cosh \xi z}{\cosh \xi d} J_1(\xi a) J_0(\xi r) d\xi, \\ R_1(r, z) &= \int_0^{\infty} \frac{\cosh \xi z}{\xi \cosh \xi d} J_1(\xi a) J_1(\xi r) d\xi, \\ R_2(r, z) &= \int_0^{\infty} \frac{\sinh \xi z}{\xi \cosh \xi d} J_1(\xi a) J_0(\xi r) d\xi. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

$z = \pm d$ における応力分布を求めるためには、 $R_0(r, d)$ および $R_1(r, d)$ を計算しなければならないが、それはすべて Sonine-Schafheitlin⁽¹⁰⁾ の不連続積分に帰着し、次の結果をうる。

$$\left. \begin{aligned} R_0(r, d) &= 1 & r < a \\ &= 0, & r > a \\ R_1(r, d) &= \frac{1}{2} \frac{r}{a} & r \leq a \\ &= \frac{1}{2} \frac{a}{r}, & r \geq a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

(47), (48) から、表面の応力が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{\varepsilon E T_0} &= -\frac{1}{2} & 0 \leq r \leq a \\ &= -\frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} & r \geq a \\ \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon E T_0} &= -\frac{1}{2} & 0 \leq r < a \\ &= \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2}, & r \geq a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

任意の z および r に対する積分の値は留数計算によって求められる。級数の収束は $r=a$ の近傍を除いては非常にすみやかであり、また $r=a$ においても収束の

比較的すみやかな形に書き換えることができた。計算の結果を次に示す。

$$\begin{aligned}
 R_0(r, z) &= 1 - 2 \frac{a}{d} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_1\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) I_0\left(\beta_n \frac{r}{d}\right) \cos \beta_n \frac{z}{d} & r \leq a \\
 &= \frac{1}{2} - 2 \frac{a}{d} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[K_1\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) I_0\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) - \frac{d}{2\beta_n a} \right] \cos \beta_n \frac{z}{d} & r = a \\
 &= 2 \frac{a}{d} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_1\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) K_0\left(\beta_n \frac{r}{d}\right) \cos \beta_n \frac{z}{d} & r \geq a \\
 R_1(r, z) &= \frac{1}{2} \frac{r}{a} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} K_1\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) I_1\left(\beta_n \frac{r}{d}\right) \cos \beta_n \frac{z}{d} & r \leq a \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \frac{d}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \beta_n \frac{z}{d} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[K_1\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) I_1\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) - \frac{d}{2\beta_n a} \right] \cos \beta_n \frac{z}{d} & r = a \\
 &= \frac{1}{2} \frac{a}{r} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_1\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) K_1\left(\beta_n \frac{r}{d}\right) \cos \beta_n \frac{z}{d} & r \geq a \\
 R_2(r, z) &= \frac{z}{a} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} K_1\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) I_0\left(\beta_n \frac{r}{d}\right) \sin \beta_n \frac{z}{d} & r \leq a \\
 &= \frac{1}{2} \frac{z}{a} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[K_1\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) I_0\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) - \frac{d}{2\beta_n a} \right] \sin \beta_n \frac{z}{d} & r = a \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} I_1\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) K_0\left(\beta_n \frac{r}{d}\right) \sin \beta_n \frac{z}{d} & r \geq a
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

第 1 図 $a/b=1$ の場合の σ_r の値

第 2 図 $a/d=1$ の場合の σ_θ の値

第 3 図 $a/d=1$ の場合の等温線

第 4 図 $a/d=1$ の場合の等最大せん断応力線

第 5 図 板の膨張の比較

ただし

$$\beta_n = \frac{2n+1}{2}\pi.$$

(46)(47)(51) から厚板内の任意の点における温度、変位および応力を求めることができる。数値計算は $a/d=1$ の場合に対して詳細に行った。第 1 図と第 2 図は、板の表面および内部における $\sigma_r/\epsilon ET_0$, $\sigma_\theta/\epsilon ET_0$ の変化をそれぞれに示している。等温線および等最大せん断応力線は第 3 図および第 4 図にそれぞれ示してある。第 4 図には表面の $r=a$ の点における応力の集中を示している。第 5 図には、板の $r=0$ の点における熱膨張が、板の厚さと加熱部分の半径の比に対して置点されている。鎖線は板全体が $T^\circ\text{C}$ に熱せられた場合の熱膨張（すなわち $d\epsilon T_0$ ）で、図では ν に対して置点してある。 $r=0$ における熱膨張は ν のある値に対して d/a のある範囲では、部分的に加熱した場合

$$\frac{w'}{(1+\nu)a\epsilon T_0} = \frac{1}{(1+\nu)a\epsilon T_0} \left[\int_0^r \frac{\partial w}{\partial r} dr + w(0, z) - w(0, 0) \right] = \int_0^r \frac{\partial S_2}{\partial r} dr + [S_2(0, z) - S_2(0, 0)] = S_2'(r, z). \quad (57)$$

計算の結果を次に与える。

$$\left. \begin{aligned} S_0(r, z) &= \frac{z}{d} + \frac{2a}{d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_1\left(n\pi \frac{a}{d}\right) I_0\left(n\pi \frac{r}{d}\right) \sin n\pi \frac{z}{d} & r \leq a \\ &= \frac{z}{2d} + \frac{2a}{d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[K_1 I_0 - \frac{d}{2n\pi a} \right] \sin n\pi \frac{z}{d} & r = a \\ &= -\frac{2a}{d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_1\left(n\pi \frac{a}{d}\right) K_0\left(n\pi \frac{r}{d}\right) \sin n\pi \frac{z}{d} & r \geq a \\ S_1(r, z) &= \frac{1}{2} \frac{zr}{ad} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} K_1\left(n\pi \frac{a}{d}\right) I_1\left(n\pi \frac{r}{d}\right) \sin n\pi \frac{z}{d} & r \leq a \\ &= \frac{1}{2} \frac{z}{d} + \frac{d}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin n\pi \frac{z}{d} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left[K_1 I_1 - \frac{d}{2n\pi a} \right] \sin n\pi \frac{z}{d} & r = a \\ &= \frac{1}{2} \frac{za}{dr} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} I_1\left(n\pi \frac{a}{d}\right) K_1\left(n\pi \frac{r}{d}\right) \sin n\pi \frac{z}{d}, & r \geq a \\ S_2'(r, z) &= \frac{1}{2} \frac{z^2}{ad} - \frac{1}{4} \frac{r^2}{ad} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} K_1\left(n\pi \frac{a}{d}\right) \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} K_1\left(n\pi \frac{a}{d}\right) I_0\left(n\pi \frac{r}{d}\right) \cos n\pi \frac{z}{d} & r \leq a \\ &= \frac{1}{4} \frac{z^2}{ad} + \frac{1}{12} \frac{d}{a} - \frac{1}{4} \frac{a}{d} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} K_1\left(n\pi \frac{a}{d}\right) \end{aligned} \right\}$$

の方が、全体を加熱した場合よりも大きくなるのは興味深い。

6. 応用例 (その 2)

第二例として次のような温度条件の場合を考えよう

$$T(r, d) = -T(r, -d) = t_0(r) \quad (52)$$

この場合の変形は上下反対称であるが、前例と同様にして

$$T = T_0 S_0(r, z) \quad (53)$$

$$u = (1+\nu)a\epsilon T_0 S_1, \quad w = (1+\nu)a\epsilon T_0 S_2.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{E} &= -\epsilon T_0 \frac{a}{r} S_1, & \frac{\sigma_\theta}{E} &= \epsilon T_0 \left\{ -S_0 + \frac{a}{r} S_1 \right\} \\ v &= \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} S_0(r, z) &= a \int_0^\infty \frac{\sinh \xi z}{\sinh \xi d} J_1(\xi a) J_0(\xi r) d\xi, \\ S_1(r, z) &= \int_0^\infty \frac{\cosh \xi z}{\xi \sinh \xi d} J_1(\xi a) J_1(\xi r) d\xi, \\ S_2(r, z) &= \int_0^\infty \frac{\cosh \xi z}{\xi \sinh \xi d} J_1(\xi a) J_0(\xi r) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

z 方向の応力がすべて 0 となることから、上の解を次の境界条件を満足する解とみなすこともできる。

$$\left. \begin{aligned} T(r, d) &= t_0(r), & T(r, 0) &= 0, \\ \sigma_z = \tau_{rz} &= 0, & z &= d \text{ および } z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

表面の応力は前例と全く同様であるから省略する。積分 S_0, S_1 は前例と同様の方法で r, z の任意の値に対して計算できるが、積分 S_2 は発散である。 S_2 の物理的意味を考えて、次の計算可能な積分を導入する。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[K_1 I_0 - \frac{1}{2n\pi} \frac{d}{a} \right] \cos n\pi \frac{z}{d} & r=a \\
 & = -\frac{1}{4} \frac{a}{d} + \frac{1}{6} \frac{d}{a} - \frac{1}{2} \frac{a}{d} \log \frac{r}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} K_1 \left(n\pi \frac{a}{d} \right) \\
 & -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} I_1 \left(n\pi \frac{a}{d} \right) K_0 \left(n\pi \frac{r}{d} \right) \cos n\pi \frac{z}{d} & r \geq a
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

第 6 図 $a/d=1$ の場合の σ_r の値
(鎖線は薄板に対する解)

第 7 図 $a/d=1$ の場合の σ_θ の値
(鎖線は薄板に対する解)

第 8 図 $a/d=1$ の場合の等温線

第 9 図 $a/d=1$ の場合の等最大せん断応力線

第 6 図および第 7 図には、 $\sigma_r/\varepsilon ET_0$ および $\sigma_\theta/\varepsilon ET_0$ の変化を示す。鎖線は薄板に対する解⁽¹¹⁾ から計算した応力であり、表面では厚板に対する解と一致し、内部ではそれよりも高い値を与えていることがわかる。等温線および等最大せん断応力線はそれぞれ第 9 図および第 10 図に示してある。

7. 結 言

半無限体および無限のひろがりをもつ厚板の定常熱応力の一般解を求め、次の結果を得た。

(1) 表面に直角な方向に働く応力、すなわち σ_z , $\tau_{\theta z}$, τ_{zr} は弾性体内のいたる所で消失する。

(2) 表面の応力は表面の温度分布によって完全にきまり、しかもその温度分布に対する薄板の解と完全に一致する*。

* この結果の厳密な証明は紙面の都合上省略する。

(3) 無次元応力 $\sigma/\varepsilon ET_0$ の分布は温度分布によって完全にきまり、ポアソン比に関係しない。

最後に、御指導と御

鞭撻を頂いた 栖原教授 第 10 図 積分路
授、御助言と御批判を頂いた千葉工業大学宮本助教授
に厚く御礼申しあげる。また製図作製に協力された鈴木
木とよ嬢に感謝する。なお、本研究は文部省助成研究
費の補助を受けたものであることを付記して感謝の意
を表する。

付 録

1. 無限積分 R_0 の計算 $r \leq a$ に対しては、次の積分を第 10 図のごとき積分路⁽¹²⁾の上で考えれば、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\cosh wz}{\cosh wd} H_1^{(1)}(wa) J_0(wr) dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^R \frac{\cosh \xi z}{\cosh \xi d} \{H_1^{(1)}(a\xi) \right. \\
&\quad \left. + H_1^{(1)}(a\xi e^{\pi i})\} J_0(\xi r) d\xi \right. \\
&\quad \left. - i \int_0^\pi \frac{\cosh \varepsilon z e^{i\theta}}{\cosh \varepsilon d e^{i\theta}} H_1^{(1)}(\varepsilon a e^{i\theta}) J_0(\varepsilon r e^{i\theta}) \varepsilon e^{i\theta} d\theta \right] \\
&= \frac{1}{\pi i} \left[\int_0^\infty \frac{\cosh \xi z}{\cosh \xi d} J_1(\xi a) J_0(\xi r) d\xi - \frac{1}{a} \right] \\
&= \text{極 } wd = \frac{2n+1}{2} \pi i \text{ における留数の和} \dots (59)
\end{aligned}$$

留数を計算すれば、無限積分 R_0 は (51) に示されたように求めることができる。

$r=a$ に対しては、 x の大きい値に対して成立つ

$$K_n(x) I_n(x) \doteq \frac{1}{2x}, \dots (60)$$

の関係を使って $r \leq a$ の解から

$$\begin{aligned}
R_0(a, z) &= 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \beta_n \frac{z}{d} \\
&\quad - 2 \frac{a}{d} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[I_0\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) K_1\left(\beta_n \frac{a}{d}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a}{2\beta_n d} \right] \cos \beta_n \frac{z}{d}, \dots (61)
\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \beta_n \frac{z}{d} = \frac{\pi}{4}, \quad -1 < \frac{z}{d} < 1 \dots (62)$$

の関係を用いれば (51) に示されたような収束の早い表現をうることができる。

$r \geq a$ に対しては、次の積分を考えればよい。

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\cosh \omega z}{\cosh \omega d} J_1(\omega a) H_0^{(1)}(\omega r) d\omega, \dots (63)$$

他の積分 R_1, R_2, S_0, S_1 も同様な方法で計算することができる。

$$2. \text{ 無限積分 } S_2' = \int_0^r \frac{\partial S_2}{\partial r} dr + [S_2(0, z) - S_2(0, 0)]$$

の計算 積分 $\partial S_2 / \partial r, S_2(0, z) - S_2(0, 0)$ は、 R_0 と同様な方法で計算できる。このようにして得られた

$\partial S_2 / \partial r$ を r に関して積分することは容易である。

特に $r \geq a$ に対しては、次の結果をうる。

$$\begin{aligned}
S_2' &= \frac{1}{2} \frac{z^2}{ad} - \frac{1}{4} \frac{a}{d} - \frac{1}{2} \frac{a}{d} \log \frac{r}{a} \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} K_1\left(n\pi \frac{a}{d}\right) \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} I_1\left(n\pi \frac{a}{d}\right) K_0\left(n\pi \frac{r}{d}\right) \cos n\pi \frac{z}{d} \\
&\quad - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} [I_0 K_1 + I_1 K_0] \cos n\pi \frac{z}{d} \dots (64)
\end{aligned}$$

上式は、次の公式を用いれば (58) に示されたようなより簡潔な形にすることができる。

$$\left. \begin{aligned}
I_{\nu-1}(x) K_{\nu}(x) + I_{\nu}(x) K_{\nu-1}(x) &= \frac{1}{x} = \frac{d}{n\pi a}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi \frac{z}{d} &= \frac{\pi^2}{4} \left[\left(\frac{z}{d} \right)^2 - \frac{1}{3} \right], \\
-1 &\leq \frac{z}{d} \leq 1, \dots (65)
\end{aligned} \right\}$$

文 献

- (1) S. Timoshenko & J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2nd ed. p. 433 (1951).
- (2) 梶原豊太郎, 昭和 26 年 11 月 19 日 長崎大卒田臨時大会講演会において講演。
- (3) E. Melan & H. Parkus, *Wärmespannungen*, (1953).
- (4) 坪内, 機械学会論文集, 19 巻 83 号, 35 ページ (昭 28).
- (5) 筆者, 慶大工学部紀要, 6 巻 20 号, 10 ページ (昭 28).
- (6) 筆者, 機械学会論文集, 21 巻 111 号, 767 ページ (昭 30).
- (7) 文献 (1) p. 433. Timoshenko の本にある表現とは、便宜上導入された係数 $\frac{1+\nu}{1-\nu}$ だけ異なっている。
- (8) I.N. Sneddon, *Fourier Transforms*, p. 48 (1951).
- (9) 筆者, 機械学会論文集, 22 巻 119 号, 468 ページ (昭 31). 以下この論文を前報として言及する。つりあい方程式の一般解のハンケル変換による表現は前報 (1)~(4) を見られたい。
- (10) G.N. Watson, *The Theory of Bessel Functions*, p. 398 (1922).
- (11) J.E. Goldberg, *J. Appl. Mech.*, Vol. 22, p. 257 (1953).
- (12) 文献 (10) p. 423.