似性」の法則⁽¹¹⁾がだ円孔問題にも成立つことが確かめられたわけである。

5. 結 言

だ円孔を有する半無限板の引張問題を Cartesian 座標系によって取扱ひ、摂動法を用いて、応力、合力および形状係数に対する公式を級数の形で求め、数値結果を与えた。

この公式は与えられた穴の形状に対していちいちめんどろな逐次近似計算を要する Howland 流の解法よりすぐれているが、その反面、級数を有限項で打ち切ることによって生ずる誤差の程度を調べる便利な方法がわかっていないという欠点がある。しかし今の問題では円孔という特別な場合についての厳密解との比較などから、穴の最大直径が、その中心から直線縁までの距離より大きくない限り、公式は十分正確な数値を与えると推論することができた。

また帯板問題において筆者が「応力等差法則」として提唱した近似法則は今の問題でもよくあてはまり、その近似度は帯板の場合よりいっそう良好であることがわかった。そしてこの近似法則がだ円孔問題、また帯板と半無限板の場合だけに成立つという理由もなさそうなので、他の形の穴や外部境界にも拡張して用いるならば、未だ解決されていない多くの複連結領域問

題における応力の近似値が得られることとなる。

この研究は東京大学、森口繁一博士の御懇切な御指導のもとに行つたものであり、特に摂動法は同先生が円孔問題について、その有用さを指摘されたので、この問題にも応用した次第である。また数値計算の検討にあたっては、しばしば東京大学、鶴戸口英善教授の御論文を参照させていただいた。ここに両先生に衷心から感謝の意を表する。さらに資料の整理や図表の作製に協力された当大学の酒井博司氏に対しても深謝する。

文 献

- (1) G.B. Jeffery, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, Vol. 221, p. 265 (1921).
- (2) 筆者, 機械学会論文集, 21 巻 107 号, 507 ページ (昭 30).
- (3) H. Neuber, *Kerbspannungslehre*, s. 49, (1937).
- (4) 筆者, 徳島大学工学部研究報告, 6 号, 121 ページ (昭 30).
- (5) 鶴戸口, 機械学会論文集, 15 巻 50 号, I-78 ページ (昭 24); 式 (4) において $\beta = \pi$, $\cosh \alpha_1 = 1/\lambda$ とおく。
- (6) 同上, I-78 ページ; 式 (5) において $\beta = \pi$, $\cosh \alpha_1 = 1/\lambda$ とおく。
- (7) 同上, I-79 ページ; 式 (15) の前半は本論文の式 (20) と同等である。
- (8) 同上, I-80 ページ, 第 1 表。
- (9) 森口, 機械学会誌, 51 巻 353 号, 63 ページ (昭 23).
- (10) たとえば R.C.J. Howland, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, Vol. 229, p. 49 (1930).
- (11) 鶴戸口, 機械学会論文集, 15 巻 50 号, I-76/97 ページ (昭 24).

539.382.3 : 624.073.11

だ円孔を有する帯板の面内の曲げ*

石 田 誠**

On the In-plate Bending of a Strip with a Central Elliptical Hole

by Makoto ISIDA

The author has published a research on the tension problem of a strip with a central elliptical hole by the method of perturbation. In this paper the in-plate bending is treated by the same method, formulas for the stresses are given and the numerical results are examined. The approximate law on the maximum stress found by the author in the tension problem is shown to be valid also in this case.

1. 理 論 概 説

さきに筆者はだ円孔を有する帯板の引張問題を解析したが⁽¹⁾, この論文では同様な方法によって、面内の曲げの問題を取扱う。

板と穴の形状を表わす記号を第 1 図と式 (1) のよう

に定めよう。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= a/h, \quad \lambda_1 = b/h \\ \epsilon &= 1 - (b/a), \quad e = 1 - (b^2/a^2) = \epsilon(2 - \epsilon) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

応力関数を複素関数表示⁽²⁾

$$F = \frac{Tx^3}{6h} + Th^2 R_0 \left[\frac{\bar{z}}{h} \phi \left(\frac{z}{h} \right) + \psi \left(\frac{z}{h} \right) \right]$$

によって定義し、 $\phi(z/h)$, $\psi(z/h)$ に対して Laurent 展開

* 昭和 23 年 11 月 14 日 機械学会, 応用力学会連合講演会において講演, 原稿受付 昭和 31 年 5 月 18 日。

** 正員, 徳島大学工学部。

第 1 図

$$\phi\left(\frac{z}{h}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F_{2n+1} \left(\frac{z}{h}\right)^{-(2n+2)} + M_{2n+1} \left(\frac{z}{h}\right)^{2n+2} \right\}$$

$$\psi\left(\frac{z}{h}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ D_{2n+1} \left(\frac{z}{h}\right)^{-(2n+1)} + K_{2n+1} \left(\frac{z}{h}\right)^{2n+1} \right\}$$

から出発する。

直線縁の境界条件としては Howland の与えた形⁽³⁾

$$K_{2n+1} = - \sum_{p=0}^{\infty} (\alpha_{2p+1}^{2n+1} D_{2p+1} + \beta_{2p+1}^{2n+1} F_{2p+1})$$

$$M_{2n+1} = \sum_{p=0}^{\infty} (\gamma_{2p+1}^{2n+1} D_{2p+1} + \delta_{2p+1}^{2n+1} F_{2p+1})$$

(ここに α_{2p+1}^{2n+1} 等は定数)

を用い、だ円縁の境界条件としては、筆者の与えた結果⁽⁸⁾

$$D_{2n+1} = \frac{(e\lambda^2)^{n+2}}{24} (a_1^{2n+1} + 3b_1^{2n+1})$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} (e\lambda^2)^{n+p+2} (a_{2p+1}^{2n+1} K_{2p+1} + b_{2p+1}^{2n+1} M_{2p+1})$$

$$F_{2n+1} = - \frac{(e\lambda^2)^{n+2}}{24} (c_1^{2n+1} + 3d_1^{2n+1})$$

$$- \sum_{p=0}^{\infty} (e\lambda^2)^{n+p+2} (c_{2p+1}^{2n+1} K_{2p+1} + d_{2p+1}^{2n+1} M_{2p+1})$$

(ここに a_{2p+1}^{2n+1} 等は ε の関数)

を利用する。各展開係数を λ のべき級数で表わし、摂動法によって境界条件式を連立に解いて展開係数を逐次定めていく。その結果、得られる応力式は無限二重級数となるが、筆者はこれを一重級数にまとめる方法を考案した。かくして応力の公式が ε の関数を係数とする λ のべき級数の形で得られるので、これを λ^7 の項まで求めた。公式の使用可能範囲は穴の形については何ら制限はないが、摂動法を用いた以上穴の大きさに対する制限は止むを得ない。しかし、だいたい $a, b \leq 0.5h$ という相当広い範囲で、実用上十分正確な値を与えると推定される。

紙面の都合上、理論についてこれ以上の記述は許されないが、詳細な誘導法等はだいたい引張りの場合⁽¹⁾と同様なので、これを御参照願うこととして、以下には得られた応力公式と数値結果を記すこととする。

2. だ円縁の応力

(1) 応力分布式 だ円縁に生ずる接線応力は次式で与えられる。

$$\sigma_{\theta}/T = A_1\lambda + A_3\lambda^3 + A_7\lambda^7$$

$$A_1 = Z + G_3$$

$$A_3 = (0.0908 + 0.6737\varepsilon - 0.3595\varepsilon^2)Z \\ + (2-\varepsilon)(1.5073 - 2.5523 + 1.8155\varepsilon^2 \\ - 0.2084\varepsilon^3)G_3$$

$$A_7 = (2-\varepsilon)^2(0.1808 - 0.2361\varepsilon + 0.2084\varepsilon^2)Z \\ + (2-\varepsilon)(-0.4722 + 0.4169\varepsilon)Z_3 \\ + (2-\varepsilon)^2(-2.0685\varepsilon^{-1} + 5.2819 - 3.5049\varepsilon \\ - 1.0798\varepsilon^2 + 1.9416\varepsilon^3 - 0.4831\varepsilon^4)G_3 \\ + (2-\varepsilon)(4.1370\varepsilon^{-1} - 12.814 + 16.009\varepsilon \\ - 9.9635\varepsilon^2 + 3.0120\varepsilon^3 - 0.3220\varepsilon^4)G_5$$

.....(2)

ここに

$$G_3 = \pm(1-\varepsilon)\sqrt{P}\{-3+\varepsilon+(1-\varepsilon)^3(2-\varepsilon)^2Q\}$$

$$G_5 = \pm(1-\varepsilon)\sqrt{P}\{-3+5\varepsilon-\varepsilon^2+4(1-\varepsilon)^2P \\ + (1-\varepsilon)^3(2-\varepsilon)^3Q\}$$

$$Z = \pm(1-\varepsilon)\sqrt{P}$$

$$Z_3 = \pm(1-\varepsilon)^3\sqrt{P}\{-3+(4-6\varepsilon+3\varepsilon^2)P\}$$

.....(3)

しかして

$$P = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2 + \tan^2\theta} = \frac{x^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$Q = \frac{1}{(1-\varepsilon)^4 + \tan^2\theta} = \frac{x^2}{b^2} \left/ \left\{ 1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{x^2}{a^2} \right\} \right. \\ = \left\{ \frac{a^4}{b^4} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \right\} \left/ \left\{ 1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{y^2}{b^2} \right\} \right.$$

.....(4)

P, Q の第二、第三の表示は特に $a \gg b, a \ll b$ の場合に便利である。また、複号はそれぞれ $|\theta| \leq \pi/2, \pi/2 \leq |\theta| \leq \pi$ に対応する。

(2) において λT を一定に保ちつつ $\lambda \rightarrow 0$ とした極限はだ円孔を有する無限板の曲げの結果と一致すべきものである。今、関係式 $1-\varepsilon = \tanh u_0$,

$\tan \theta = \tanh u_0 \cot v$ を用いて $x = \cosh u \sin v$,

$y = \sinh u \cos v$ で定義されるだ円座標に書き直すと

$$\frac{\sigma_{\theta}}{\lambda T} = \frac{e^{u_0}}{4(\sinh^2 u_0 + \cos^2 v)} \{ (2 \sinh u_0 - e^{-u_0}) \sin v \\ - e^{u_0} \sin 3v \} \quad \text{.....(5)}$$

となり、これはだ円座標による周知の解⁽⁹⁾に外ならない。

特に円孔の場合は(2)において $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えればよい。しかし、この特殊場合についてはさらに高次項まで計算した結果、より正確な次の公式をうる。

$$\sigma_{\theta}/T = (\cos \theta + \cos 3\theta)\lambda + (0.0908 \cos \theta \\ + 3.0145 \cos 3\theta)\lambda^3 + (0.7231 \cos \theta \\ - 5.4453 \cos 3\theta + 4.1370 \cos 5\theta)\lambda^7 \\ + (-1.961 \cos \theta + 14.467 \cos 3\theta - 8.533 \cos 5\theta \\ + 3.117 \cos 7\theta)\lambda^9 + (5.765 \cos \theta - 36.673 \cos 3\theta \\ + 19.151 \cos 5\theta - 7.390 \cos 7\theta + 1.755 \cos 9\theta)\lambda^{11} \\ + (-15.11 \cos \theta + 101.32 \cos 3\theta - 49.88 \cos 5\theta \\ + 14.85 \cos 7\theta - 4.75 \cos 9\theta + 0.83 \cos 11\theta)\lambda^{13} \\ \text{.....(6)}$$

(2) 最大応力 最大応力 σ_A は $\theta=0$ に生ずるから (2)~(4) に $\theta=0$ とおいて次式をうる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A/T &= A_1\lambda + A_5\lambda^5 + A_7\lambda^7 \\ A_1 &= 1 + a/b \\ A_5 &= 3.1054 - 2.9237\varepsilon + 2.2263\varepsilon^2 + 0.0454\varepsilon^3 \\ &\quad + 0.4079\varepsilon^4 a/b \\ A_7 &= -0.5853 + 6.8914\varepsilon - 12.159\varepsilon^2 + 9.7975\varepsilon^3 \\ &\quad - 3.3588\varepsilon^4 + 0.6287\varepsilon^5 + 0.1456\varepsilon^6 a/b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

また, これは (1) を用いて次の形にも書ける.

$$\begin{aligned} \sigma_A/T &= (\lambda + 0.4079\lambda^5 + 0.1456\lambda^7) \frac{a}{b} + \lambda \\ &\quad + (0.8218\lambda^5 + 0.7823\lambda^4\lambda_1 + 0.7309\lambda^3\lambda_1^2 \\ &\quad + 0.3625\lambda^2\lambda_1^3) + (0.3411\lambda^7 + 0.5096\lambda^6\lambda_1 \\ &\quad + 0.4554\lambda^5\lambda_1^2 - 0.4648\lambda^4\lambda_1^3 + 1.0891\lambda^3\lambda_1^4 \\ &\quad - 0.4831\lambda^2\lambda_1^5) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

円孔の場合は $b=a$, $\lambda_1=\lambda$ とおいて

$$\sigma_A/T = 2\lambda + 3.1054\lambda^5 - 0.5853\lambda^7 \dots\dots\dots (9)$$

となるが (6) は次のさらに正確な式を与える.

$$\begin{aligned} \sigma_A/T &= 2\lambda + 3.1054\lambda^5 - 0.5853\lambda^7 + 7.090\lambda^9 \\ &\quad - 17.392\lambda^{11} + 47.26\lambda^{13} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$ab \gg b$ の場合も (7) か (8) から求めるのが最も厳密

であるが, または (8) に $\lambda_1=0$ と置いてうる次の近似式を用いてもよい.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_A}{T} &= (\lambda + 0.4079\lambda^5 + 0.1456\lambda^7) \frac{a}{b} + \lambda + 0.8218\lambda^5 \\ &\quad + 0.3411\lambda^7 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

穴が非常に細長ければ上式の後半も省略してよい. この式は $a/b \rightarrow \infty$ の極限の場合の式に相当し, a/b が小さいほど, また λ が大きいほど精度が落ちるわけである. しかし, 予想以上に広い範囲で良い近似値を与え, たとえば $\lambda=0.5$, $a/b=3$ の場合でも (11) による結果は正確な式 (8) によるものと 0.6% しか違わないのである.

3. 直線縁の応力

応力分布式は

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{T} &= 1 + \frac{(2-\varepsilon)}{8} \{ (2+\varepsilon)S_1 + (2-\varepsilon)R_1 \} \lambda^4 \\ &\quad + \frac{(2-\varepsilon)^2}{48} \{ (4-2\varepsilon+3\varepsilon^2)S_3 + 3\varepsilon(2-\varepsilon)R_3 \} \lambda^6 \\ &\quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

S_1, S_3, R_1, R_3 の $y/h=0 \sim 1.0$ に対する値を第 1 表に示す.

第 1 表

y/h	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
S_1	2.8176	2.6964	2.3659	1.9089	1.4211	0.9782	0.6211	0.3594	0.1813	0.0726	0.0097
S_3	12.413	10.686	6.3786	1.4412	-2.3987	-4.4264	-4.8507	-4.2869	-3.3246	-2.3458	-1.5330
R_1	-5.9953	-5.1804	-3.0858	-0.5318	1.6723	3.0765	3.6354	3.5525	3.0986	2.5014	1.9073
R_3	-19.962	-14.909	-3.3567	7.3579	12.334	11.484	7.9402	3.2452	0.0596	-1.7192	-2.3891

直線縁の最大応力 σ_B は最小断面から少し離れた点 B に生じ, その値は応力分布曲線から図式に求めなければならない.

特に最小断面 $y=0$ において応力は極小値をとり, それは次式によって与えられる.

$$\begin{aligned} \sigma_{y,0}/T &= 1 + (2-\varepsilon)(-0.7944 + 1.1016\varepsilon)\lambda^4 \\ &\quad + (2-\varepsilon)^2(1.0344 - 3.0125\varepsilon + 2.0234\varepsilon^2)\lambda^6 \\ &= 1 + (0.3072\lambda^4 - 0.7944\lambda^4\lambda_1 - 1.1016\lambda^2\lambda_1^2 \\ &\quad + (0.0454\lambda^6 - 0.9837\lambda^5\lambda_1 + 0.0400\lambda^4\lambda_1^2 \\ &\quad + 3.0125\lambda^3\lambda_1^3 + 2.0234\lambda^2\lambda_1^4) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$\varepsilon=0$, $\lambda_1=\lambda$ とおけば円孔の場合の式

$$\sigma_{y,0}/T = 1 - 1.5888\lambda^4 + 4.1376\lambda^6 \dots\dots\dots (14)$$

が得られるが, さらに高次項まで求めた結果は

$$\begin{aligned} \sigma_{y,0}/T &= 1 - 1.5888\lambda^4 + 4.1376\lambda^6 - 2.2271\lambda^8 \\ &\quad + 6.7459\lambda^{10} - 1.5380\lambda^{12} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

また, 板幅方向のき裂の場合は (13) に $\lambda_1=0$ と置いて

$$\sigma_{y,0}/T = 1 + 0.3072\lambda^4 + 0.0454\lambda^6 \dots\dots\dots (16)$$

4. 形状係数

曲げ問題では穴の大小によって最大応力は孔縁に生

じたり, 直線縁に生じたりするので, 形状係数も孔縁最大応力 σ_A と直線縁最大応力 σ_B の両方について考える必要がある. 形状係数を定義するための見掛け応力 σ_n として, 最小断面にはり理論を適用して得られる最小断面直線縁の応力をとれば,

$$\sigma_n = \frac{Mh}{I} = \frac{2Th^3/3}{2(h^3-a^3)/3} = \frac{T}{1-\lambda^3} \dots\dots\dots (17)$$

となるから, だ円縁, 直線縁の応力に対応する形状係数はそれぞれ

$$\alpha_A = (1-\lambda^3) \frac{\sigma_A}{T}, \quad \alpha_B = (1-\lambda^3) \frac{\sigma_B}{T} \dots\dots\dots (18)$$

として計算される.

5. 数値計算結果

以上の諸公式は応力の $\lambda=0$, $\lambda_1=0$ の近傍における Taylor 展開の最初の数項を求めたものに相当する. これらの式は穴の形と大きさの各場合に対していちいちめんどろな逐次近似計算を必要とする Howland 流の解法よりはるかに便利である. また, 労力さえかければいくらでも高次の項が計算されるが, いずれにしても一般項は求められず有限項で打切ることになる. この有限項で打切ることの意味は引張問題⁽¹⁾で述べた

と同様である。すなわちだ円縁応力の諸式はだ円縁の境界条件が完全に満足され、直線縁にわずかに乱応力が存在する場合の解に相当し、直線縁応力の式は逆に直線縁は完全に自由であるが、だ円縁にかく乱が存在する場合の結果なのである。この意味で求めた諸公式は λ が大きくない場合の近似式と言えるが、今のところこれらの取れん性や誤差についての理論を欠くという難点がある。しかし今の問題では円孔の場合について Howland の結果との比較などから、応力式の正確さについてある程度の推定が出来るので、以下の議論でこの点にも触れることとする。

(1) **だ円縁の最大応力** 応力式 (7) 中の係数 A_n の a/b に対する変化の状態を第2図に示す。 A_1 は直線、 A_5, A_7 は $a/b \rightarrow 0$ において発散する曲線である。これらは引張りの場合と同様に、次数が高いものほど a/b の変化に対する変動が緩慢なことがわかる。

第2図

第3図

第2表と第3図は $\sigma_A / \lambda T$ の値を示し、応力集中の大きい $a > b$ の場合を特に詳細に求めておいた。

これは孔縁の最大応力が無限遠の対応位置における応力の何倍になるかを示す数値であって、Howland は円孔の場合、 λ の広い範囲にわたって、この値がほとんど2に等しいことを示したが⁽⁴⁾、本論文によって一般にだ円孔の場合にこれがほぼ $1 + (a/b)$ に等し

第2表 $\sigma_A / \lambda T$

a/b	$\lambda=0$	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.3$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.5$
0	1	1	1	1	1	1
0.2	1.2	1.205	—	—	—	—
0.4	1.4	1.401	1.415	—	—	—
0.6	1.6	1.601	1.609	1.639	—	—
0.8	1.8	1.800	1.806	1.830	1.89	—
1.0	2.0	2.000	2.005	2.025	2.077	2.18
1.2	2.2	2.200	2.204	2.222	2.270	2.37
1.4	2.4	2.400	2.404	2.420	2.465	2.56
1.6	2.6	2.600	2.604	2.619	2.663	2.76
1.8	2.8	2.800	2.804	2.819	2.862	2.96
2.0	3.0	3.000	3.004	3.019	3.061	3.15
3.0	4.0	4.000	4.004	4.020	4.065	4.17
4.0	5.0	5.000	5.004	5.023	5.074	5.19
6.0	7.0	7.000	7.006	7.029	7.093	7.23
8.0	9.0	9.000	9.007	9.035	9.114	9.29
10.0	11.0	11.000	11.008	11.042	11.135	11.34

いことがわかったわけである。またこの性質は応力式 (7) の第1項と第2項の λ の次数差が4である点によることも明らかである。

位意の a/b に対する σ_A / T を求めるにはいちいち公式から計算しなくても、第2表の結果に直線内そうを行えば十分正確な結果が得られる。たとえば $\lambda=0.5$ として $a/b=6$ と10に対する値から $a/b=8$ に対する値を直線内そう（この場合は単なる平均）によって求めると 9.285 となり十分正確である。これより小さい $\lambda, a/b$ について行う場合はもっと誤差が小さくなるはずである。

特に円孔の場合について Howland の論文からの結果と比較すると第3表のようになる。

表中、第2, 第3欄はそれぞれ λ^7, λ^{18} まで求めた (9), (10) 両式による値である。また Howland の論文には有効数字2けたまたは3けたで止めた値が記してあるが⁽⁵⁾、これは比較に不便なので、筆者はこれに与えられている応力関数の係数値を用いて、直接計算し、その結果を第4欄に示した⁽⁶⁾。これら3種の値はきわめて良く一致している。特に第2欄より第3欄の方が第4欄に近似していることは求めた応力公式が取れんの良い級数であることを示すように思われる。

以上によって公式 (7) または (8) は円孔に関する限り $\lambda \leq 0.5$ に対して十分正確な値（誤差 1% 以内）を与えることがわかったが、だ円孔の場合にはどうなるかを考えてみる。第2図から明らかなように、応力式の係数 A_1, A_5, A_7 は $a/b \geq 1$ においていずれも正值をとりつつ、おおむね増大するが、その変動は次数が高いものほど小さい。引張りの場合も同様であったことを考えるとこれは一般的な性質のように思われる。それで省略した A_9 以降も同様の傾向を持つと仮定すれば、 $a/b \geq 1$ なる限り同じ λ に対して A_9 以降の省略による相対誤差はだいたいにおいて穴が円孔から遠ざかるにつれて減少すると推定される。しかし次のように考える方が本質的であろう。すなわち (8) 式は2変

第 3 表 円孔の場合の $\sigma_A/\lambda T$

λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
(9) 式	2.000 0	2.000 3	2.004 9	2.024 7	2.077 1	2.185	2.375
(10) 式	2.000 0	2.000 3	2.004 9	2.025 1	2.080 7	2.207	2.492
Howland	2.000 0	2.000 3	2.004 9	2.025 3	2.080 6	2.203	—

第 4 表 円孔の場合の $\sigma_{y,0}/T$

λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
(14) 式	1	0.999 8	0.997 7	0.990 1	0.976	0.965	0.99
(15) 式	1	0.999 8	0.997 7	0.990 0	0.975	0.963	0.99
Howland	1	0.999 8	0.997 7	0.989 9	0.973	0.946	—

第 5 表

a/b	σ_B/T						λ_{cr}	σ_{max}/T
	$\lambda=0$	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.3$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.5$		
0	1	—	—	—	—	—	—	—
0.2	1	1.001	—	—	—	—	—	—
0.4	1	1.001	1.007	—	—	—	—	—
0.6	1	1.000	1.005	1.022	—	—	—	—
0.8	1	1.000	1.004	1.019	1.057	—	—	—
1.0	1	1.000	1.003	1.016	1.048	1.108	0.508	1.115
1.2	1	1.000	1.003	1.014	1.045	1.105	0.463	1.078
1.4	1	1.000	1.003	1.013	1.042	1.101	0.424	1.053
1.6	1	1.000	1.002	1.012	1.039	1.097	0.389	1.035
1.8	1	1.000	1.002	1.012	1.037	1.093	0.361	1.027
2.0	1	1.000	1.002	1.011	1.036	1.090	0.336	1.018
3.0	1	1.000	1.002	1.009	1.031	1.078	0.251	1.005
4.0	1	1.000	1.002	1.009	1.028	1.072	0.200	1.002
6.0	1	1.000	1.001	1.008	1.026	1.066	0.143	1.000
8.0	1	1.000	1.001	1.007	1.025	1.063	0.111	1.000
10.0	1	1.000	1.001	1.007	1.024	1.062	0.091	1.000
∞	1	1.000	1.001	1.006	1.021	1.055	—	—

数 λ , λ_1 に関する Taylor 展開に外ならない。ゆえに λ を一定とすれば λ_1 が小さいほど収れんが良く、 λ_1 一定ならば λ が小さいほど収れんが良いはずなので上述の性質は当然考えられるところである。以上の吟味から次のように結論して、まず誤りが無いであろう。

「公式 (2) および (7)~(9) は $\lambda, \lambda_1 \leq 0.5$ なる限り実用上の正確値を与える。」

(2) 直線縁の応力 公式 (12)~(14) の信頼度を推定するために、円孔の場合の直線縁最小断面の応力の計算値を Howland の論文からの値と比較すると第 4 表をうる。

最後の欄は Howland の論文に与えられてある応力関数の係数値を用いて筆者が計算した値である⁽⁷⁾。これらは互に良く一致しており、 $\lambda \leq 0.5$ の円孔については (14) 式は十分信頼して用いることがわかる。ゆえに (7), (8) 式の場合と同様の論法によって (12)~(14) は $\lambda, \lambda_1 \leq 0.5$ なるだ円孔についても十分正確な値を与えることが推定される。

さて (12) 式と第 1 表によって直線縁の応力分布を

求める。最大応力 σ_B は最小断面から少し離れた点 B に生ずるのでこれを図式に求めた結果は第 5 表の左方に示したとおりである。

これを第 2 表と比較すればわかるように、 a, b の値にもよるが一般に穴が小さい時は $\sigma_B > \sigma_A$ であり、穴がある程度大きくなると $\sigma_B < \sigma_A$ となる。そして、この限界すなわち $\sigma_B = \sigma_A$ となる λ の値 λ_{cr} と、これらに対する $\sigma_B = \sigma_A = \sigma_{max}$ の値を第 5 表の右方に与えておいた。

(3) 形状係数 (18) の定義

および第 2 表, 第 5 表を用いて形状係数 α_A, α_B を求め、結果を第 4 図に示した。

図における $a/b=1, \lambda > 0.5$ に対する α_A 曲線は鵜戸氏による推定曲線⁽¹¹⁾を転載した。Neuber の方法による近似曲線⁽¹⁰⁾ (鎖線) も $\lambda \leq 0.5$ の範囲では良好な近似を与えている。また最近 Frocht⁽¹²⁾ は半円と直線部分から成る穴を有する帯板について、穴の長さ a と半円の直径の比 a/ρ が 1, 2, 4 の場合に対する光弾性実験を行っているので、その結果を黒丸で示した。

$a/\rho=1$ は円孔を意味するが、その実験値は理論値に良く近似する。 $a/\rho=2, 4$ に対する値は等価だ円孔⁽¹³⁾の考えによれば、穴の長さの半分と最小曲率半径の比が 2, 4 すなわち $a/b=1.41, 2$ なるだ円孔に対する近似値を与えることが期待されるが*、図はこの期待を裏切らない。また第 5 表に見るように α_B の a/b に対する変化はわずかである。そして第 4 図 (a) では $a/b=1$ と 2, (b) では $a/b=1$ と 10 に対する曲線を描いたつもりであるが、いずれもほとんど 1 本の線と見なしうる程度であり、厳密を要しなければ α_B は a/b λ に関係なくほぼ 1 であるとしてさしつかえない。

(4) だ円縁最大応力に対する近似法則 筆者は引張問題においてだ円縁の最大応力について成立つ一つの近似法則を提唱した⁽⁴⁾。それは簡単に言えば、横軸に λ をとり a/b をパラメータとして描いた応力曲線群が互にほぼ平行になるという性質である。この法則を用いれば本論文の計算をまたずとも、既知の円孔

* だ円孔では $\rho=b^2/a$ で与えられ $a/\rho=(a/b)^2$ となるので、 $a/\rho=2, 4$ なるだ円孔の直径比は $a/b=1.41, 2$ となる。

(a)

(b)

第 4 図

に対する応力曲線を $\lambda \rightarrow 0$ に相当する だ円孔 を有する無限板の解まで平行移動するだけで、今の問題に対する近似応力曲線を求めうるわけである。その結果を第 3 図に破線で示し、またこれから求めた形状係数の近似値を第 4 図に同じく破線で描いて置いた。これらを見ると、今の場合近似法則の近似度は既報の引張問題よりはるかに高く、また従来良く用いられる Neuber の方法よりもさらに優秀であることがわかる。この事情は次のように説明される。

(7) 式を だ円孔 と円孔について考え、両式の差を

作れば

$$\frac{1}{\lambda T} \{ \sigma_e(\lambda) - \sigma_c(\lambda) \} = \{ A_1(\epsilon) - A_1(0) \} + \{ A_5(\epsilon) - A_5(0) \} \lambda^4 + \{ A_7(\epsilon) - A_7(0) \} \lambda^6$$

ここに e, c はそれぞれ だ円孔, 円孔を表す。

右辺の第 1 項は だ円孔 あるいは円孔を有する無限板における応力差からの値 $(a/b-1)$ であるから、近似法則とは右辺の第 2 項以下を省略したものに外ならない。

まず λ が小さいならばこの省略が出来て近似法則が成立つであろう。ここに第 1 項と第 2 項の λ の次数差が 4 であることはたいへん重要であって、次数差が 2 であった引張りの場合より近似法則の近似度が高いのは当然である。もう一つの理由は第 2 図に見られるように $a/b \geq 1$ の範囲で a/b の変化による A_5, A_7 の変動が A_1 に比べて緩慢なことである。すなわち だ円孔が細長くなるにつれて $\{ A_n(\epsilon) - A_n(0) \}$ は増大するので応力値の絶対誤差が増すのは止むを得ないけれども、 $\{ A_n(\epsilon) - A_n(0) \}$ は n が大きいほど小さいので計算されていない $n \geq 9$ に対しても同様に仮定すれば、だ円孔が細長くなるほど近似法則の相対誤差はかえって減少するという望ましい結果になるのである。

終りに御懇切な御指導を賜った恩師森口繁一先生に厚く御礼申上げる次第である。

文 献

- (1) 筆者, 機械学会論文集, 21 巻 107 号, 507 ページ (昭 30).
- (2) N. Muschelisvili, Z.A.M.M., Bd. 13, s. 264 (1933).
- (3) R.C.J. Howland & A.C. Stevenson, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 232, p. 190 (1933).
- (4) 同上, p. 204.
- (5) 同上, p. 204, Table XXIII. ただしこれは $h^2 \sigma_A / M = 3 \sigma_A / 2T$ を与えていることに注意。
- (6) 同上, p. 202, Table XIX および p. 203, 式 (169) を用いた。
- (7) 同上, p. 204, Table XXIII の $p=1$ に対する値が $3 \sigma_y, 0/2T$ に当る。しかし、これは有効数字が少く、比較に不便なので、p. 202, Table XIX と p. 204, 式 (171) とから直接計算した結果を第 4 表に掲げた。
- (8) 筆者, 機械学会論文集, 21 巻 107 号, 502 ページ (昭 30).
- (9) H. Neuber, Kerbspannungslehre, s. 52 (1937); (139), (140) 両式から本論文の (5) が直ちに得られる。ただし $p = \lambda T$ を考慮する。
- (10) 同上, s. 4~7 および巻末図表。
- (11) 鶴戸口, 機械学会論文集, 15 巻 50 号, I-86 ページ, 第 8 図 (昭 24)。
- (12) M.M. Frocht & M.M. Levin, J. App. Mech., Vol. 18, No. 1, p. 107 (1951).
- (13) たとえば 平野, 機械学会論文集, 16 巻 55 号, 52 ページ (昭 25)。