6. 結 論

ある荷重のもとで接触している 2 個の金属仕上面間の真実接触点の数およびその個々の面積に対する理論値を直接実験的に確かめることは困難であるので、本研究では接触電気抵抗測定ならびに接触面食込み量測定により実験的検討を行った。すなわち真実接触点の数およびその個々の面積を理論的に導いたと同様にして接触電気抵抗ならびに接触面食込み量の理論式を導

き、この理論値とそれに対する実験値とを比較することによりこれら理論的考察の妥当性を確かめることができた。

終りに本研究を卒業研究の一部として協力された大久保弘幸、谷和健の両氏に感謝の意を表する。

文 献

- (1) 筆者、機械学会論文集、21 巻 111 号、811 ページ (昭 30)。

621.824-185.7

低速で起る軸の危険速度について*

山 本 敏 男**

On the Critical Speed of a Shaft at Lower Rotating Speeds

by Toshio YAMAMOTO

Since single-row radial ball bearings have small "angular clearance", the statical deflection of shaft varies with angular position of shaft provided that bearing center lines of both bearing pedestals are not in alignment and the shaft is not in a perfectly straight line. Obviously the statical deflection fluctuates with period $2\pi/\omega$ and this fluctuation has components of $\sin n\omega t$ and $\cos n\omega t$, in which n is any integer and ω is rotating speed of the shaft. Under such conditions, the periodic disturbing forces having frequencies $n\omega$ are applied to the disc supported by this shaft and the forced vibrations with frequencies 2ω , 3ω , 4ω etc. are induced. In the system in which the disc is not located at mid-point of shaft, gyroscopic action is applied to the disc. Consequently such a system has natural frequencies of modes of vibrations of forward and backward precession and both kinds of critical speeds of $n\omega$ can appear.

1. 緒 言

水平軸において主危険速度の $1/2$ の回転数の所で第 2 次危険速度が発生しうことはよく知られている所であるが⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾、垂直軸においても使用する玉軸受の種類によっては玉軸受のもつある性質が原因となり、かなり強力な第 2 次危険速度を生じ、しかもこの種の危険速度には前向き歳差運動様式 (軸のたわみ曲線の旋回方向が軸の回転方向と同方向の旋回運動) と後向き歳差運動様式 (軸の旋回方向が軸の回転方向と逆向きの運動) の 2 種類のものが存在することが明らかとなった。以下主としてこれらの危険速度の発生の原因、運動の模様などについて述べる。

2. 実験装置と実験方法

第 1 図に装置の大略を示す。1 個の円板が取付けら

* 昭和 31 年 4 月 1 日 第 33 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 31 年 6 月 1 日。

** 正員、名古屋大学。

れている垂直軸を直流電動機で回転させ、互に直角な

第 1 図 装置図

2 方向 OA 方向 (x 方向), OB 方向 (y 方向) における円板縁の出入を光学的に拡大してオシログラフペーパー上に記録し円板の xy 平面上の運動を求める。小紙片 P により光を切れ軸 1 回転ごとの回転マークを記録し、これとタイムマークとの比較により軸回転数 ω が得られる。軸は上下両軸端とも玉軸受により支持されており、図中の V は V プーリ、 S は安全のために駆動

側と円板軸の間にそう入してあるコイルばねのカップリングである。本実験に用いた円板は重量 7.804 kg 、直径 482.8 mm 、厚み 5.22 mm 、直径のまわりの慣性モーメントが 1.114 kg cm s^2 であり、軸は円板の取付位置 $a:b$ (第 1 図参照) がいろいろ異なるものを用いた。

3. 実験結果

本論文では振動様式の表示を次のようにする。すなわち $[+m\omega]$ により軸の回転速度が軸回転数 ω の m 倍の前向き歳差運動を示し、 $[-n\omega]$ は ω の n 倍の回転速度の後向き歳差運動を表示することにする。

第 2 図 第 2 次危険速度のピーク
(単列深みぞ型玉軸受の場合)

円板の取付位置 $a:b$ が $3:7$ の軸において上下の玉軸受の角度のがた⁽⁴⁾がそれぞれ 0.2° , 0.5° および 0.3° , 0.3° である単列深みぞ型玉軸受 (6200 番) を使用した場合の第 2 次危険速度のピーク発生の実験結果の 2 例を第 2 図に示す。図中の $[\pm 2\omega]$ は上述の表示のように軸 1 回転中に軸のたわみ曲線がちょうど 2 回転する前向き、あるいは後向きの歳差運動を意味する。第 2 図 (a) では後向き歳差運動様式の危険速度 $[-2\omega]$ の方のピークが前向き歳差運動の $[+2\omega]$ のピークより大きい、第 2 図 (b) では $[+2\omega]$ のピークの方が大きい。多くの実験を通じ $[+2\omega]$, $[-2\omega]$ のいずれのピークが大きいかは場合により異なり一定しないが、いずれのピークも単列深みぞ型玉軸受を使用するかぎりかなり強力に発生するというのである。第 2 図の実験の装置において他の条件は同じにして置き、ただ玉軸受のみを入れ換え複列自動調心型玉軸受 (1200 番) にすると第 3 図に示す実験結果となり、 $[-2\omega]$ のピークはもはや発生せず $[+2\omega]$ のピーク

第 3 図 複列自動調心型玉軸受の場合

も第 2 図に比べると非常に小さくなる。なお第 3 図の $[+2\omega]$ のピークが第 2 図のものに比べて低速側に現われているのは複列自動調心型玉軸受にしたため軸端の支持条件がほとんど自由支持となり、軸のこわさが減少したためである。円板の取付位置 $a:b$ が $1:4$

第 4 図 単列深みぞ型
玉軸受の場合

である場合の玉軸受の種類を変えた時の比較が第 4 図、第 5 図であり、角度のがたが 0.3° である単列深みぞ型玉軸受を使用した第 4 図の実験では $[+2\omega]$, $[-\omega]$ ⁽⁵⁾, $[-2\omega]$ のピークが現われているが、複列自動調心型玉軸受を用いると第 5 図に示すようにこれらのピークはもはや発生しない。多くの実験を通じ複列自動調心型玉軸受を用いた時は $[-2\omega]$ のピークは全く現われず⁽⁶⁾,

第 5 図 複列自動調心型玉軸受の場合

$[+2\omega]$ のピークは発生しないか、あるいはたとえ発生してもその振幅は小さい。

以上の実験結果から明らかなように単列深みぞ型玉軸受を用いると $[+2\omega]$, $[-2\omega]$ のかなり著しいピークが発生することがわかる。なお測定点記入のために各種のマークを用いているが本論文を通じ同一振動様式には同一マークが用いてある。

4. 危険速度発生原因

軸受台は上下別々に作られており、これを垂直なレベル上にボルトで取付けるのであるが、上下両軸受台の軸受中心線を互に一致させることは厳密な意味では困難である⁽⁴⁾。さらにたとえ軸受台中心線が一致して

いても外輪の玉みぞに横ぶれがあれば両軸受台の中心線に不一致があるのと同じ状況になる。このような場合でも複列自動調心型玉軸受を用いれば軸両端は自由支持となり問題はないが、単列深みぞ型の場合は円板軸を組立てた時、軸の静止の状態（平衡位置）においてすでに軸は曲げをうけたわんだ状態にあり、このたわみの方向は両軸受台の軸受中心線の不一致の存在する方向に一致する。

さらに円板軸自身も厳密な意味では完全に真直ぐではない。軸があらかじめ曲っていて軸両端の玉軸受をそう入するジャーナル部分の軸中心線が一致してなくて、たとえば第 6 図 (a₁) あるいは (a₂) のような形状に軸がなっている場合、第 6 図 (b), (c) で鎖線は軸受台の中心線、点線は曲げを全く受けない場合の軸の形状であるとする、第 6 図 (b) と軸が半回転した (c) では軸の受ける曲げモーメントの大きさは異なってくる。

第 6 図

このような状況下において角度の θ が存在すると軸の静たわみ量が軸の 1 回転を周期として変動し、 $[+2\omega]$, $[-2\omega]$ などの第 2 次危険速度の発生を見るに至る。なお軸が全く曲っていないくても単列深みぞ型玉軸受をジャーナルにそう入する際玉軸受を正しく軸に直角に取付けなかったり、あるいは玉軸受内輪の玉みぞの横ぶれが存在する場合はあらかじめ軸が曲っているのと全く同じ効果を与える。

第 7 図 (a) に示すように真直な軸が軸受台の中心線の不一致により曲り円板中心（円板を軸が貫く点）が P から P' に移動した時、この移動量を b_0 とする。次に第 7 図 (b) に示すように軸があらかじめ曲っていて両端が自由支持である時の円板中心の移動量を d_0 とし、固定支持である場合には移動量が d_0 より a_0 だけ減少するものとする。

第 7 図

簡単のためあらかじめ曲っている軸のたわみ曲線は平面曲線であり、上下両軸受台中心線も同一平面上にあるものとすれば、軸も曲っており、軸受台の上下両軸受中心線も一致していない場合の円板中心の移動量（これをここでは静たわみ量と呼ぶことにする） $\bar{e}_0$ なるベクトルは

$$\bar{e}_0 = b_0 + (d_0 - a_0)e^{i\theta} \quad (1)$$

で表わされる。この場合軸受台中心線の不一致の方向すなわち第 7 図 (a) の PP' の方向を実軸の正方向 (x

軸の正方向) にとり、 $\theta = \omega t$ は軸の回転角であり、 P'' 点が x 軸上に来た時を $\theta = 0$ と選んであり、 $i = \sqrt{-1}$ である。あらかじめ曲っている軸が第 7 図 (c) のような形状であれば (1) の d_0 は零であり、さらに後述するように円板の つりあい条件 を変えれば力学的に d_0 を増減させたと同じ効果が得られ、 d_0 の値いかんは今後の議論に無関係であるので簡単のため $d_0 = 0$ とする。したがって (1) は

$$\bar{e}_0 = b_0 - a_0 e^{i\theta} = b_0 + a_0 e^{i(\omega t - \pi)} = R e^{i\delta_0} \quad (1a)$$

となる。ここに

$$R = \sqrt{b_0^2 + a_0^2 - 2a_0b_0 \cos \omega t},$$

$$\delta_0 = \tan^{-1} \frac{-a_0 \sin \omega t}{b_0 - a_0 \cos \omega t}$$

である。しかし単列深みぞ型玉軸受には角度の θ が存在するから、両端固定支持の場合に軸端を角度の θ の $1/2$ だけ傾けた時の円板中心の移動する量を c_0 ($c_0 > 0$) とすると $\bar{e}_0$ は

$$\left. \begin{aligned} R > c_0 \text{ に対しては } \bar{e}_0 &= (R - c_0)e^{i\delta_0} \\ R < c_0 \text{ に対しては } \bar{e}_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。

$\bar{e}_0$ を図的に求める方法を第 8 図に示す。 $z = x + iy$ 平面において $b_0 = \overline{OA}$ を x 軸方向にとり、 $-a_0 = \overline{AB}$ を図のように描けば $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = R e^{i\delta_0}$ となり、 $BD = c_0$ とすれば $\overline{OD} = \bar{e}_0 = (R - c_0)e^{i\delta_0}$ となり、軸の回転角

第 8 図

$\theta = \omega t$ に対する円板中心の位置 D が求まる。 θ を 0 から 2π まで変化させると D 点の軌跡が第 8 図の閉曲線のように求まる。すなわち軸

を準静的に 1 回転させると円板中心はこの閉曲線上を一巡するわけである。第 8 図は $a_0 : b_0 : c_0 = 1 : 2 : 1$ の場合の図であり、これらの値が変れば閉曲線の図形も変化する。 $\bar{e}_0$ の x, y 方向の成分をそれぞれ e_{0x}, e_{0y} とすると、円板が軸中央に取付けられている $a = b$ の簡単な振動系では運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + \alpha x &= m\omega^2 \cos(\omega t + \beta) + \alpha e_{0x} \\ m\ddot{y} + \alpha y &= m\omega^2 \sin(\omega t + \beta) + \alpha e_{0y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となり、 $a \neq b$ の一般の場合には

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + \alpha x + \gamma \ddot{\theta}_x &= m\omega^2 \cos(\omega t + \beta) + \alpha e_{0x} + \gamma \tau_{0x} \\ m\ddot{y} + \alpha y + \gamma \ddot{\theta}_y &= m\omega^2 \sin(\omega t + \beta) + \alpha e_{0y} + \gamma \tau_{0y} \\ I\ddot{\theta}_x + I_p \omega \dot{\theta}_y + \delta \theta_x + \gamma x &= (I_p - I) \tau \omega^2 \cos(\omega t + \beta + \epsilon) + \gamma e_{0x} + \delta \tau_{0x} \\ I\ddot{\theta}_y - I_p \omega \dot{\theta}_x + \delta \theta_y + \gamma y &= (I_p - I) \tau \omega^2 \sin(\omega t + \beta + \epsilon) + \gamma e_{0y} + \delta \tau_{0y} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる⁽⁷⁾。ここに I_p , I はそれぞれ円板の極慣性モーメントと直径のまわりの慣性モーメント, m は円板の質量, x , y は円板中心の x , y 方向の変位, θ_x , θ_y は円板の傾き角の x , y 方向の成分, e は円板の偏心量, τ は円板中心のたわみが零のときの円板の傾き角, α , γ , δ は軸のばね定数, ε は e と τ の存在する方向の間の角, τ_{0x} , τ_{0y} は e_{0x} , e_{0y} の存在のために生ずる円板の傾き角, β は位相角である。第 8 図や後述の第 9 図からもわかるように e_{0x} , e_{0y} の ωt に対する変化の様子は

$$\begin{aligned} e_{0x} &= a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots \\ &\quad + a_{-1} \cos \omega t + a_{-2} \cos 2\omega t + a_{-3} \cos 3\omega t + \dots \\ e_{0y} &= a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + \dots \\ &\quad - a_{-1} \sin \omega t - a_{-2} \sin 2\omega t - a_{-3} \sin 3\omega t - \dots \end{aligned} \quad (5)$$

のようになる。上式の係数 a_n , a_{-m} は a_0 , b_0 , c_0 の大きさにより変化する。円板が軸中央に取付けられていない $a \neq b$ であるジャイロ作用を伴う⁽⁴⁾の系は前向き歳差運動様式のみならず後向き歳差運動様式の固有振動をも有する⁽⁶⁾から (5) の a_n は $[+n\omega]$ の前向き歳差運動, a_{-m} は $[-m\omega]$ の後向き歳差運動の強制振動を発生させる原因となる。ただし (5) の a_1 は軸の曲りの状態を変化させて零にすることも出来るし (ただこの際 a_0 の大きさも変化するから他の係数にも変化を来す), a_1 により生ずる $[+\omega]$ の振動は (4), (5) からわかるように偏心量を変化させることによりこれをなくすることも出来る。

a_0 , b_0 , c_0 は同程度の大きさの量と考えられ, 種々の $a_0 : b_0 : c_0$ の値に対する a_n , a_{-m} の値を表に示すと次のようである。

$a_0 : b_0 : c_0$	a_2/a_0	a_{-2}/a_0	a_3/a_0	a_{-3}/a_0	a_4/a_0	a_{-4}/a_0
1 : 1 : 1	0.138 2	0.027 4	0.028 9	0.011 1	0.010 6	0.013 5
1 : 2 : 1	0.042 8	0.091 5	0.007 2	0.034 6	0.003 2	0.015 7
1 : 2 : 1.25	0.063 4	0.087 1	0.018 1	0.029 8	0.012 0	0.004 6
1 : 4 : 3	0.025 8	0.069 2	0.002 3	0.015 9	0.004 6	0.006 9

全体として $a_{\pm 2}$, $a_{\pm 3}$, $a_{\pm 4}$ の順に小さくなっているから $[\pm 2\omega]$ が最も強力に発生し $[\pm 3\omega]$, $[\pm 4\omega]$ は $[\pm 2\omega]$ に比べるとピークは小さい。また b_0 が a_0 に比べて小さい時は a_{-2} より a_2 が大きく, その逆であれば a_{-2} の方が大きくなる傾向があるから $[+2\omega]$ と $[-2\omega]$ のピークの大小は第 2 図の実験結果にも示されているように一律には決められない。もしも a_0 が 0.1 mm ~ 1.0 mm 程度あれば a_2 , a_{-2} は数 μ から数十 μ の大きさとなり, したがって十分強力な

$[\pm 2\omega]$ のピークが発生しうる。

第 9 図

円板の取付位置が $a : b = 3 : 7$ であり上下の角度のがたがそれぞれ 0.6° , 1.5° の時の各種のピークの発生の状態を第 10 図に示す。一般に $[\pm 3\omega]$, $[\pm 4\omega]$ などのピークはあまり大きくなく, 多くの実験を通じ

e_{0y} の ωt に対する変化の様子は第 9 図に示す。図の実線が $a_0 : b_0 : c_0 = 1 : 1 : 1$, $1 : 2 : 1$ の時の e_{0y} であり, 点線は $\sin \omega t$ の成分を示す。図から明らかに両者とも $\sin 2\omega t$ の成分がかなり大きいことがわかる。

第 10 図 単列深みぞ型玉軸受の場合

低速部において最も強力に発生するピークは $[\pm 2\omega]$ のピークであった。

第 3 図に示すように複列自動調心型玉軸受を使用するにもかかわらず小さいながら $[+2\omega]$ のピークが発生しているのは次の理由による。カップリングの取付が正しく行われず軸端に $\nu\omega$ の振動数で変化する曲げモーメントが作用するなら $(\nu \pm 1)\omega$ の振動数の振動が発生しうることとはよく知られている所である⁽⁸⁾⁽⁹⁾が, 第 1 図の コイルばね S の中心線と円板軸の軸受中心線が一

致していなくて, しかも コイルばね が真直でなく多少とも曲っていると円板軸上端に ω と同じ振動数で変化する曲げモーメントが加わり 2ω の振動数の振動が発生しうる。この点を確認するため第 3 図の実験

第 11 図 減速の場合 (複列自動調心型玉軸受)

の装置そのままの状態からスプリング S を抜き取り、駆動側と円板側の連絡を断ち軸回転数 ω が自然に減速する状態すなわちカップリング S の影響が全くない状態において行った実験結果が第 11 図であり、もはや第 3 図で現われていた $[+2\omega]$ のピークは発生していない。 $\theta = \omega t$ により変化する $\bar{e}_0$ が原因となって生ずる $[\pm 2\omega]$ のピークはスプリング S を抜き取った減速状態でもその原因がなくなるからやはり存在し、第 10 図の実験の装置を減速状態で測定すると第 12 図に示すように $[\pm 2\omega]$ のピークはなくなることがわかる。ただし負の角加速度の存在のためこれらのピークは第 10 図のものに比べて多少小さい⁽⁹⁾。

第 12 図 減速の場合
(単列深みぞ型玉軸受の場合)

$[+2\omega]$

$[-2\omega]$

第 13 図 $[\pm 2\omega]$ の振動の波形

第 14 図 円板中心の軌跡

第 13 図は $[+2\omega]$, $[-2\omega]$ の x , y 方向の波形であり、両方向で光学的倍率は同じでなく、 $[+2\omega]$ と $[-2\omega]$ とでは x , y 両方向の波形の位相に相異がある。縦の白線は軸 1 回転ごとの紙片 P (第 1 図) による回転マークである。第 14 図は x , y 両方向の波形から求めた円板中心の軌跡であり、比較的小振幅の $[+\omega]$ の振動が重なっているため $[+2\omega]$ では外余はい線、 $[-2\omega]$ の時は内余はい線となり、白丸から白丸までが軸の 1 回転間を示す。

以上を要約すると単列深みぞ型玉軸受を使用する場合はたとえ垂直軸でも、上下両軸受台の軸受中心線のわずかな不一致、あらかじめ存在する軸の曲りおよび玉軸受の角度の θ のため静たわみ量が軸の回転角とともに変化する結果、かなり強力な前向きと後向き歳差運動の $[\pm 2\omega]$ の危険速度と比較的小振幅の $[\pm 3\omega]$, $[\pm 4\omega]$ などのピークが発生する。またカップリングの取付けが正しい限り複列自動調心型玉軸受を用いた時は $[\pm 2\omega]$ のピークは発生しない。

最後に御指導を賜った故下山美徳先生につつしんで御礼申し上げるとともに、実験の助力を願った名古屋大学工学部水力実験室の辻井明夫君に感謝の意を表する。

文 献

- (1) 沖, 機械学会誌, 21 巻 52 号, 17 ページ (大 7).
- (2) H. Lorenz, V. D. I., 63, S. 243 (1919); O. Föppl, V. D. I., 63, S. 866 (1919).
- (3) 中西, 機械学会誌, 35 巻 188 号, 1170 ページ (昭 7).
- (4) 筆者, 機械学会論文集, 21 巻 111 号, 87 ページ (昭 30).
- (5) 筆者, 機械学会論文集, 22 巻 115 号, 167 ページ (昭 31).
- (6) T. Yamamoto, *Memoirs of the Faculty of Engineering*, Nagoya University, Vol. 6, No. 2 (1954).
- (7) 下山・山本, 機械学会論文集, 20 巻 91 号, 215 ページ (昭 29).
- (8) A. Stodola, *Steam and Gas Turbines*, Vol. 2, p. 1122 (1927).
- (9) 下山・山本, 機械学会論文集, 15 巻 50 号, 113 ページ (昭 24).