空 気 管 の 圧 力 伝 達 特 性*

市 川 邦 彦**

Pressure Transfer Characteristics of Pneumatic Pipe

by Kunihiko ICHIKAWA

The author established the fundamental equations from which pressure transfer characteristics of pneumatic pipes are determined. As a first approximation, the author dealt with the linear problem, where the pressure, the density and the velocity of the air in the pipe behave with small oscillation. At this instant, the author dealt with pressure transfer characteristics of pneumatic pipes quantitatively which have no capacity at the end, where the signal frequency is not high and the inertia force of the air can be neglected compared with the frictional force between the air and pipe wall. The author discussed the problem of piping of the pneumatic controller, the internal impedance of which is known, and gave the design chart by which one can determine the optimum diameter of the pipe, when the total length is specified.

1. ま え が き

空気管の圧力伝達特性については、最近多くの研究がなされ、渡辺氏外⁽¹⁾は、管中の気体の運動方程式から出発して問題を解いているが、筆者はそれとはいささか異なった方法で問題を解いた。筆者は空気管を集中定数系として扱ってもさしつかえないということと配管の太さに最適の値があるということについて結論を得た。

2. 理 論 解

第1図のように、断面積 a なる一様な太さの真直な

第 1 図

管を考え、位置 x のところの dx 部分の気体について考える。ここで、気体は管に直角な断面上では一様な速度 v であるとし、気体と管壁との摩擦力は v に比例するものとし、単位長さ当りの摩擦力を νv とする。 ρ を気体の密度、 n をポリトロプ指数とすると、次の三つの基礎方程式が成立する。

$$\text{運動方程式} \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{a} v = 0 \quad (1)$$

$$\text{連続の方程式} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\text{状態方程式} \quad p \rho^{-n} = \text{const.} \quad (3)$$

圧力 p 、密度 ρ は、それぞれある平均値 p_0 、 ρ_0 の付近に変動するものとして

$$p = p_0 + p_1 \quad (4)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (5)$$

とおく。(4)、(5)を(3)に代入すると

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{n} \cdot \frac{p_1}{p_0} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{n}-1}{1 \cdot 2} \frac{p_1}{p_0} + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + \dots \right\} \quad (6)$$

が得られる。(6)を(1)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{n} \cdot \frac{p_1}{p_0} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{n}-1}{1 \cdot 2} \frac{p_1}{p_0} + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + \dots \right\} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{n} \\ \times \frac{p_1}{p_0} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{n}-1}{1 \cdot 2} \frac{p_1}{p_0} + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + \dots \right\} v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial (p_1/p_0)}{\partial x} + \frac{\nu}{a \rho_0} v = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

また(6)を(2)に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{n} \frac{p_1}{p_0} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{n}-1}{1 \cdot 2} \frac{p_1}{p_0} + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + \dots \right\} \right]$$

* 昭和30年10月16日 東京秋期講演大会において講演，原稿受付 昭和31年4月6日。

** 正員，鉄道技術研究所。

$$\begin{aligned}
& + \dots \left. \right\} + v \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n} \frac{p_1}{p_0} \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} \frac{p_1}{p_0} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^2 + \dots \right\} \right] + \frac{\partial v}{\partial x} \\
& + \frac{1}{n} \frac{p_1}{p_0} \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} \frac{p_1}{p_0} + \frac{\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right. \\
& \times \left. \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^2 + \dots \right\} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (8)
\end{aligned}$$

管の入口圧力を正弦波状に振動せしめると、定常状

態では、管の任意の点で p_1/p_0 も v も入口圧力の角周波数を基本角周波数とする振動を生ずる。そのような場合の解を求めてみよう。方程式が非線形であるから、解には基本振動項の外に、高調波が含まれるものと考えられ、解の形を次のように置く。

$$p_1/p_0 = \alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots \dots \dots (9)$$

$$v = \beta_1 e^{j\omega t} + \beta_2 e^{j2\omega t} + \beta_3 e^{j3\omega t} + \dots \dots \dots (10)$$

ただし、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ および $\beta_1, \beta_2, \dots$ は x のみの関数とする。 ω は入口圧力の振動の角周波数である。(9), (10) を (7) に代入すると

$$\begin{aligned}
& j\omega(\beta_1 e^{j\omega t} + 2\beta_2 e^{j2\omega t} + 3\beta_3 e^{j3\omega t} + \dots) + (\beta_1 e^{j\omega t} + \beta_2 e^{j2\omega t} + \beta_3 e^{j3\omega t} + \dots) \left(\frac{d\beta_1}{dx} e^{j\omega t} + \frac{d\beta_2}{dx} e^{j2\omega t} \right. \\
& + \left. \frac{d\beta_3}{dx} e^{j3\omega t} + \dots \right) + \frac{1}{n} (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots) \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} \right. \\
& + \dots) + \frac{\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots)^2 + \dots \left. \right\} j\omega(\beta_1 e^{j\omega t} + \beta_2 e^{j2\omega t} + \beta_3 e^{j3\omega t} + \dots) \\
& + \frac{1}{n} (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots) \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots) + \frac{\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right. \\
& \times \left. (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots)^2 + \dots \right\} (\beta_1 e^{j\omega t} + \beta_2 e^{j2\omega t} + \beta_3 e^{j3\omega t} + \dots) \left(\frac{d\beta_1}{dx} e^{j\omega t} + \frac{d\beta_2}{dx} e^{j2\omega t} \right. \\
& + \left. \frac{d\beta_3}{dx} e^{j3\omega t} + \dots \right) + \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{d\alpha_1}{dx} e^{j\omega t} + \frac{d\alpha_2}{dx} e^{j2\omega t} + \frac{d\alpha_3}{dx} e^{j3\omega t} + \dots \right) + \frac{\nu}{a\rho_0} (\beta_1 e^{j\omega t} + \beta_2 e^{j2\omega t} + \beta_3 e^{j3\omega t} \\
& + \dots) = 0 \dots \dots \dots (11)
\end{aligned}$$

また (9), (10) を (8) に代入すると

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{n} (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots) \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots) + \frac{\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right. \right. \\
& \times \left. \left. (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots)^2 + \dots \right\} \right] + (\beta_1 e^{j\omega t} + \beta_2 e^{j2\omega t} + \beta_3 e^{j3\omega t} + \dots) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n} (\alpha_1 e^{j\omega t} \right. \\
& + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots) \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots) + \frac{\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right\} (\alpha_1 e^{j\omega t} \\
& + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots)^2 + \dots \left. \right] + \frac{d\beta_1}{dx} e^{j\omega t} + \frac{d\beta_2}{dx} e^{j2\omega t} + \frac{d\beta_3}{dx} e^{j3\omega t} + \dots \\
& + \frac{1}{n} (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots) \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots) + \frac{\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right. \\
& \times \left. (\alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{j2\omega t} + \alpha_3 e^{j3\omega t} + \dots)^2 + \dots \right\} \left(\frac{d\beta_1}{dx} e^{j\omega t} + \frac{d\beta_2}{dx} e^{j2\omega t} + \frac{d\beta_3}{dx} e^{j3\omega t} + \dots \right) = 0 \dots \dots \dots (12)
\end{aligned}$$

(11), (12) で同一角周波数の項の和を 0 とおくと

$$j\omega\beta_1 + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\alpha_1}{dx} + \frac{\nu}{a\rho_0} \beta_1 = 0 \dots \dots \dots (13a)$$

$$j\omega 2\beta_2 + \beta_1 \frac{d\beta_1}{dx} + \frac{1}{n} \alpha_1 \beta_1, j\omega + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\alpha_2}{dx} + \frac{\nu}{a\rho_0} \beta_2 = 0 \dots \dots \dots (13b)$$

$$\frac{1}{n} j\omega \alpha_1 + \frac{d\beta_1}{dx} = 0 \dots \dots \dots (14a)$$

$$\frac{1}{n} 2j\omega \alpha_2 + \frac{1}{n} \frac{1}{1 \cdot 2} \alpha_1^2 \cdot 2j\omega + \frac{1}{n} \frac{d\alpha_1}{dx} \beta_1 + \frac{d\beta_2}{dx} *$$

$$+ \frac{1}{n} \alpha_1 \frac{d\beta_1}{dx} = 0 \dots \dots \dots (14b)$$

(13), (14) を解くには、方程式の数を始めよりそれぞれ同数ずつとって、これを連立に解かなければならないが、第 1 近似として、それぞれ 1 個あて、すなわち (13a) および (14a) のみをとって解いてみよう。解の形として

$$\alpha_1 = A e^{jx}, \quad \beta_1 = B e^{jx} \dots \dots \dots (15)$$

なる形を仮定して、これを (13a) および (14a) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} B &= -\frac{j\omega}{nq} A \\ q_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{2np_0}} \left\{ \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{\nu}{a\rho_0}\right)^2} - \omega \right. \\ &\quad \left. + j\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{\nu}{a\rho_0}\right)^2} + \omega \right\} \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

なる関係が得られ、解は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= A_1 e^{q_1 x} + A_2 e^{-q_1 x} \\ \beta_1 &= -\frac{j\omega}{nq} A_1 e^{q_1 x} + \frac{j\omega}{nq_1} A_2 e^{-q_1 x} \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

管の末端が閉そくし、末端容量がない場合の境界条件は

$$x=0, \alpha_1 = (p_1/p_0)i; \quad x=l, \beta_1 = 0 \dots (18)$$

である。これより任意定数 A_1, A_2 の値が定まり

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{e^{q_1 l} + e^{(2l-x)q_1}}{1 + e^{2q_1 l}} \left(\frac{p_1}{p_0} \right) i e^{j\omega t} \dots (19)$$

が得られる。圧力伝達における伝達関数は

$$G(j\omega) = \left(\frac{p_1}{p_0} \right)_{x=l} / \left(\frac{p_1}{p_0} \right)_{x=0} \dots (20)$$

で定義されるから、(19) より

$$G(j\omega) = 1/\cosh q_1 l \dots (21)$$

となる。

(16) でみられるように、 q_1 は複素数であるから、その実数部を u 、虚数部を w とすると、 $G(j\omega)$ は次のように表わすこともできる。

$$G(j\omega) = 1/(\cosh ul \cos wl + j \sinh ul \sin wl) \dots (22)$$

$$\text{よって } |G(j\omega)| = 1/\sqrt{\cos^2 wl + \sinh^2 ul} \dots (23)$$

$$\tan \angle G(j\omega) = -(\tan wl)(\tanh ul) \dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } ul &= \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{2np_0}} \cdot l \right) \omega \sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{a\rho_0 \omega} \right)^2} - 1 \\ wl &= \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{2np_0}} \cdot l \right) \omega \sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{a\rho_0 \omega} \right)^2} + 1 \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

$\nu/a\rho_0 \omega$ が 1 よりきわめて大なるときには

第 2 図 末端容量のない圧力管の周波数特性

$$\left. \begin{aligned} ul &\doteq wl \doteq \sqrt{\frac{\rho_0}{2np_0}} \cdot l \cdot \sqrt{\frac{\nu}{a\rho_0}} \cdot \sqrt{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{l}{c} \\ &\times \sqrt{\frac{\nu}{a \cdot \rho_0}} \cdot l \sqrt{\omega} \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

ただし、 $c = \sqrt{np_0/\rho_0}$ = 音速

となる。更に、これを $\sqrt{\Omega}$ とおくと

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{\nu}{c^2 \rho_0} \frac{l^2}{a} \omega \dots (27)$$

は無次元周波数を意味する。こうすると、(23)、(24) は次のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} |G(\Omega)| &= (\cos^2 \sqrt{\Omega} + \sinh^2 \sqrt{\Omega})^{-1/2} \\ \tan \angle G(\Omega) &= -(\tan \sqrt{\Omega})(\tanh \sqrt{\Omega}) \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

第 2 図実線は、(28) で表わされる周波数特性を図示したものである。 Ω の係数 $\frac{1}{2} \frac{\nu}{c^2 \rho_0} \frac{l^2}{a}$ が小であれば、実際の周波数 ω に対する周波数特性はよくなる。

3. 解の物理的意味について

$\nu/a\rho_0 \omega$ を 1 に比べてきわめて大きいとしたことは

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{a\rho_0 \omega} &= \frac{\nu \beta_1}{a\rho_0 \omega \beta_1} = \frac{\nu |v|}{a\rho_0 |v|} \\ &= \frac{\text{単位長さの気体に働く摩擦力の振幅}}{\text{単位長さの気体の慣性力の振幅}} \end{aligned} \dots (29)$$

より、摩擦力に対して慣性力を無視したことに相当する。このことは、(1) の運動方程式において、慣性項 $\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x}$ を 0 とおいて、運動方程式を $\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{a} v = 0$ としたことに相当する。

実際の周波数 ω に対する周波数特性は、 Ω の係数 $\frac{1}{2} \frac{\nu}{c^2 \rho_0} \frac{l^2}{a}$ によって変わってくるが、 ν の内容は次のように考えられる。層流においては

$$\begin{aligned} (\text{流れの方向の圧力降下}) &= 32 \mu \frac{1}{d^2} \times (\text{管長}) \\ &\times (\text{流速}) \dots (30) \end{aligned}$$

が成立つ。ここに μ は気体の粘性係数、 d は管の内径である。これより

$$\begin{aligned} \nu &= (\text{摩擦力})/(\text{管長}) \times (\text{流速}) \\ &= (\text{圧力降下}) \times (\text{断面積})/(\text{管長}) \\ &\times (\text{流速}) = 8 \mu \pi \dots (31) \end{aligned}$$

すなわち、 ν は気体の粘性係数によってきまる値である。したがって、機械的な寸法が Ω の係数に及ぼす影響は l^2/a のみである。よって、配管は太いほど、また短いほどよいということになる。

次に Ω の係数 $\nu l^2/2np_0 a$ の物理的意味について考えてみよう。管系を集中定数系とみなす場合には、管内の圧力、密度は、場所的には一様と考え、時間のみの関数となり、それぞれ $p_0 + p$ および $\rho_0 + \rho$ とおく (第 3 図)。ここに、 p およ

第 3 図

び ρ はそれぞれ圧力および密度の変化分である。管の入口（外側）の圧力および密度をそれぞれ $p_0 + p_i$ および $\rho_0 + \rho_i$ とおく。管の入口における流速を v とおく。管内速度は、場所の関数であるが、集中定数系としての計算をするために、平均速度を考える。他端は閉じており、速度は 0 であるから、平均管内速度は $\frac{1}{2}v$ である。したがって、摩擦抵抗は $\frac{1}{2}v\mu l$ となる。この力は、管の内外の圧力差による力と釣り合うから、 $a(p_i - p) = \frac{1}{2}v\mu l$ なる関係が得られる。集中抵抗 R は（圧力差）/（体積流量）で定義されるから

$$R = (p_i - p) / va = \mu l / 2a^2 \dots \dots \dots (32)$$

となる。また dt 時間中の空気の流入質量 $a(\rho_0 + \rho_i)vdt$ は、同時間内の、管内空気質量の増加分 $d\rho \cdot a \cdot l$ に等しく（連続の定理） $d\rho = \frac{\rho_0 + \rho_i}{l} v \cdot dt$ なる関係が得られ、状態方程式より $\frac{p}{p_0} = n \frac{\rho}{\rho_0}$ をうる。 ρ_i が ρ_0 の付近に微小変化するときには、この二つの関係より $\frac{dp}{dt} = np_0 \frac{v}{l}$ なる関係が得られる。集中容量 C は（体積流量）/（圧力上昇速度）で定義されるから

$$C = va / \frac{dp}{dt} = \frac{la}{np_0} \dots \dots \dots (33)$$

となる。

$$(32), (33) \text{ より } RC = \mu l^2 / 2np_0 a \dots \dots \dots (34)$$

すなわち、 RC の係数は、管系を集中定数系とみなしたときの時定数に等しいのである。第 2 図の鎖線は、管を集中定数系とみなしたときの周波数伝達関数 $1/(1 + j\omega RC)$ をプロットしたもので、分布定数系として計算したものと比較することができる。両者は低い周波数の領域においてはよく一致している。高周波数域では両者の一致度は悪いが、その場合には慣性力を摩擦力に比べて無視し得なくなり、(23) が成立たなくなるので、ここでは高周波数域のことは論外とする。第 4 図

第 4 図 末端容量のない管の圧力の過渡応答

は両者の過渡応答であって無次元時間 $t / \left(\frac{1}{2} \frac{v \cdot l^2}{C^2 \rho_0 a} \right)$ に対してプロットしてある*。過渡応答においては立ち上がりの経過がわずかに異なるだけである。

4. 配管の太さの決定

空気管の設計においては、その全体の長さ l が与えられて、その断面積 a をいくらにしたらよいかという問題が多いので、ここではそのような場合を考えることにする。

前節において、圧力伝達の周波数特性を良好にするには、配管は太いほどよいと述べたが、それはあくまで信号源の内部インピーダンスが 0 である場合の話である。実際には信号源にはインピーダンスがあり、配管の太さは太いほどよいということにならず、最適の太さが存在する。

圧力信号源のモデルとしてはいろいろなものが考えられるが、ここではまず一つの抵抗と一つの容量がある場合を考える。たとえばいま空気式調節計からダイヤフラム弁に至る間の配管の設計を考えることにし、空気圧縮機的能力は十分にあって、調節計の入口の圧力は、空気の流量がどんなに増しても低下しないとする。しかし調節計自体に一つの抵抗と一つの容量を考えることにする。たとえば、フラップの変位によって生ずるノズル背圧を、パイロット弁で増幅する調節計において、静的状態、すなわち、調節計より操作弁に至る管中の空気が静止している状態では、出力圧力は、ノズル背圧 p_b の k 倍すなわち kp_b となるが、この管中に空気が流れているときには、出力圧力は低下する。 kp_b と、このときの出力圧力との差、すなわち圧力降下は、パイロット弁に存在する抵抗、すなわち信号源インピーダンスによるもので、その抵抗 R_s は、このときの圧力降下を、体積流量で割ったものである。以上は純抵抗のみを考えたのであるが、一般的には、パイロット弁がある容積を有することによって生ずる容量 C_s を考えなければならない。これは上述のような定常流を考えるときには関係しないが、動的な状態には影響を及ぼすものである。したがって、調節計と配管との接続は、模型的には、第 5 図のように表わされる。

第 5 図 圧力信号源と配管との接続

図の A 点の圧力が p_0 を中心として、変動するとき、圧力信号源の容量 C_s は V_s/p_0 となる。しかし、

* 分布定数系として扱った場合の過渡応答は、第 2 図の周波数特性曲線より図解法で求め、集中定数系として扱った場合の過渡応答は $(p_i/p_0) / (p_i/p_0)_i = 1 - e^{-t/RC}$ を計算したものである。

实际的に、压力信号源の抵抗 R_s と容量 C_s は、次のようにして決定するのが正確であろう。 R_s は、前述のように、種々の流量における定常流の実験を行い、压力損失と流量との関係をプロットし、その傾斜より求める。また、別個に、出力端を閉じた状態で、(空気が出力管より大気に流出しないようにして) フラップを種々の周波数で正弦波状に振動せしめたときの出力压力の応答、すなわち周波数応答の折点より、 $R_s C_s$ を見出して、 C_s を決定する。すでに述べたように配管は (32) および (33) 式で表わされる抵抗と容量をもつ単容量系で近似できるので、全体の動的性質は第6図の等価回路に置き換えられる。この等価回路の伝達関数は

$$G_T(s) = \frac{1}{R_s C_s R C s^2 + (R_s C_s + R C + R_s C) s + 1} \quad \dots\dots\dots (35)$$

である。

第6図
信号源と配管の接続の等価回路

われわれの問題では、 R_s 、 C_s は与えられている。配管は長さだけが与えられていると、(32) および (33) 式より a を消去して

$$R C^2 = \nu l^3 / 2 n^2 p_0^2 = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (36)$$

という条件が与えられていることになる。すなわち (35) 式において R_s 、 C_s が与えられ、 R 、 C の間に (36) 式の制約がある場合に、 $G_T(j\omega)$ をできるだけよくする問題を考えることになる。 $G_T(s)$ の極は、いずれも負の実軸上にあり、周波数特性を支配するものは、原点に近い方の極である。

$$\text{今 } R = k_R R_s, \quad C = k_C C_s \quad \dots\dots\dots (37)$$

とおくと (35) 式は

$$G_T(s) = \frac{1}{k_R k_C (R_s C_s s)^2 + (1 + k_R k_C + k_C) (R_s C_s s) + 1} \quad \dots\dots\dots (38)$$

となり、極は

$$s_{1,2} = \frac{-(1 + k_R k_C + k_C) \pm \sqrt{(1 + k_R k_C + k_C)^2 - 4 k_R k_C}}{2 k_R k_C} \times \frac{1}{R_s C_s} \quad \dots\dots\dots (39)$$

である(第7図)。このうち原点に近い方の極 p_1 が、原点から遠ざかるほど、 $G_T(j\omega)$ なる周波数特性はよくなるから、正の値

第7図

$$x = \frac{1 + k_R k_C + k_C - \sqrt{(1 + k_R k_C + k_C)^2 - 4 k_R k_C}}{2 k_R k_C} \quad \dots\dots\dots (40)$$

を大きくすることを考えればよい。

ただし (36) 式に対応して、 k_R と k_C の間には

$$k_R k_C^2 = \frac{\nu l^3}{2 n^2 p_0^2 R_s C_s^2} = \text{const.} = K \quad \dots\dots\dots (41)$$

なる関係が存在している。

第8図は k_R を縦軸、 k_C を横軸 (対数尺とする) にとった場合の、(40) 式で定められる x の contour

第8図

line (実線) と (41) 式で定められる K の contour line (鎖線) を示してある。いま信号源の抵抗 R_s 、容量 C_s 、配管の長さ l および平均压力 p_0 が定められると K の値がきまるから、ある特定の K line が選り出される。その線上で x の値が最大となるように k_R と k_C を決定すれば、それが最適の設計値を与える。(最も良好な配管の太さが定められる)。図中の AB 線は、この optimum の条件を連ねた線で、結局ある特定の K line と AB 線との交点が最適設計点を与える。

終りに終始御指導を頂いた鉄研穂坂技師に感謝の意を表する。

文 献

- (1) 渡辺, 外2名, 昭和30年4月4日 第32期定時総会講演会前副。