621-52-559.3

遅れ制御の安定性*

藤 野 勉**

Stability of Retarded Control

by Tsutomu FUJINO

This paper is concerned with a theoretical study on the stability of control system with constant dead time. It is well known that the time lag gives a serious effect to the stability of the control system. Stability limit of control of first-order retarded controlled plant by the controller with proportional plus reset plus derivative control is given by G. H. Cohen and G. A. Coon. The author investigated the effect of dead time on the stability of control of second-order retarded system and of direct type governor used in the speed control of Diesel engine.

1. 緒 言

自動制御系に存在する 遅れ時間 は制御の安定に大きな影響を与える。偏差を小さく保つためには制御の感度を上げることが必要であるが 遅れ時間 の存在のため乱調を招くので制約を受ける。適当なる微分および積分動作の加算は安定性の向上に対し効果的で本論文は基礎的な制御系について 遅れ時間 に対する安定限界を求めたものである。計算結果は無次元標準形として図表化したので制御装置の計画の際は直ちに利用することが出来る。

2. 特性方程式および安定判別法

単一制御ループに対して

$$\varphi = G_1(S) \cdot (g - \phi) \quad (2.1)$$

$$\phi = e^{-LS} G_2(S) \cdot \varphi \quad (2.2)$$

ただし、 φ = 制御量、 ϕ = 操作量、 g = 外乱、 $G_1(S)$ = 制御対象伝達関数、 $G_2(S)$ = 制御装置伝達関数、 L = 遅れ時間。

全伝達関数を $P(S)$ 、特性方程式を $W(S)$ とすれば

$$\frac{\varphi}{g} = P(S) = \frac{G_1(S)}{1 + e^{-LS} G_1(S) G_2(S)} = \frac{1}{W(S)} \quad (2.3)$$

$$W(S) = F(S) + e^{-LS} G(S) \quad (2.4)$$

ただし $F(S) = 1/G_1(S)$ 、 $G(S) = G_2(S)$

制御装置の伝達関数は一般に次式にて与えられる。

$$G(S) = K(1 + QS + RS) \quad (2.5)$$

ただし K = 比例感度、 Q = レートタイム、

R = リセットレート

一般性を与えるため (2.4) を無次元化する。時間の単位を T^* とし無次元時間 $t = T/T^*$ 、 $s = d/dt = T^*S$ 、無次元特性方程式

$$w(s) = F(s) + e^{-ts} G(s) = u + iv \quad (2.6)$$

$$F(s) = s^n + As^{n-1} + Bs^{n-2} + \dots \quad (2.7)$$

$$G(s) = s + \lambda s^2 + \mu \dots \quad (2.8)$$

発振条件 系が持続振動を含む場合、すなわち安定限界においては特性方程式は純虚根 $\pm iw$ を有するので

$$u(i\omega) = A + C \cos \theta + D \sin \theta = 0 \quad (2.9)$$

$$v(i\omega) = B - C \sin \theta + D \cos \theta = 0 \quad (2.10)$$

ただし $\theta = \omega l$ 、 $F(i\omega) = A + iB$ 、 $G(i\omega) = C + iD$

安定判別 s 面に時計方向に一つの閉曲線をつくるときその中に $w(s)$ の極または根がそれぞれ m 、 n 個含まれるならば w 面の写像曲線は w 面の原点を時計方向に $(n-m)$ 回包む。初めから極をもたないことがわかっていれば写像曲線が原点を包む回数より直ちに根の数を求めることが出来る。現在の場合不安定根の数を吟味するので閉曲線として s 面の右半面を包むような半径無限大の円 $s = Re^{i\theta} (-\pi < \theta < \pi)$ および $s = \pm i\omega$ を使用する。不安定根の数は写像曲線が u 軸または v 軸を切る点の符号の正負より簡単に求めることが出来る。

過度応答 (2.3) において $g(t) = u(t)$ として

$$\varphi = \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} f_n(t - n-1l) \quad (m-1l < t < ml) \quad (2.11)$$

$$f_n(t) = \frac{G^{n-1}(s)}{F^n(s)} u(t) = L^{-1} \frac{G^{n-1}(s)}{s F^n(s)} \quad (2.12)$$

3. ボイラ自動燃焼制御

一容量系制御対象に P. I. D. 3 動作の制御を行う場

* 昭和 27 年 3 月 1 日 第 535 回講演会において講演、原稿受付昭和 31 年 3 月 26 日。

** 正員、三菱造船会社。

合の安定性については G. H. Cohen⁽¹⁾ その他の詳しい論文があるのでここでは次のボイラ自動燃焼制御の場合を除いて省略する。ボイラの伝達関数は寺野氏⁽²⁾により次のように与えられる。

炉の伝達関数

$$r/p = G_1(S) = (\mu T_F S + 1) / (T_F S + 1) \dots \dots \dots (3.1)$$

μ は対流および ぶく射 による熱伝達比で 0.5 程度, T_F は炉の時定数で 1 秒内外である。

ボイラの伝達関数

$$p/(r-g) = G_2(S) = 1/T_B S \dots \dots \dots (3.2)$$

制御装置の伝達関数

$$-e/p = G_3(S) = K(1 + QS + R/S)e^{-LS} \dots \dots \dots (3.3)$$

炉の時定数は非常に小さいので伝達要素から除外することが出来る。むだ時間は 30 秒程度⁽³⁾あり制御の安

第 1 図 安定限界曲線

第 2 図 アナコンによる負荷しゃ断時ボイラ圧力変動曲線

定性に重大なる影響を与える。

炉を除いた特性方程式

$$W(S) = T_B \cdot S^2 + e^{-LS} K(S + QS^2 + R) = 0 \dots \dots (3.4)$$

無次元特性方程式

$$w(s) = s^2 + e^{-ls}(s + \lambda s^2 + \mu) \dots \dots \dots (3.5)$$

$$T^* = T_B/K, \quad l = L/T^*, \quad \lambda = Q/T^*, \quad \mu = RT^*$$

発振条件

$$u(i\omega) = -\omega^2 + (\mu - \lambda\omega^2) \cos \theta + \omega \sin \theta = 0 \dots \dots \dots (3.6)$$

$$v(i\omega) = \omega \cos \theta - (\mu - \lambda\omega^2) \sin \theta = 0 \dots \dots (3.7)$$

上式より

$$l_n = \theta_n \sin \theta_n \dots \dots \dots (3.8)$$

$$\mu_n = (\lambda + \cos \theta_n) / \sin^2 \theta_n \dots \dots \dots (3.9)$$

第 1 図に $\lambda = 0 \sim 0.75$ に対する安定限界を与えた。

第 2 図は負荷しゃ断時のボイラ圧力応答のアナコンによる計算結果である。積分動作の加算により永久偏差は消失するが強く加算すれば乱調となる。

$l = 0.5 \sim 1, \lambda = 0.5, \mu = 0.3$ 程度が最適制御を与えるようである。縦軸は $\varphi = (T_B/L)(\partial P/P_0)$ である。たとえば $T_B = 300s, L = 30s, P_0 = 60 \text{ kg/cm}^2$ のボイラに $l = 1.0, \lambda = 0.5, \mu = 0.4$ の制御を行うものとするれば第 2 図より $\varphi_m = 1.2, \partial P_m = 7.2 \text{ kg/cm}^2$ をうる。なお むだ時間 は遅延演算回路⁽⁴⁾により与えた。

4. 二次遅れ制御対象の場合

2 容量系または船体飛しょう体のごとく慣性による二次遅れを有する制御対象に P. I. D. 3 動作の制御を行う場合の むだ時間 に対する安定限界を求める。

二つの一方向き一次要素に比例制御を行う場合は Oldenbourg⁽⁵⁾ の研究, 振動型制御対象に微分動作の制御を単独に行う場合は Ansoff⁽⁶⁾ の論文があるが, その他の研究はあまりないようである。

無次元特性方程式

$$w(s) = s^3 + as^2 + bs + e^{-ls}(s + \lambda s^2 + \mu) = 0 \dots \dots (4.1)$$

4.1 $a = 0, b = 0, \mu = 0$ の場合 自己制御性および減衰性を欠く場合で船体の針路制御などこれに近い場合である。

特性方程式

$$w(s) = s^2 + e^{-ls}(1 + \lambda s) = 0 \dots \dots \dots (4.1.1)$$

発振条件

$$u(i\omega) = -\omega^2 + \cos \theta + \lambda \omega \sin \theta = 0 \dots \dots (4.1.2)$$

$$v(i\omega) = -\sin \theta + \lambda \omega \cos \theta = 0 \dots \dots \dots (4.1.3)$$

特性方程式は二次式であるから安定判別に対しては $s = i\omega$ の写像曲線が u 軸を切る点 u_n の符号を吟味する。 $v(i\omega) = 0$ より

$$l/\lambda = \theta \cot \theta \dots \dots \dots (4.1.4)$$

(4.1.4) の根を θ_n とする。

$$\left((2n-3) \frac{\pi}{2} < \theta_n < (2n-1) \frac{\pi}{2} \right)$$

(4.1.4) を (4.1.2) に代入し発振限界曲線として

$$\lambda_n = \sin \theta_n / \sqrt{\cos \theta_n} \dots \dots \dots (4.1.5)$$

第 3 図 発振限界曲線

第 4 図 写像曲線

第 5 図 安定限界曲線

$$l_n = \theta_n \sqrt{\cos \theta_n} \dots \dots \dots (4.1.6)$$

発振限界曲線群 l_n にて区切られた部分領域を (A) (B) (C) …… とし各領域内の不安定根の数を吟味する。 $v=0$ すなわち $l/\lambda = \text{一定}$ の直線上において l_n 曲線上では $u_n=0$, l_n を界として u_n の符号は変化する。

$$u_n = \theta_n^2 \left(\frac{1}{l_n^2} - \frac{1}{l^2} \right), \quad l_n^2 = \theta_n \sec \theta_n \dots \dots \dots (4.1.7)$$

n 偶数に対しては $\sec \theta_n < 0$ であるから常に $u_n < 0$
 n 奇数に対しては $l < l_n \dots u_n < 0, l > l_n \dots u_n > 0$
 上のことを表にして示せば

	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	不安定根
(A)	+	-	-	-	-	-	-	-	0
(B)	+	+	-	-	-	-	-	-	1 対
(C)	+	+	-	+	-	-	-	-	2 対
(D)	+	+	-	+	-	+	-	-	3 対

(A) のみが安定領域である。船体の針路制御のような場合微分動作の加算は制御の安定をうため絶対に必要である。

4.2 $b=0, \lambda=0, \mu=0$ の場合 自己制御性なき二次遅れ制御対象に比例制御を行う場合
 特性方程式

$$w(s) = s^2 + as + e^{-ls} = 0 \dots \dots \dots (4.2.1)$$

発振条件

$$u(i\omega) = -\omega^2 + \cos \theta = 0 \dots \dots \dots (4.2.2)$$

$$v(i\omega) = a\omega - \sin \theta = 0 \dots \dots \dots (4.2.3)$$

発振限界曲線 $a_n = \sin \theta_n \sqrt{\sec \theta_n}$

$$l_n = \theta_n \sqrt{\sec \theta_n}$$

第 5 図 ① ② ③ の制御系はいずれも上の特性方程式を満足する。

4.3 $b=0, \mu=0$ の場合 微分動作を加算した場合
 特性方程式

$$w(s) = s^2 + as + e^{-ls}(1 + \lambda s) = 0 \dots \dots \dots (4.3.1)$$

第 6 図 安定限界曲線

減衰性が小さい場合 D 動作の加算は有効で $\lambda=2$ 程度が最も良い。減衰性が大きい場合は有効でない。

4.4 $\alpha=0, \lambda=0, \mu=0$ の場合 減衰性のない振動型制御対象に比例制御を行う場合

特性方程式

$$w(s) = s^2 + b + e^{-ls} = 0 \quad (4.4.1)$$

安定領域は帯状に存在する。適当な むだ時間 の存在は系を安定化する。同様なことは後述の直接型調速機の場合にも見られる。

第 7 図 安定限界曲線

4.5 $\lambda=0, \mu=0$ の場合 制御対象に減衰性がある場合

特性方程式 $w(s) = s^2 + as + b + e^{-ls} = 0$

減衰性の存在により $l=0$ を含み安定領域が出来この安定領域は減衰性の増大とともに拡張される。

第 8 図 安定限界曲線

4.6 $\alpha=0, \mu=0$ の場合 減衰性を欠く振動型制御対象に減衰性を与えるために微分動作を加算する場合

特性方程式

$$w(s) = s^2 + b + e^{-ls}(1 + \lambda s) = 0 \quad (4.6.1)$$

$b-l$ 面に安定領域は帯状に分布し $l=0$ を含み最下位の安定帯が出来る。第 9 図において安定限界は

$$K = (\tan^2 \theta / q^2 - 1) \cos \theta, \quad L/T = q\theta / \tan \theta,$$

$$q = Q/T \quad (4.6.2)$$

にて与えられる。最も良い加算率は安定限界曲線群の包絡線(点線)にて与えられる。第 9 図(b)は最良加算率における K と Q/T の関係を示す。

第 9 図 安定限界曲線

5. 直接型調速機

粘性抵抗を欠除せる調速機は動的に不安定で摩擦抵抗の存在によって安定化されるが むだ時間 の存在も同様な効果を与える。

$$\text{制御対象} \quad T_a S \varphi = g - \phi \quad (5.1)$$

$$\text{制御装置} \quad T^2 S^2 + \alpha TS + 1 = K e^{-LS} \varphi \quad (5.2)$$

$$\text{特性方程式} \quad T_a S (T^2 S^2 + \alpha TS + 1) + K e^{-LS} = 0 \quad (5.3)$$

無次元特性方程式

$$w(s) = s^3 + as^2 + bs + e^{-ls} = 0 \quad (5.4)$$

$$\text{ただし} \quad T^* = (T_a T^2 / K)^{1/3}, \quad a = \alpha (T_a / KT)^{1/3},$$

$$b = (T_a / KT)^{2/3}$$

$a=0$ ($\alpha=0$) の発振限界曲線

$$b_n = (n-0.5)^2 (\pi / l_n)^2 + (-1)^{n+1} / (n-0.5) (\pi / l_n) \quad (5.5)$$

第 10 図 $a, b, c \dots$ 点に対するアナコンによる過渡応答曲線を第 11 図に示す。両図を比較しよい一致が見られる。粘性抵抗がある場合の安定限界は第 12 図に与える。ディーゼル機関の調速は厳密には一種のサンプリング制御となるので定差方程式またはパルス伝達関数による取扱いが必要である。巨視的に連続制御とみなす場合はサンプリング動作による効果的 むだ時間 を考えることが必要で、これらが調速機を安定化しているものと考えられる。

第 10 図 安定限界曲線

第 12 図 安定限界曲線

第 11 図 アナコンによる過度応答曲線 上, フライボール変位, 下 軸角速度偏差

6. 結 語

以上で むだ時間 と安定性の関係が明らかとなったが むだ時間 が安定化に寄与している場合もあり実用上も興味ある問題を提示している。Analog computer は むだ時間 が存在する場合の制御経過に対しても容易に解答を与えるので今後ますます活発に使用されるものと思われる。なお A. C. C. の計算は三菱電機伊丹研究所の御好意によるもので横須賀博士初め電子計算機室馬場準一、真鍋舜治の諸氏に深甚の謝意を表します。調速機に関する計算は藤井勝君の協力によるもの

であわせて謝意を表します。

文 献

- (1) G. H. Cohen & G. A. Coon, *Trans. A. S. M. E.*, Vol. 75, No. 5, 1953.
- (2) 寺野, 運輸技術研究所報告, 2 巻 10 号.
- (3) 電光, 火力発電技術協会, (昭 24-11).
- (4) R. L. Havius, G. P. Movill & N. P. Tomlinson, *Instrument and Automation*, Vol. 28, April 1955.
- (5) R. C. Oldenbourg & H. Sartorius, *The Dynamics of Automatic Control*, p. 107, 邦訳 高橋・伊沢共訳.
- (6) H. L. Ansoff, *Trans. A. S. M. E.*, June 1949.
- (7) 筆者, 自動制御, Vol. II, No. 4.

621-527

周 期 制 御 の 安 定 性*

藤 野

勉**

Stability of Periodic Control

by Tsutomu FUJINO

This paper is concerned with a theoretical study of the sampling servomechanisms with constant dead time. R. C. Oldenbourg established the theory of stability of the periodic control by the use of difference equations. The author developed the theory by the same method for the process of first-order retarded system with positive, zero and negative self regulation, equipped with an automatic controller with rigid follow up. It is clarified that, when the controlled system has zero or negative self regulation, it is necessary to give rigid follow up to obtain stable regulation.

1. 結 言

周期制御の解析には定差方程式またはパルス伝達関数を使用される。複雑な制御系の解析はパルス伝達関数によらねばならないが基礎的な系の解析には定差方程式による方が明確な解を容易に得られるのですぐれているように思われる。R. C. Oldenbourg⁽¹⁾ は定差方程式によって自己制御性を有する一容量系制御対象に間欠動作の比例制御を行う場合およびこれに弾性復原を付加した系の解析を行い周期制御の問題について理論的基礎づけを行った。著者⁽²⁾ はシーメンス式自動燃焼制御の安定解析に関連して正負および零の自己制御性を有する一容量系制御対象に剛性復原を有する間欠動作の比例制御を行う系の解析を試みた。解析の結果ボイラ自動燃焼制御のごとく零または負の自己制御性を有する制御対象には剛性復原の付加が安定性を保つためぜひ必要であることが証明された。なお本制御

系は Oldenbourg の弾性復原の一場合として含まれるものではない。

2. 制御方程式および安定条件

第 1 図に示されるとき一容量系の間欠動作の制御系について制御方程式を求める。

符号 φ 制御量, e 操作量
 ρ 復原の効果係数, k 比例感度
 g 入力信号, A 制御対象平衡度
 T_B 制御対象起動時間

第 1 図 ブロック線図

* 昭和 26 年 11 月 4 日 第 1 回応用力学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和 31 年 3 月 26 日。

** 正員, 三菱造船会社。