6. 結 語

以上で むだ時間 と安定性の関係が明らかとなったが むだ時間 が安定化に寄与している場合もあり実用上も興味ある問題を提示している。Analog computer は むだ時間 が存在する場合の制御経過に対しても容易に解答を与えるので今後ますます活発に使用されるものと思われる。なお A. C. C. の計算は三菱電機伊丹研究所の御好意によるもので横須賀博士初め電子計算機室馬場準一、真鍋舜治の諸氏に深甚の謝意を表します。調速機に関する計算は藤井勝君の協力によるもの

であわせて謝意を表します。

文 献

- (1) G. H. Cohen & G. A. Coon, *Trans. A. S. M. E.*, Vol. 75, No. 5, 1953.
- (2) 寺野, 運輸技術研究所報告, 2 巻 10 号.
- (3) 電光, 火力発電技術協会, (昭 24-11).
- (4) R. L. Havius, G. P. Movill & N. P. Tomlinson, *Instrument and Automation*, Vol. 28, April 1955.
- (5) R. C. Oldenbourg & H. Sartorius, *The Dynamics of Automatic Control*, p. 107, 邦訳 高橋・伊沢共訳.
- (6) H. L. Ansoff, *Trans. A. S. M. E.*, June 1949.
- (7) 筆者, 自動制御, Vol. II, No. 4.

621-527

周 期 制 御 の 安 定 性*

藤 野

勉**

Stability of Periodic Control

by Tsutomu FUJINO

This paper is concerned with a theoretical study of the sampling servomechanisms with constant dead time. R. C. Oldenbourg established the theory of stability of the periodic control by the use of difference equations. The author developed the theory by the same method for the process of first-order retarded system with positive, zero and negative self regulation, equipped with an automatic controller with rigid follow up. It is clarified that, when the controlled system has zero or negative self regulation, it is necessary to give rigid follow up to obtain stable regulation.

1. 結 言

周期制御の解析には定差方程式またはパルス伝達関数を使用される。複雑な制御系の解析はパルス伝達関数によらねばならないが基礎的な系の解析には定差方程式による方が明確な解を容易に得られるのですぐれているように思われる。R. C. Oldenbourg⁽¹⁾ は定差方程式によって自己制御性を有する一容量系制御対象に間欠動作の比例制御を行う場合およびこれに弾性復原を付加した系の解析を行い周期制御の問題について理論的基礎づけを行った。著者⁽²⁾ はシーメンス式自動燃焼制御の安定解析に関連して正負および零の自己制御性を有する一容量系制御対象に剛性復原を有する間欠動作の比例制御を行う系の解析を試みた。解析の結果ボイラ自動燃焼制御のごとく零または負の自己制御性を有する制御対象には剛性復原の付加が安定性を保つためぜひ必要であることが証明された。なお本制御

系は Oldenbourg の弾性復原の一場合として含まれるものではない。

2. 制御方程式および安定条件

第 1 図に示されるごとき一容量系の間欠動作の制御系について制御方程式を求める。

符号 φ 制御量, e 操作量
 ρ 復原の効果係数, k 比例感度
 g 入力信号, A 制御対象平衡度
 T_B 制御対象起動時間

第 1 図 ブロック線図

* 昭和 26 年 11 月 4 日 第 1 回応用力学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和 31 年 3 月 26 日.

** 正員, 三菱造船会社.

制御対象伝達関数

$$\varphi/(g-e)=G(S)=1/(T_B S+A) \quad (2.1)$$

制御時刻 T_n における操作量変化

$$\Delta e_n = e_{n+1} - e_n = k(\varphi - \rho e_n) = k\varphi - be_n \quad (2.2)$$

ただし $b=k\rho$ とする. 操作量 e は 1 制御周期 $T_n \rightarrow T_{n+1}$ を通じて e_n にクランプされるものとする. 次に求められた結果に対して一般性を付与するため上の制御方程式を次のように無次元標準化する. 時間の単位として $T^*=T_B/k$ とし

$$t=T/T^*, \quad s=d/dt, \quad \phi=e/k, \quad a=A/k$$

$$f=F/T^*, \quad l=L/T^*, \quad \phi^*=g/k$$

ただし F および L はそれぞれ制御周期および むだ時間 とする.

第 2 図 制御経過

無次元制御方程式

$$\varphi/(\phi^*-\phi_n)=1/(s+a) \quad (t_n < t < t_{n+1}) \quad (2.3)$$

$$\phi_{n+i}+(b-1)\phi_{n+i-1}-\phi_{n+i}^*=0 \quad (2.4)$$

ただし $(i-1)f < l < if$, $\phi_{n+i}^*=\varphi(t_{n+i}-l)$ とする.

安定性の吟味を行う場合は負荷の変動はないものとして $\phi^*=0$ とすることが出来る. (2.3) を n 制御区間について積分して

$$(1) \quad a=0 \quad \varphi=\varphi_n-(t-t_n)\phi_n \quad (2.5)$$

$$(2) \quad a \neq 0 \quad \varphi=\varphi_n e^{-a(t-t_n)} - \frac{\phi_n}{a}(1-e^{-a(t-t_n)}) \quad (2.6)$$

$t=t_n+f=t_{n+1}$ として

$$(1) \quad a=0 \quad \varphi_{n+1}=\varphi_n-f\phi_n \quad (2.7)$$

$$(2) \quad a \neq 0 \quad \varphi_{n+1}=\varphi_n e^{-af} - \frac{\phi_n}{a}(1-e^{-af}) \quad (2.8)$$

$t=t_n+if-l$ として

$$(1) \quad a=0 \quad \varphi_{n+i}^*=\varphi_n-(if-l)\phi_n \quad (2.9)$$

$$(2) \quad a \neq 0 \quad \varphi_{n+i}^*=\varphi_n e^{-a(if-l)} - \frac{\phi_n}{a}(1-e^{-a(if-l)}) \quad (2.10)$$

(2.7), (2.8), (2.9), (2.10) は一般に総合して

$$\varphi_{n+1}=\alpha\varphi_n-\beta\phi_n \quad (2.11)$$

$$\varphi_{n+i}^*=\gamma\varphi_n-\delta\phi_n \quad (2.12)$$

とすることが出来る. (2.12) を (2.4) に代入し

$$\phi_{n+i}+(b-1)\phi_{n+i-1}-\gamma\varphi_n+\delta\phi_n=0 \quad (2.13)$$

(2.11), (2.13) より ϕ を消去し, 次の定差方程式をうる.

$$\varphi_{n+i+1}+(b-1-\alpha)\varphi_{n+i}-\alpha(b-1)\varphi_{n+i-1}$$

$$+\delta\varphi_{n+1}+(\beta\gamma-\alpha\delta)\varphi_n=0 \quad (2.14)$$

(2.14) の解を

$$\varphi_n=\sum_r A_r z_r^n \quad (2.15)$$

とすれば z_r は次の特性方程式を満足する.

$$w=z^{i+1}+(b-1-\alpha)z^i-\alpha(b-1)z^{i-1}+\delta z+\beta\gamma-\alpha\delta=0 \quad (2.16)$$

z_r は (2.16) の根 (固有値) で複素根の場合部分分解は

$$\varphi_{j,n}=\alpha_j^n \cos(\theta_j+n\beta_j) \quad (2.17)$$

ただし $z_j=\alpha_j(\cos\beta_j \pm i \sin\beta_j)$ (2.18)

z_r および α_j は 1 回の変換による部分分解の振幅比を与えるもので, その絶対値が 1 より大きくなれば系は発散し不安定となる. 特性方程式が二次または三次式の場合変換比 α は次のようにして求められる.

(1) 二次式の場合

$$w=p_0 z^2+p_1 z+p_2=0 \quad (2.19)$$

上式の根を $z=\alpha(\cos\beta \pm i \sin\beta)$ として (2.19) に代入し

$$w=p_0 \alpha^2 \cos 2\beta+p_1 \alpha \cos \beta+p_2 \pm i(p_0 \alpha^2 \sin 2\beta+p_1 \alpha \sin \beta)=0$$

ゆえに $p_0 \alpha^2 \cos 2\beta+p_1 \alpha \cos \beta+p_2=0,$

$$p_0 \alpha^2 \sin 2\beta+p_1 \alpha \sin \beta=0$$

上の 2 式より

$$\alpha=\sqrt{p_2/p_0}, \quad \beta=\cos^{-1}(-p_1/2\sqrt{p_2/p_0}) \quad (2.20)$$

(2) 三次式の場合

$$w=p_0 z^3+p_1 z^2+p_2 z+p_3=0 \quad (2.21)$$

上式は次のように因数分解されるものとする.

$$p_0 z^3+p_1 z^2+p_2 z+p_3=p_0(z-z_1)(z^2+az+b)$$

両辺の係数を等しいとして

$$p_1/p_0=a-z_1, \quad p_2/p_0=b-az_1, \quad p_3/p_0=-bz_1,$$

上式より a および z_1 を消去して

$$p_0^2 b^3-p_0 p_2 b^2+p_1 p_3 b-p_3^2=0$$

しかるに (2.20) より $b=\alpha^2$ の関係があるので

$$p_0^2 \alpha^6-p_0 p_2 \alpha^4+p_1 p_3 \alpha^2-p_3^2=0 \quad (2.22)$$

b および z_1 を消去すれば α を定める式として

$$\alpha^6-2p_1 \alpha^2+(p_2+p_1^2)\alpha+p_3-p_1 p_2=0 \quad (2.23)$$

(2.20) より $\beta=\cos^{-1}(-a/2\sqrt{b}) \quad (2.24)$

をうる.

安定条件 系が安定であるためには特性方程式のすべての根の変換比 (根の絶対値) が 1 より小なることを必要とする. 特性方程式が有限な多項式の場合の安定判別条件は Oldenbourg によって与えられた. たとえば二次式の場合特性方程式を

$$w=p_0 z^2+p_1 z+p_2=0$$

とするとき系が安定なるためには

$$q_0=p_0+p_1+p_2, \quad q_1=2(p_0-p_2), \quad q_2=p_0-p_1+p_2$$

がすべて同符号であることを必要とする. ゆえに安定限界条件は $q_0=0, q_1=0, q_2=0$ のいずれかによって与えられる. 上の条件は固有値が単位円内に存在するための条件として求めたものであるが次のようにして

も導くことが出来る。安定限界においては変換比が 1 となるので $z = \pm 1$ に対して

$$w(1) = p_0 + p_1 + p_2 = q_0 = 0, \\ w(-1) = p_0 - p_1 + p_2 = q_2 = 0 \quad (2.25)$$

複素根に対しては $\alpha = 1$ として (2.20) より

$$\alpha^2 = p_2/p_0 = 1 \quad \text{すなわち} \quad q_1 = 2(p_0 - p_2) = 0 \quad (2.26)$$

三次方程式の場合 $w = p_0 z^3 + p_1 z^2 + p_2 z + p_3 = 0$

$$q_0 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3, \quad q_1 = 3(p_0 - p_3) + p_1 - p_2 \\ q_2 = 3(p_0 + p_3) - (p_1 + p_2), \quad q_3 = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 \\ T = q_1 q_2 - q_0 q_3 = 8(p_0^2 - p_3^2 + p_1 p_3 - p_0 p_2)$$

安定なるためには q_0, q_1, q_2, q_3, T がすべて同符号であることを必要とする。安定限界条件は

$$q_0 = 0, \quad q_3 = 0, \quad T = 0$$

のおのおのである。すなわち

$$w(1) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = q_0 = 0, \\ -w(-1) = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = q_3 = 0 \quad (2.27)$$

(2.22) 式において $\alpha = 1$ として

$$p_0^2 - p_0 p_2 + p_1 p_3 - p_3^2 = T/8 = 0 \quad (2.28)$$

このように $q_1 = 0, q_2 = 0$ は安定限界条件にはなり得ない。同様なことは更に高次の特性方程式にもいわれることで安定限界条件は常に $w(\pm 1) = 0$ および $\alpha = 1$ の 3 個の条件式のみで十分である。数学的に求めた安定条件式は高次式の場合非常に多くなるので上の方法は安定解析を非常に容易にするものである。

3. 自己制御性なき場合 ($\alpha = 0$)

自己制御性を欠く制御対象に間欠動作の比例制御を行う場合でボイラ自動燃焼制御系は本制御系に近い場合である。(2.7) (2.9) と (2.11) (2.12) を比較して $\alpha = 1, \beta = f, \gamma = 1, \delta = if - l$ の関係を (2.14) に代入して

$$\varphi_{n+i+1} + (b-2)\varphi_{n+i} - (b-1)\varphi_{n+i-1} \\ + (if-l)\varphi_{n+1} + (l-i-1f)\varphi_n = 0 \quad (3.1)$$

特性方程式

$$z^{i+1} + (b-2)z^i - (b-1)z^{i-1} \\ + (if-l)z + l - (i-1)f = 0 \quad (3.2)$$

次に $i = 1, 2, 3 \dots$ の場合につき安定性および制御性の吟味を行う。

3.1 $i = 1$ ($0 < l < f$) の場合 むだ時間が制御周期より小なる場合である。

特性方程式 (3.2) 式において $i = 1$ として

$$w = z^2 + (f+b-l-2)z + l+1-b = 0 \quad (3.1.1)$$

上式における f, l は

$$f = kF/T_B, \quad l = kL/T_B \quad (3.1.2)$$

にて与えられる。ゆえに比例感度 k およびサンプリング周期 F を変えることによって f, l を自由に選ぶことが出来る。 T_B および L は与えられたものである。ゆえに安定限界および変換比を $f-l$ 面の図表として与えておけば制御装置の計画を直ちに行うことが出来るので非常に便利である。

固有値が実数の場合 (3.1.1) を変形して

$$l = b - 1 + z + \frac{z}{z-1} \cdot f \quad (3.1.3)$$

上式は一定の z に対して $f-l$ 面の一本の直線を表わす。 z を変えることによって一群の直線群が得られる。これらの直線群は集って平面の一部を埋め $f-l$ 面を直線の存在する領域としない領域に分割する。両領域の境界は直線 (3.1.3) の包絡線

$$(f+b-l-2)^2 - 4(l+1-b) = 0 \quad (3.1.4)$$

にて与えられる。上式は当然特性方程式 (3.1.1) が等根をもつための判別式である。包絡線の内部では固有値は複素根となり、その変換比は

$$\alpha^2 = p_2/p_0 = l+1-b \quad (3.1.5)$$

l が大きくなれば α が大きくなり減衰性は悪化する。 $\alpha = 1$ とすれば

$$l = b \quad (3.1.6)$$

となり複素根に対する安定限界を与える。実根に対する安定限界は (3.1.1) より

$$w(1) = 1 + f + b - l - 2 + l + 1 - b = f = 0 \quad (3.1.7)$$

$$w(-1) = 1 - f - b + l + 2 + l + 1 - b \\ = 4 + 2l - f - 2b = 0 \quad (3.1.8)$$

(3.1.7) は仮定の条件 $0 < l < f$ を満足していないので考慮の必要はない。ゆえに安定限界条件は (3.1.6) と (3.1.8) によって与えられる。

第 3 図に $b = 0 \sim 4$ に対する安定限界を与える。 $b = 0$ の場合安定領域は存在しない。ゆえに自己制御性を欠く制御対象に対しては剛性復元の付与が安定を保つため必要であることが結論される。 $b > 4$ に対しても安定領域は存在しないので復元をあまり大きく与え過ぎても不可で $b = 0.5 \sim 1.5$ 程度が適量と思われる。同図においてハッチされた線は安定限界でその内部に安定領域を与える。

第 4 図に $a = 0, b = 1$ に対する変換比を与える実線は z , 点線は α を表わす。

3.2 $i = 2$ ($f < l < 2f$) の場合 特性方程式

$$w = z^3 + (b-2)z^2 + (1+2f-b-l)z + l-f = 0 \quad (3.2.1)$$

変換比

$$(1) \text{ 実根 } z^2 + (b-1)z + \frac{1-2z}{1-z} f - l = 0 \quad (3.2.2)$$

$$(2) \text{ 複素根 (2.2.2) より} \\ \alpha^6 - (1+2f-b-l)\alpha^4 \\ + (b-2)(l-f)\alpha^2 - (l-f)^2 = 0 \quad (3.2.3)$$

安定限界

$$w(1) = 1 + b - 2 + 1 + 2f - b - l + l - f = f = 0 \quad (3.2.4)$$

$$w(-1) = -1 + b - 2 - 1 - 2f + b + l + l - f \\ = 2b + 2l - 4 - 3f = 0 \quad (3.2.5)$$

複素根に対しては (3.2.3) に $\alpha = 1$ を代入して

$$b + (b-1)l - bf - (l-f)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2.6)$$

(3.2.4) は $f < l < 2l$ の条件を満足しないので考慮の必要なく安定限界は (3.2.5) と (3.2.6) にて与えられる. 第 3 図に安定限界, 第 4 図に $a=0, b=1$ に対する変換比を与える.

3.3 $i=2$ ($2f < l < 3f$) の場合

特性方程式

$$w = z^4 + (b-2)z^3 + (1-b)z^2 + (3f-l)z + l-2f = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3.1)$$

変換比

(1) 実根

$$l = z^3 + (b-1)z^2 + \frac{2-3z}{1-z} \cdot f \quad \dots\dots\dots (3.3.2)$$

(2) 複素根 特性方程式が次のように因数分解されるものとして

$$w = (z^2 + a_1z + b_1)(z^2 + a_2z + b_2)$$

両辺の係数を等しいとして

$$a_1 + a_2 = b - 2, \quad b_1 + a_1a_2 + b_2 = 1 - b$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = 3f - l, \quad b_1b_2 = l - 2f$$

上式より a_1, a_2, b_1 を消去すれば $b_2 = \alpha^2$ を与える式をうる.

第 3 図 $a=0$ 安定限界

第 4 図 $a=0, b=1$ の場合の安定限界および変換比

安定限界 前と同様 $w(1)=f=0$ は安定限界を与えない.

$$w(-1) = 1 - b + 2 + 1 - b - 3f + l + l - 2f = 4 - 2b - 5f + 2l = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3.3)$$

$\alpha=1$ は複素根に対する安定限界を与える.

$b=1$ の場合安定限界は i とともに上昇するが $b > 2$ の場合 $i > 2$ に対して安定領域は消失する. このように b は 1 前後が最適と思われる.

4. 自己制御性正の場合 ($a > 0$)

自己制御性がある場合は復元がなくても安定する. ゆえに温度制御の場合等復元は不要である.

4.1 $i=1$ ($0 < l < f$) の場合 (2.8) (2.10) において $i=1, \xi=e^{-af}, \eta=e^{-a(f-l)}$ とおき

$$\varphi_{n+1} = \xi\varphi_n - \frac{1-\xi}{a}\phi_n \quad \dots\dots\dots (4.1.1)$$

第 5 図 $a=0.4, 0<l<f$ 安定限界

$$\varphi_{n+1}^* = \eta \varphi_n - \frac{1-\eta}{a} \phi_n \quad (4.1.2)$$

$\alpha = \xi, \beta = (1-\xi)/a, \gamma = \eta, \delta = (1-\eta)/a$ として (2.16) に代入し次の特性方程式をうる。

$$w = az^2 + \{a(b-1-\xi) + 1-\eta\}z + \{a(1-b)-1\}\xi + \eta = 0 \quad (4.1.3)$$

変換比

(1) 実根

$$\{1+a(z+b-1)\}(\xi-z) + (z-1)\eta = 0 \quad (4.1.4)$$

(2) 複素根

$$a\alpha^2 + \{1+a(b-1)\}\xi - \eta = 0 \quad (4.1.5)$$

z および α 一定の条件は $\xi-\eta$ 面において直線となる。

安定限界

$$w(1) = (1+ab)(1-\xi) = 0 \quad (4.1.6)$$

$$w(-1) = \{a(2-b)-1\}(1+\xi) + 2\eta = 0 \quad (4.1.7)$$

$$a + \{1+a(b-1)\}\xi - \eta = 0 \quad (4.1.8)$$

(4.1.6) は $0<l<f$ の条件を満たさないから除外し安定限界は (4.1.7) (4.1.8) にて与えられる。安定限界は $\xi-\eta$ 面において 2本の直線にて与えられ、その交点は

$$\xi = 1 - 4a/(1+ab)$$

$\xi=0$ とし $b=4-1/a=b_1$ とする。 $b<b_1$ ならば両直線は意味のある面内 $0<\xi<1$ において交わらない。すなわち安定限界曲線は $f-l$ 面において無限に遠方まで開いていることを意味する。 $b>b_1$ の場合安定領域は閉じた曲線で囲まれる。

4.2 $i=2$ ($f<l<2f$) の場合 $\xi=e^{-af}, \zeta=e^{-al}$ とすれば

第 6 図 $a=0.4, b=1.0$
安定限界および変換比

特性方程式

$$w = az^3 + a(b-1-\xi)z^2 + \{1-\zeta-a(b-1)\xi\}z + \zeta - \xi = 0 \quad (4.2.1)$$

変換比および安定限界は前と同様にして求めることが出来る。第 5 図に $a=0.4$ に対する安定限界、第 6 図に $a=0.4, b=1$ に対する変換比を与える。

5. 自己制御性負の場合 ($a<0$)

自己制御性が負の制御対象も考えられるので解析を試みた。このような場合も復元の付与によって制御を安定化することが出来る。

5.1 $i=1$ ($0<l<f$) の場合 $\xi=e^{af}, \eta=e^{al}$ の置き換えによって

特性方程式

$$w = -a\xi z^2 + [a - \{1+a(b-1)\}\xi + \eta]z + 1 + a(b-1) - \eta = 0 \quad (5.1.1)$$

変換比

$$(1) \text{ 実根 } \{1+a(b-1+z)\}(1-z\xi) + (z-1)\eta = 0 \quad (5.1.2)$$

$$(2) \text{ 複素根 } a\xi\alpha^2 + 1 + a(b-1) - \eta = 0 \quad (5.1.3)$$

安定限界

$$w(1) = (1+ab)(1-\xi) = 0 \quad (5.1.4)$$

$$w(-1) = \{1+a(b-2)\}(1+\xi) - 2\eta = 0 \quad (5.1.5)$$

第 7 図 $a = -0.4$ 安定限界 第 8 図 $a = -0.4, b = 1.0$ 安定限界および変換比

$$a\xi + 1 + a(b-1) - \gamma = 0 \quad (5.1.6)$$

この場合次の二つの場合に分けて考えることが必要である。

(1) $1+ab > 0$ の場合 (5.1.4) は前と同じ理由で安定限界条件より除く。(5.1.5) と (5.1.6) の交点は

$$\xi = (1+ab)/(1+ab-4a) = \xi_1$$

第 9 図 安定限界 (a および b による影響)

$1+ab > 0$ の場合は $\xi_1 > 0$ であるから安定領域は閉じている。

(2) $1+ab < 0$ の場合 この場合 $\xi_1 < 0$ となる

ので (5.1.5) と (5.1.6) は物理的に意味のある面内で交わらない。しかし

$q_0 = w(1) < 0, q_1 = 2\{-1 - a(b-1) - a\xi + \gamma\}, q_2 = w(-1)$ がともに同じ符号をもつ領域が意味のある面内に存在しないので安定領域は消失する。ゆえに自己制御性が負の場合には

$$1+ab > 0 \quad (5.1.7)$$

が安定を保つ上になまず要求される条件である。(5.1.7) は $b < -1/a$ とすることが出来る。たとえば第 7 図 $a = -0.4$ に対する安定限界線図において $b > -1/-0.4 = 2.5$ に対して安定領域は存在しない。

5.2 $i = 2$ ($f < 1 < 2f$) の場合 $\xi = e^{af}, \zeta = \gamma/\xi = e^{a(1-f)}$ の置き代えによって

特性方程式

$$w = -a\xi z^3 + a\{1 - (b-1)\xi\}z^2 + \{a(b-1) - \xi + \zeta\}z + 1 - \zeta = 0 \quad (5.2.1)$$

変換比および安定限界は前と同様に求められるが省略する。

以上の解析を総合した結果を第 9 図に示す。

自己制御性が零または負の制御対象に対して剛性復原は安定性を保つ上にぜひ必要であることが結論される。

文 献

- (1) R.C. Oldenbourg and H. Sartorius, *The Dynamics of Automatic Control*, 邦訳, 高橋・伊沢共訳。
- (2) 筆者, 三菱造船所研究報告, 117 号, (昭 26-12)。