抵抗紙によるねじりの相似試験*

中 沢

一**

Electrical Analogies with Resistive Paper for the Torsion Bar

by Hajime NAKAZAWA

The analogical methods to solve the Laplace or Poisson equation are very useful and important in applied mechanics. In this paper, the author tried to solve the torsion problems with electrical analogies by the conducting sheet with uniform surface resistance. The resistive paper is better than the electrolyte of electrolytic tank method as to handling, but it is difficult to obtain the paper with uniform resistance.

For experimental example, the torsion of a square bar with a concentric circular hole is tested and the results are compared with the results given by another investigators.

1. 緒 言

軸のねじり, はりの曲げ, 流体の流れの問題等ラプラスあるいはポアソンの微分方程式を解かねばならぬ問題は多い。これらを解く方法は一般には数学的解析によるのであるが, それが困難な場合には数値解法によるか, あるいは相似試験による。

筆者は抵抗紙を電界に用いた相似試験によって同心円孔を有する正方形断面の棒のねじりを取り扱ったのでその測定方法ならびに結果について述べる。“軸のねじり”の問題に対する相似試験法としては石けん膜による方法⁽¹⁾, 二液の境界面を利用する方法⁽²⁾, 枝本氏のくふうせる電気そうによる方法⁽³⁾あるいは電解そうによる方法⁽⁴⁾などがあるが, いずれも適当な装置, 設備および技術を必要とするので簡単には行えない。ここに述べるのは, 電解そうによる相似試験の電解液を一樣な電気伝導度を有する抵抗紙におきかえたのであって, これによって電源として直流を使用することが出来るので, 実験装置および測定方法は非常に簡単になった。電界に抵抗紙を用いてポテンシャル分布を測定しようという考えは Liebmann (1953)⁽⁵⁾, 矢沢氏(1955)⁽⁶⁾などに見られるがいずれも電気の問題に対する応用を考えているのでねじりの問題に利用する場合にはここに述べるように境界条件の与え方その他について特別のくふうを必要とする。

2. 実験の原理

ねじりの応力関数を ϕ とすれば次式が成立する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに G は横弾性係数, θ は軸の単位長さ当りのねじれ角, x, y は横断面の直角座標である。 ϕ の一般解は次のようになる。

$$\phi = \psi + \psi_0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ψ_0 は (1) の特異解でねじりの問題では一般に

$$\psi_0 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

また ψ は次式を満足する平面調和関数である。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

これに対して抵抗が一樣な膜に微小電流を流すと定常状態において次の関係が成立する。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに V は任意の点の電圧である。(4) と (5) の相似性から抵抗膜の境界条件を適当に満足させてやれば電圧 V を測定して ψ を知ることが出来る。応力関数の周辺での値を 0 とすれば ψ の境界値は

$$\psi = -\psi_0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta \quad \dots\dots\dots (6)$$

ゆえに抵抗膜の上にモデルを型どり, その周辺に (6) 式に比例する電圧を与えれば内側の電位分布は (5) 式を満足するから次のような相似関係が成立する。

軸のねじり 抵抗膜における電位分布

$$\text{周辺} \quad \psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta \quad V = K \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta$$

$$\text{内部} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

K は電圧 V をねじりの問題における平面調和関数 ψ に換算するための比例定数である。

任意の外周をもち任意の形の穴がある中空軸の場合には応力関数の境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{外周} \quad \phi = \phi_1 = C_1 G\theta = \text{一定} \\ \text{内周} \quad \phi = \phi_2 = C_2 G\theta = \text{一定} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

* 昭和 31 年 10 月 15 日 第 6 回応用力学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和 31 年 11 月 16 日。

** 正員, 東京都立大学工学部。

ゆえに ψ の境界値は次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{外周 } \psi = C_1 G\theta + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta \\ \text{内周 } \psi = C_2 G\theta + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta \end{array} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ゆえに領域内の平面調和関数 ψ を二つの平面調和関数 ψ_a, ψ_b の和と考え ψ_a および ψ_b の境界上の値を次のように選ぶ。

$$\begin{array}{ccc} & \text{外 周} & \text{内 周} \\ \psi_a & \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta & C_2 G\theta \\ \psi_b & C_1 G\theta & \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta \\ \psi = \psi_a + \psi_b & & \end{array}$$

$$C_1 G\theta + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta \quad C_2 G\theta + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta$$

すなわち ψ_a, ψ_b をそれぞれ別々に求めてこれを重ね合わせることによって外周 a 、内周 b をもった中空軸に対する ψ を求めることが出来る。相似試験でこれを求める場合には始めの外周に $K \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta$ に相当する電圧を与え、そのとき内周を導体で一つに結合しておけば、微分方程式の解の唯一性によって内周には当然 $K C_2 G\theta$ に相当した電圧が得られる。ゆえにこのときの電界の V_a を測定すれば V_a/K によって ψ_a が求まる。同様にして外周を一つに連結し内周に

$K \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta$ の電圧を与えれば外周にては $K C_1 G\theta$ が得られ領域内では $V_b = K \psi_b$ が求まる。したがって 2 回の実験結果を重ねることにより ψ を求めることが出来る。多数の穴がある場合には上述の方法を周辺の数だけ繰返し $\psi_a, \psi_b, \dots, \psi_n$ および $C_1, C_2, \dots, C_n$ を求めなければならぬ。ただし周辺曲線のうちで円形のものがあれば座標原点を円の中心におくことによって上述の実験操作は 1 回だけ減らすことが出来る。

ねじりモーメントは応力関数 ϕ を面積積分して得られる値の 2 倍で与えられるが実軸および唯一の円孔を有する中空軸の場合以外は ϕ の値は周辺で 0 にならないから注意を要する。すなわち第 1

第 1 図

図に示すように外周が座標面から離れるために出来る容積 (斜線部) は積分値から差引かねばならぬ。せん断応力 τ は丘面 ϕ の傾斜で与えられる。

3. 実験の装置

抵抗膜を電界に使用すれば電源に直流を利用出来るので装置は簡単になる。第 2 図は測定中の装置、第 3

図は配線図である。正方形断面の 1/4 をモデルにとつてある。図の中心線の位置で切断して 1/8 でも実験出来るが切断辺上での ψ の測定が困難であること、および ψ の値の対称性 (抵抗膜の均一性) を知るのに都合がよいので 1/4 のモデルをとったのである。

第 1 表

b/a	$\tau_{\max}/G\theta a$	$M_t/G\theta a^4$
0	1.38	2.25
(0.5)	(1.51)	2.14
0.526	1.37	2.10
0.7	1.43	1.83
0.9	2.48	1.16

第 2 図

RP: 抵抗紙, P: 探針, I: 絶縁板,
M: ミリボルトメータ, E: 直流電源 (6 V)
R1: 調節用抵抗 (100 kΩ), R2: 分割用抵抗

第 3 図

抵抗膜 抵抗膜は適当な広さをもち均一な抵抗であり抵抗値も適当に高くなければならぬ。筆者は市販されている放電記録紙を用いた。第 4 図は使用した放電記録紙の表面抵抗で 1 cm 幅に切断した放電記録紙上で 1 cm 間隔でナイフ状の極板を強く押しつけて測

第 4 図

定した値である。第 5 図は測定圧と抵抗値の関係を示したもので幅 1 cm 長さ 7 cm の抵抗紙を切り出し両

端の 1 cm^2 の部分に荷重をかけて極板を圧着し、中央 5 cm^2 の部分の抵抗を求め平均したものである。図からわかるように測定圧が低いと接触抵抗が大きく

第 5 図

影響して抵抗値がばらつくが測定圧が 1 kg/cm^2 を越えると抵抗値は一定になる。ゆえに測定の際に探針の先端と抵抗紙との接触面積を小さくすればわずかな測定荷重で測定圧の影響がなくなる範囲に入るので零位法を用いなくても直接探針により測定出来る。

モデル (電極) モデルは銀粉の電極で抵抗紙の上に描く。すなわち透明ニスをアセトンで薄めこれを少量筆につけ抵抗紙にモデルを描き銀粉をふりかけ自然乾燥させローラをかける。この場合電極の表面抵抗は $0.05\text{ }\Omega/\text{cm}^2$ 、抵抗紙と銀粉の層との接触抵抗は $1\text{ }\Omega/\text{cm}^2$ となり使用した抵抗紙の抵抗値 $330\text{ }\Omega/\text{cm}^2$ に比較す*

れば十分小さい。電極が乾燥してからこれに細い銅線を取りつけ、その上から再び前述のようにして銀粉をかぶせる。第 6 図は使用したモデルの一例である。

第 6 図

4. 測定結果

1. 周辺条件の与え方についての実験

境界における電圧は、 $V_1 = K \frac{1}{2} (x^2 + y^2) G\theta$ を境界値にとると円形断面以外では連続的に境界条件を満足させることは出来ないから境界を細分してそれぞれの点に上記の電圧を与える。その際境界上に直接電極をおき、電圧 V_1 を与える方法と断面の周辺より更にある距離だけ離れた位置に適当な間隔で電極をおき、それらの電極への印加電圧を調節して問題の境界上の電圧を境界条件に一致せしめる間接法が考えられる。第 7 図 (a) は境界上に直接電極を設定した場合、(b)(c) は間接法による場合の測定値から計算した応力関数 $\phi/G\theta$ の値を示す。黒丸印は電極を示す。また点線は求められた ϕ の値から逆に計算によって得られた $\phi=0$ の周辺曲線である。すなわち (a) の直接法による場合には点線

第 7 図

で示したように凹凸がはげしくなり、計画した断面形とはかなり違ったものの測定をしたことになり特に応力は周辺では誤差が大きくなる。これに対し電極を周辺曲線から離れた間接法の場合には周辺曲線は正確なものに近くなる。特に (c) の場合は、完全に周辺曲線の凹凸がなくなった。このとき電極は、周辺曲線から $0.14a$ (正方形の一辺を $2a$ とした) 離れたが、この距離は抵抗紙の抵抗値、電極の数、モデルの形などに

より変ると思われる。この実験では大部分は、第 7 図 (c) の方法で電極を設定した。

2. 同心円孔を有する正方形断面棒のねじり 同心円孔をもった正方形断面棒のねじりについては幾つかの理論計算⁽⁷⁾および数値計算例⁽⁸⁾があるのでこれを抵抗紙による相似試験で求めた結果と比較した。正方形の一辺の長さ $2a=100\text{ mm}$ のモデルを作り $1/4$ 断面の直角二等辺三角形の底辺 (正方形の一辺に相当

する)の電圧が境界条件を満足するように調整した。円孔は $1/4$ 円周をモデルの上に銀粉の電極で描いて作る。座標原点を円孔の中心に定めたので実験操作はそれぞれの穴の場合に 1 回ですんだ。なお実験は実軸、および中空円孔の半径 $b=0.5a, 0.526a, 0.7a, 0.9a$ の各場合について行った。第 1 表は直線辺中点のせ

第 8 図

第 9 図

断応力および、ねじりモーメントの値で第 8 図および第 9 図には他の測定者の値と一緒にこれを示した。応力は ϕ の値が二次曲線状に変わっているものとして数値微分により求めた。またねじりモーメントは ϕ の値を数値積分したものである。 $b/a=0.5$ の場合の応力が大きいのは、電圧印加点がこの場合は周辺曲線に近く $0.07a$ しか離れていないため周辺曲線に凹凸を生じ切欠き底の応力を測定したことになって、応力値が大きくなったものである。しかしこの凹凸は ϕ の値が 0 に近いところで出来るので全体の応力丘には影響がなくそのためねじりモーメントは $b/a=0.5$ の場合でも理論値に近い値が得られている。

第 10 図は応力関数の等高線および応力丘の縦断面の一部を示す。

第 10 図

5. 結 語

電界に抵抗紙を用いてねじりの相似試験を行ったが抵抗紙による電位分布の測定は電解そうの場合と同様にラプラスの方程式の成立する範囲内で有効であって特徴とするところは実験装置および測定方法が非常に簡単なことである。この測定における精度は主として抵抗紙の表面抵抗の均一性に支配される。そして局部的な応力を求める場合に境界条件の与え方の不完全なために誤差が若干大きくなることがあるが、これは周辺から適当距離だけ電極を離すこと、および電極の数を増すことなどにより減らすことが出来る。同心円孔がある正方形の軸のねじりについて実験したところ直線辺中点の応力(断面内の最大応力)で誤差は 2~3% くらいであった。また断面全体にわたって積分が行われるねじりモーメントでは誤差はほとんど問題にならない程度であった。

なお抵抗紙による実験は表面抵抗が変化するものを作ることにより当然軸対称断面の軸のねじりの相似試験にも適用出来る。

同心円孔を有する正方形断面棒のねじりでは中空部の直径が大きくなり $b/a=0.9$ になると直線辺中点

の最大応力は急激に大きくなることがわかった。またねじりモーメントの減少の傾向は $b/a \geq 0.7$ では穴が大きくなるとともに直線的に下がっている。

最後に本研究に対して放電記録紙を提供された三信電気の鶴田修氏および実験に協力された富士精密の黒沢建次郎氏に感謝の意を表する。

追記 本研究を公表して後に入手した最新刊の *Proc. S. E. S. A.*, Vol. 13, No. 2⁽⁹⁾(1956) に N. E. Friedmann 外2名の協同研究で全く同様な相似試験法が発表されていることがわかった。彼らは電極を周辺から離すかわりに電極の間を抵抗塗料で塗布することによって境界条件を連続的に満足させるように試みている。

文 献

- (1) 池田, 機械学会誌, 54 巻 391 号 (昭 26-8).
- (2) 砂谷・松山・畠山, 機械学会論文集, 2 巻 9 号 (昭 11).
- (3) I. Edamoto, *Proc. 1st. Japan Nat. Congr. for Appl. Mech.*, 1-37 (1952).
- (4) 筆者, 機械学会論文集, 22 巻 119 号 (昭 31).
- (5) G. Liebmann, *British J. Appl. Phys.*, Vol. 4 (July 1953).
- (6) 矢沢, 東芝レビュー, 10 巻 1 号 (昭 30).
- (7) 大久保, 機械学会論文集, 16 巻 55 号 (昭 25).
- (8) 根来, 機械学会誌, 42 巻 270 号 (昭 14-9).
- (9) N. E. Friedmann, Y. Yamamoto and D. Rosenthal, *Proc. Soc. Exp. Stress Analysis*, Vol. 13, No. 2, (1956).

534.11:531.391:621.85.034

軸方向に移動する線材および帯材の横振動

(第2報 両端傾斜自由の場合)*

中 鉢 竜 雄**

Lateral Vibration of Axially Moving Wire or Belt Form Materials

(2nd Report, The Case of Two Ends Slope Free)

by Tatsuo CHŪBACHI

Continued analysis was performed for the lateral vibration of an axially moving linear material. The boundary conditions are assumed constant curvature at two points supported by pulleys. An algebraic method of analysis gives a simplified relation of parameters concerning the mode of vibration.

1. 緒 言

線状あるいは帯状などの材料が滑車を通じて送られる際に、支点との相対運動によって構成される横振動について前報告に引続いて解析を行った。本報告においては材料の各支点において1個ずつのみぞ車によって支持され、支点における材料の傾斜が自由な場合をとり、これに対して境界条件として支持端において材料の曲率一定という形で取り扱った。特性方程式の解法としては、振動型に関するパラメータの関係式を代数的に解くことによって一変数の方程式に変形し、更に特性方程式を変形して逐次近似に適する形に改め、数値計算によってその解を求めた。また近似解法として複素フーリエ級数による解法を導き、数次の行列式を解くことによって自由振動に関する正確に近い解が得られることを示した。また前報⁽¹⁾の補遺として、

両端傾斜固定の場合の解法を導き、これについて数値計算を行い、双方の境界条件を比較した。

2. 基礎方程式および限界速度

材料の移動速度を v とし、空間に固定した座標 ξ について書けば、横振動の基礎方程式は前報告におけると同様に次式で与えられる。

第 1 図

* 昭和30年10月16日 東京秋期講演大会講演会において講演、原稿受付 昭和31年8月15日。

** 正員、東北大学工学部。