圧縮せる異方性粉体内の応力分布*

郡 利 矩**, 増 尾 竜 一***

Pressure Distribution in Anisotropic Powder

by Toshinori Kōri and Ryūiti Masuo

One of the authors has already published the results of the researches about the stress distribution of powder pressed in a cylinder. According to one of these results, the displacement at the top of the powder is proportional to the load in the second loading until the second load reaches the amount of the first loading. So we can assume that the powder which is pressed once becomes elastic and we can calculate the stress distribution in it by the same method as that of the elasticity. At the previous research, as we assumed the pressed powder was isotropic, we could not calculate the stress in anisotropic powder. On the other hand, it is considered now that even if the powder is isotropic before it is pressed, its elastic property after being pressed in the direction of the axis of the cylinder is not the same as that in the direction perpendicular to the axis. Now this time, we determine the stress distribution under the assumption that the powder is anisotropic and obtain more correct results.

緒 言

粉体が外力を受ける場合の力学的な取り扱いには弾性体, 流体等の力学に比較して, はなはだしく遅れている。このため著者の一人は粉体が外力を受けた場合の基礎的な性質に関して実験を行い, これをもとにしてかたい容器に包まれた粉体が圧縮外力を受けた場合の粉体内部の応力分布の近似的計算法を求めることができた⁽¹⁾。

著者の実験によれば一度圧縮した粉体の挙動は再負荷の時, 2度目の荷重が最初の荷重を越えない範囲内では弾性体と同一であるものが多い。このことから, 2度目荷重の場合の最上部の変位より最初荷重をかけた場合の応力分布を弾性理論式を解くことにより求めることができたのである。この場合前報においては, 圧縮後の粉体はほぼ等方等質のものとして考えたのであるが, 一般に圧縮前に等方等質の粉体も圧縮により方向性ができるものと考えられる。

第 1 図

このため著者らは第 1 図に示すとき鋼製の円筒に粉体を圧縮した場合, 圧縮後円筒の軸方向とそれに直角

第 2 図

な方向とで弾性定数の異なる直交異方性体になると考えてその応力分布を求め, 同時に最初から方向性を有する直交異方性の粉体を圧縮した時についてもこの方法が適用出来ることを示した。

II. 理論的計算

第 1 図は粉体の圧縮に用いた鋼製の円筒である。かかる円筒中の粉体を軸方向より圧縮すれば, 粉体の最

* 昭和 30 年 10 月 16 日 東京秋期総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 31 年 11 月 5 日。

, * 正員, 大阪工業大学。

上部の変位 K' と圧力 P との関係は双曲線状をなすが、この曲線を描く途中である荷重の点に達した時荷重を取り去り、さらに荷重を加えるとこの荷重の上下の際における荷重と変位 K との関係は、前に加えた荷重を越えない範囲においてはほぼ直線的であることが多い⁽¹⁾。それでかかる圧縮した粉体内部の応力を弾性理論式を解いて求めた。しかるに、かかる圧縮した粉体は軸方向とそれに直角な方向とは性質が違い弾性定数が異なるので前回のごとく等方体の弾性理論を用いて解くと誤差を生ずるからいわゆる横等方性の弾性理論式を解くことにより応力分布を求めた。例として円筒中に粉体を圧縮した場合について考える。今 z 軸を円筒軸方向に下向きにとり、次のような符号を用いる。すなわち

- $\varepsilon_r, \varepsilon_t, \varepsilon_z$ 円筒座標 r, t, z 方向の垂直ひずみ
 $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$ 円筒座標 r, t, z 方向の垂直応力
 τ せん断応力
 σ_{ra} 円筒内面における方向の垂直応力
 u, v, w 円筒座標 r, t, z 方向の変位
 K 円筒内の弾性体としての粉体の最上部の変位(2度目圧縮の時)
 a 円筒の内半径
 b 円筒中の粉体(弾性体として)の高さ
 P 粉体に加えられた z 方向荷重

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ 弾性定数

$A, B, C, D, A', B', C', D', k, \alpha, \beta, \gamma, \theta, u_0$ 積分定数

$D^2 f$ $\frac{\partial^2}{\partial z^2} f$ の記号

$\partial^2 f$ $\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r f$ の記号

$\chi(z)$ $r=a$ における w の価

$J_0, J_1, Y_0, Y_1, I_0, I_1, K_0, K_1$ ベッセル関数

である。

この場合の応力と ひずみ の関係は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= a_{11}\varepsilon_r + a_{12}\varepsilon_t + a_{13}\varepsilon_z \\ \sigma_t &= a_{12}\varepsilon_r + a_{11}\varepsilon_t + a_{13}\varepsilon_z \\ \sigma_z &= a_{13}\varepsilon_r + a_{13}\varepsilon_t + a_{33}\varepsilon_z \\ \tau_t &= a_{44}\chi_t, \quad \tau_r = a_{44}\chi_r, \quad \tau_z = \frac{a_{11}-a_{12}}{2}\chi_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_t = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

$\chi_t = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \chi_r = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}$

$\chi_z = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$

応力の つりあいの基礎方程式を変位の形で書き表わすと

$$\begin{aligned} & a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_{12} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r} \right) + a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \frac{a_{11}-a_{12}}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \\ & + a_{44} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} (a_{11}-a_{12}) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{u}{r} \right) = 0 \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ a_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + a_{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r} \right) + a_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{a_{11}-a_{12}}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \\ & + a_{44} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0 \\ & a_{13} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r} \right) + a_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + a_{44} \left\{ \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

以上の式を z 軸対称の場合について考えれば

$$\left. \begin{aligned} & a_{11} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \right\} + a_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (a_{13} + a_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0 \\ & (a_{13} + a_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + a_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + a_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

上式で $\frac{\partial u}{\partial z}$, または $\frac{\partial w}{\partial r}$ を y と置き、符号 $D^2 f = \frac{\partial^2}{\partial z^2} f$, $\partial^2 f = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r f$ とすると、(2) 式から

$$\begin{aligned} & \{ a_{33} a_{44} D^2 D^2 - (a_{13}^2 + 2 a_{13} a_{44} - a_{11} a_{33} - a_{11} a_{33}) \partial^2 D^2 + a_{11} a_{44} \partial^2 \partial^2 \} y = 0 \\ & \left\{ D^2 - \left(\frac{a_{13}^2 + 2 a_{13} a_{44} - a_{11} a_{33}}{2 a_{33} a_{44}} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a_{13}^2 + 2 a_{13} a_{44} - a_{11} a_{33}}{a_{33} a_{44}} \right)^2 - 4 \frac{a_{11}}{a_{33}}} \right) \partial^2 \right\} \\ & \times \left\{ D^2 - \left(\frac{a_{13}^2 + 2 a_{13} a_{44} - a_{11} a_{33}}{2 a_{33} a_{44}} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a_{13}^2 + 2 a_{13} a_{44} - a_{11} a_{33}}{a_{33} a_{44}} \right)^2 - 4 \frac{a_{11}}{a_{33}}} \right) \partial^2 \right\} y = 0 \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

いま (3) 式を解くために $R=f_1(r)$, $Z=f_2(z)$, $y=RZ$ と仮定する。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_{13}^2 + 2 a_{13} a_{44} - a_{11} a_{33}}{2 a_{33} a_{44}} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a_{13}^2 + 2 a_{13} a_{44} - a_{11} a_{33}}{a_{33} a_{44}} \right)^2 - 4 \frac{a_{11}}{a_{33}}} \right) = -p^2 \\ & \left(\frac{a_{13}^2 + 2 a_{13} a_{44} - a_{11} a_{33}}{2 a_{33} a_{44}} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a_{13}^2 + 2 a_{13} a_{44} - a_{11} a_{33}}{a_{33} a_{44}} \right)^2 - 4 \frac{a_{11}}{a_{33}}} \right) = -q^2 \end{aligned}$$

とすると弾性定数によって pq の形が変りそれによって (3) 式の形はいろいろの形をとる。今 pq を実数として

(3) 式が

$$(D^2 + p^2 \partial^2)(D^2 + q^2 \partial^2)y = 0$$

の時には

$$(D^2 + p^2 \partial^2)y = 0$$

を満足する y は (3) 式を満足するこの y を

$$y_1 = R_1 Z_1$$

と仮定すると

$$\frac{D^2 Z_1}{Z_1} + p^2 \frac{\partial^2 R_1}{R_1} = 0$$

$$-\frac{D^2 Z_1}{Z_1} = p^2 \frac{\partial^2 R_1}{R_1} = k_1^2 \quad (k_1 \text{ は実数})$$

これを解いて

$$R_1 = I_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) \quad \text{または} \quad R_1 = K_1\left(\frac{k_1}{p}r\right)$$

$$Z_1 = \cos k_1 z \quad \text{または} \quad Z_1 = \sin k_1 z$$

同様にして $(D^2 + q^2 \partial^2)y = 0$

を満足する y を $y_2 = R_2 Z_2$ とすれば

$$R_2 = I_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) \quad \text{または} \quad R_2 = K_1\left(\frac{k_2}{q}r\right)$$

$$Z_2 = \cos k_2 z \quad \text{または} \quad Z_2 = \sin k_2 z$$

次に $(D^2 + p^2 \partial^2)y = y_2$ または $(D^2 + q^2 \partial^2)y = y_1$ を満足する y も上式の解であるから

$(D^2 + q^2 \partial^2)y = y_1$ において $y = RZ$ とおけば

$$\frac{D^2 Z}{Z} + q^2 \frac{\partial^2 R}{R} = \frac{R_1 Z_1}{RZ} \dots\dots\dots (4)$$

この式が成立するためには右辺は r のみの関数かまたは, z のみの関数でなければならないから, 今これを r のみの関数として

$$\frac{Z_1}{Z} = \frac{1}{a} \quad \text{とすると} \quad \frac{D^2 Z}{Z} = \frac{D^2 Z_1}{Z_1} = -k_1^2$$

(4) 式は

$$-k_1^2 + q^2 \frac{\partial^2 R}{R} = \frac{R_1}{aR}, \quad q^2 \frac{\partial^2 R}{R} - k_1^2 R = \frac{R_1}{a}$$

これを解いて

$$R = A' I_1\left(\frac{k_1}{q}r\right) + B' K_1\left(\frac{k_1}{q}r\right) + \frac{R_1}{a(q^2 - p^2)k_1^2}$$

同様にして $(D^2 + p^2 \partial^2)y = y_2$ から

$$R = C' I_1\left(\frac{k_2}{p}r\right) + D' K_1\left(\frac{k_2}{p}r\right) + \frac{R_2}{b(p^2 - q^2)k_2^2}$$

(4) の右辺が Z のみの関数である場合

$$\frac{R_1}{R} = \frac{1}{c} \quad \text{とすると} \quad (D^2 + q^2 \partial^2)y = y_1 \quad \text{の場合} \quad (4) \text{ 式は}$$

$$D^2 Z + \frac{q^2}{p^2} k_1^2 Z = \frac{Z_1}{c}$$

$$\therefore Z = A'' \cos\left(\frac{q}{p}k_1 z\right) + B'' \sin\left(\frac{q}{p}k_1 z\right)$$

$$+ \frac{Z_1}{ck_1^2(q^2 - p^2)}$$

同様にして $(D^2 + p^2 \partial^2)y = y_2$ から

$$Z = C'' \cos\left(\frac{p}{q}k_2 z\right) + D'' \sin\left(\frac{p}{q}k_2 z\right) + \frac{Z_1}{dk_2^2(p^2 - q^2)}$$

$$\therefore y = \sum_{k_1} A_1 I_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) \cos(k_1 z + \alpha_1)$$

$$+ \sum_{k_1} B_1 K_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) \cos(k_1 z + \beta_1)$$

$$+ \sum_{k_2} C_1 I_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) \cos(k_2 z + \gamma_1)$$

$$+ \sum_{k_2} D_1 K_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) \cos(k_2 z + \delta_1)$$

$$+ \sum_{k_1} A_2 I_1\left(\frac{k_1}{q}r\right) \cos(k_1 z + \alpha_2)$$

$$+ \sum_{k_1} B_2 K_1\left(\frac{k_1}{q}r\right) \cos(k_1 z + \beta_2)$$

$$+ \sum_{k_2} C_2 I_1\left(\frac{k_2}{p}r\right) \cos(k_2 z + \gamma_2)$$

$$+ \sum_{k_2} D_2 K_1\left(\frac{k_2}{p}r\right) \cos(k_2 z + \delta_2)$$

$$+ \sum_{k_1} A_3 I_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) \cos\left(\frac{q}{p}k_1 z + \alpha_3\right)$$

$$+ \sum_{k_1} B_3 K_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) \cos\left(\frac{q}{p}k_1 z + \beta_3\right)$$

$$+ \sum_{k_2} C_3 I_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) \cos\left(\frac{p}{q}k_2 z + \gamma_3\right)$$

$$+ \sum_{k_2} D_3 K_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) \cos\left(\frac{p}{q}k_2 z + \delta_3\right)$$

$$+ \sum_{k_1} \frac{A_1}{a(q^2 - p^2)k_1^2} I_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) \cos(k_1 z + \alpha_4)$$

$$+ \sum_{k_1} \frac{B_1}{a(q^2 - p^2)k_1^2} K_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) \cos(k_1 z + \beta_4)$$

$$+ \sum_{k_2} \frac{C_1}{b(p^2 - q^2)k_2^2} I_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) \cos(k_2 z + \gamma_4)$$

$$+ \sum_{k_2} \frac{D_1}{b(p^2 - q^2)k_2^2} K_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) \cos(k_2 z + \delta_4)$$

$$+ \sum_{k_1} \frac{A_3}{ck_1^2(q^2 - p^2)} I_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) \cos\left(\frac{q}{p}k_1 z + \alpha_5\right)$$

$$+ \sum_{k_1} \frac{B_3}{ck_1^2(q^2 - p^2)} K_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) \cos\left(\frac{q}{p}k_1 z + \beta_5\right)$$

$$+ \sum_{k_2} \frac{C_3}{dk_2^2(p^2 - q^2)} I_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) \cos\left(\frac{p}{q}k_2 z + \gamma_5\right)$$

$$+ \sum_{k_2} \frac{D_3}{dk_2^2(p^2 - q^2)} K_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) \cos\left(\frac{p}{q}k_2 z + \delta_5\right)$$

これより y の一つの解として

$$y_1 = \sum A I_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) \cos(k_1 z + \alpha)$$

$$+ \sum B K_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) \cos(k_1 z + \beta)$$

$$+ \sum C I_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) \cos(k_2 z + \gamma)$$

$$+ \sum D K_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) \cos(k_2 z + \delta)$$

をうる. また別の解として

$$y_2 = \sum A' J_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) e^{\pm k_1 z} + \sum B' Y_1\left(\frac{k_1}{p}r\right) e^{\pm k_1 z}$$

$$+ \sum C' J_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) e^{\pm k_2 z} + \sum D' Y_1\left(\frac{k_2}{q}r\right) e^{\pm k_2 z}$$

となる. y_2 は $e^{\pm k_1 z}$, $e^{\pm k_2 z}$ なる因数を有するをもって $\partial u / \partial z$, または $\partial w / \partial r$ が z が非常に大なる所でも存在することになる. しかるに実際には粉体を円筒中に圧縮した場合は上部よりある深さ以上の深さの所では

u, w 自体が零であることが普通であるから、このような解はわれわれの場合には不適当と考えられるのでこれを棄てて y_1 を用いる。また y_1 において K_1 は、 $r=0$ の時 ∞ であるから、この実験に合致せぬために用いぬことにすれば (4) 式は次のごとくなる。

$$y_1 = \sum A_1 I_1 \left(\frac{k_1}{p} r \right) \cos(k_1 z + \alpha) + \sum C_1 I_1 \left(\frac{k_2}{q} r \right) \cos(k_2 z + \gamma) \dots (5)$$

この解の形は (3) 式の形が弾性定数により異なる形をとるために (5) 式の形もいろいろの場合が生じる。

解のうち最初求めた $(D^2 + p^2 \mathcal{D}^2)(D^2 + q^2 \mathcal{D}^2)y = 0$ の場合について考えて見ると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \sum \left[A_1 I_1 \left(\frac{k_1}{p} r \right) \cos(k_1 z + \alpha_1) + C_1 I_1 \left(\frac{k_2}{q} r \right) \cos(k_2 z + \gamma_1) \right] \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= \sum \left[A_2 I_1 \left(\frac{k_1}{p} r \right) \cos(k_1 z + \alpha_2) + C_2 I_1 \left(\frac{k_2}{q} r \right) \cos(k_2 z + \gamma_2) \right] \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

である。さて所要の解をうるために第 3 図のように $z=0$ に対称に 2 個等しい円筒を考え、力を加える以前には円筒上面が 2 個とも $z=0$ の所にあると考えると u は z の偶関数であり、 w は z の奇関数である。 u, w のこの性質から

第 3 図

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = -\frac{\pi}{2}$$

である。よって

$$\left. \begin{aligned} u &= \chi(r) + \sum \left[-\frac{A_1}{k_1} I_1 \left(\frac{k_1}{p} r \right) \cos k_1 z - \frac{C_1}{k_2} I_1 \left(\frac{k_2}{q} r \right) \cos k_2 z \right] \\ w &= \theta(z) + \sum \left[\frac{p}{k_1} A_2 I_0 \left(\frac{k_1}{p} r \right) \sin k_1 z + \frac{q}{k_2} C_2 I_0 \left(\frac{k_2}{q} r \right) \sin k_2 z \right] \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

をうる。これらを (2) 式に代入すれば

$$A_2 = \frac{a_{13} + a_{44}}{a_{33} p^2 - a_{44}} A_1, \quad C_2 = \frac{a_{13} + a_{44}}{a_{33} q^2 - a_{44}} C_1 \dots (8)$$

$$\mathcal{D}^2 \chi(r) = 0, \quad D^2 \theta(z) = 0$$

をうる。 w は z の奇関数で、 u は $r=0$ で無限大でないことを考えて (6) 式を積分し、 $z = \pm b$ で $w=0$ なることを考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \pm M + N z = w_0 (\pm b - z) \\ \chi(r) &= u_0 r \\ k_1 &= k_2 = n\pi/b \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

となる。複号は z の正負に応じて正または負をとる。 b は円筒中の粉体の高さである。

$z=0$ のとき $w = \pm K$ なるゆえ

$$w_0 = K/b$$

これより (7) 式は

$$u = u_0 r - \sum \left[\frac{A_1}{k} I_1 \left(\frac{k}{p} r \right) + \frac{C_1}{k} I_1 \left(\frac{k}{q} r \right) \right] \cos kz \dots (10)$$

$$w = w_0 (\pm b - z) + \sum \left[\frac{p}{k} A_2 I_0 \left(\frac{k}{p} r \right) + \frac{q}{k} C_2 I_0 \left(\frac{k}{q} r \right) \right] \sin kz \dots (11)$$

これらの式中の A_1, C_1 等の値を定めるために円筒の周辺の変位について考える。 $r=a$ において

$$u = f(z), \quad w = \phi(z)$$

とすれば $f(z)$ は u の性質より

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{b} z \\ a_n &= \frac{1}{b} \int_{-b}^b f(z) \cos \frac{n\pi}{b} z dz \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

また $\phi(z)$ は w の性質より

$$\left. \begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{b} z \\ b_n &= \frac{1}{b} \int_{-b}^b \phi(z) \sin \frac{n\pi}{b} z dz \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

$r=a$ において $u=0$ なることより $a_n=0$ であり、これは z のいかににかかわらず成立つから (10) より

$$u_0 = 0$$

でなければならぬゆえに

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1}{k} I_1 \left(\frac{k}{p} a \right) + \frac{C_1}{k} I_1 \left(\frac{k}{q} a \right) &= 0 \\ C_1 &= -\frac{A_1 I_1 \left(\frac{k}{p} a \right)}{I_1 \left(\frac{k}{q} a \right)} \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

次に (11), (13) 式を比較して

$$b_n = \pm \frac{4K}{n\pi} (n: \text{odd}) + (-1)^n \frac{2K}{n\pi} + \frac{p}{k} A_2 I_0 \left(\frac{k}{p} a \right) + \frac{q}{k} C_2 I_0 \left(\frac{k}{q} a \right)$$

(8), (14) より

$$b_n = \frac{4K}{n\pi} (n: \text{odd}) + (-1)^n \frac{2K}{n\pi} + \frac{p}{k} \frac{a_{13} + a_{44}}{a_{33} p^2 - a_{44}} A_1 I_0 \left(\frac{k}{p} a \right) - \frac{q}{k} \frac{a_{13} + a_{44}}{a_{33} q^2 - a_{44}} \frac{I_1 \left(\frac{k}{p} a \right)}{I_1 \left(\frac{k}{q} a \right)} A_1 I_0 \left(\frac{k}{q} a \right)$$

$$\therefore A_1 = \frac{b_n - \frac{4K}{n\pi} (n: \text{odd}) + (-1)^{n+1} \frac{2K}{n\pi}}{\frac{p}{k} \frac{a_{13} + a_{44}}{a_{33}p^2 - a_{44}} I_0\left(\frac{k}{p}a\right) - \frac{q}{k} \frac{a_{13} + a_{44}}{a_{33}q^2 - a_{44}} I_1\left(\frac{k}{p}a\right) I_0\left(\frac{k}{q}a\right)} \quad (15)$$

となる. この A_1 式中 b_n を除いて他は円筒の大きさおよび粉体の性質に対する他の実験により求める. b_n は

$$b_n = \frac{1}{b} \int_{-b}^b \psi(z) \sin \frac{n\pi}{b} z \cdot dz \quad (16)$$

で $\psi(z)$ すなわち $r=a$ における w の z に関する変化を知れば b_n が定まり, したがって A_1 を計算することが出来る. (10), (11) 式に $u_0=0$ および (8), (14), (15) 等を用いれば u, w がわかり, $\partial u/\partial r$, u/r , $\partial w/\partial z$ 等も計算により知ることが出来る. これより次式により $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z, \tau_t$ を知る.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= a_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + a_{12} \frac{u}{r} + a_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_t &= a_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + a_{11} \frac{u}{r} + a_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_z &= a_{13} \frac{\partial u}{\partial r} + a_{13} \frac{u}{r} + a_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_t &= a_{44} \frac{\partial w}{\partial r} + a_{44} \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$\psi(z)$ の求め方 $r=a$ における w の z に関する変化 $\psi(z)$ は前報⁽¹⁾と全く同様にして求める. すなわち円筒中に粉体を圧縮する場合, 一定間隔ごとに異色の粉をきわめて薄くはさみ, 所要の荷重で圧縮した後, 固化した粉体を取り出し, 異色の粉による線の円筒周辺における距離を測定して, 線の原位置からの変化を知れば, 2度目圧縮の時の最上部の変位 K から周辺の変位を知ることが出来る.

弾性定数の定め方 以上求めた解により弾性定数が知れていれば最上部の変位と周辺の変位とを実験により知り (17) 式により応力分布が求まる. われわれは弾性定数を次のようにして知ることが出来た. 今 $\epsilon_r, \epsilon_t, \epsilon_z$ と $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$ との関係を

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E_1} - \frac{\sigma_t}{m_1 E_1} - \frac{\sigma_z}{m_2 E_2} \\ \epsilon_t &= -\frac{\sigma_r}{m_1 E_1} + \frac{\sigma_t}{E_1} - \frac{\sigma_z}{m_2 E_2} \\ \epsilon_z &= -\frac{\sigma_r}{m_2 E_2} - \frac{\sigma_t}{m_2 E_2} + \frac{\sigma_z}{E_2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

と表わせば $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{33}$ の四つの弾性定数は m_1, m_2, E_1, E_2 がわかれば簡単な計算により直ちに知ることが出来る. 今圧縮してすでに固化した粉体を押し出し, これを r 方向と z 方向より圧縮してその際の応力とひずみの関係を見れば, E_1 と E_2 が求まる. 次に第4図のごとく, z 方向の等分布荷重を受ける半無限粉体の一部に, 点線で囲まれるようないま考えている円筒中に圧縮された粉体と同形同大のものを考えると, この場合

第4図 等分布荷重を加えた半無限体

$$\epsilon_r = \epsilon_t = 0, \quad \sigma_r = \sigma_t$$

である. この場合も E_1, E_2 は有限の場合と同様にして求まるから, このような場合の σ_r と ϵ_z がわかれば m_1, m_2 は (18) から次式により求まる.

$$m_2 = \frac{\sigma_r}{\sigma_z - \epsilon_z E_2}, \quad m_1 = \frac{m_2 E_2 \sigma_r}{m_2 E_2 \sigma_r - E_1 \sigma_z}$$

円筒周辺における摩擦が0なる場合は半無限粉体の一部と考えられるから, 周辺の摩擦が0なる場合の σ_r, ϵ_z がわかれば m_1, m_2 が求まる.

次式により円筒周辺の σ_r の平均値を求めることが出来るから, 粉体の高さをいろいろ変えて実験すれば

外そう法により高さが0すなわち周辺の摩擦0なる時の正しい ϵ_z, σ_r を求めることが出来るので, これを用いて m_1, m_2 を知る. 周辺の σ_r の平均値は, 第5図のような方法で底面の受ける力 P' を知れば,

$$\sigma_{r \text{ mean}} = \frac{P - P'}{2\pi a b \mu}$$

ただし μ は摩擦係数, b は圧縮後の粉体の高さである. 以上の結果から4個の弾性定数が求まる.

a_{44} については, $P - P'$ は周辺の摩擦力の総計に等しいから次式が成立する.

$$P - P' = 2\pi a \int_0^b a_{44} (\chi_t)_{r=a} dz$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{r=a} = 0$$

$$\therefore (\chi_t)_{r=a} = \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a}$$

$$P - P' = 2\pi a \cdot a_{44} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} dz$$

第5図

$$a_{44} = \frac{P-P'}{2\pi a \int_0^b \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \sum \left[\frac{p}{k} A_2 I_0 \left(\frac{k}{p} r \right) + \frac{q}{k} C_2 I_0 \left(\frac{k}{q} r \right) \right] \right\} r=a \cdot \sin kz \cdot dz}$$

$$= \frac{P-P'}{\sum \frac{4ab}{n} \left[A_2 I_1 \left(\frac{k}{p} a \right) + C_2 I_1 \left(\frac{k}{q} a \right) \right] n : \text{odd}}$$

上式の $P-P'$ は実験により求められる。右辺の分母は a_{44} がわからなければ求まらないので、 a_{44} を仮定して計算すると右辺と左辺が等しくなる点が求める a_{44} である。以上によって弾性定数が求まったので、これを用いて応力分布を知る。

III. 計算の実例

以上求めた解を用いて実際の粉体の圧縮の場合の応力分布を求めた。実験に用いた容器は第 1 図に示すが

第 6 図 σ_z の半径方向の分布

第 7 図 σ_z の軸方向の分布

ごとき内径 5 cm, 肉厚 1.8 cm, 高さ 16 cm の硬鋼製の円筒で、この中に 325 メッシュ通過の電解銅粉を装入して、上方より 25 t の圧力にて圧縮した。また 2 度目圧縮の時の最上部の変位は第 2 図のようにしてダイヤルゲージを用いて測定した。

これらの実験結果より求めた応力分布は以下の図に示すごとくになった。

第 8 図 σ_r の半径方向の分布

第 9 図 σ_r の軸方向の分布

IV. 結 論

以上によって等方等質の粉体を圧縮した場合の近似的な応力分布の求め方の一例を示したが、更に粉体の

第10図 σ_r の半径方向の分布

中にはたとえば搗碎粉のごとくこれらの粉体を容器につめて圧縮する場合、圧縮以前にすでに方向性を有するものも多く、前回発表の方法を用いてはその応力分布を求めることが出来ないが、かかる粉体の応力分布もこの方法により求めることが出来る。

この方法は圧縮した粉体を横等方性のものと考えたが、三つの方向にそれぞれ性質の異なるものについても考えねばならない。このため粉体の力学一般につい

第11図 σ_z の軸方向の分布

て考究するためにはさらに研究を要するが、本報告はそれらの一連の研究の一環としてこれを行ったものである。

文 献

- (1) 西原・郡, 機械学論文集, 14巻 48号, (昭23).

622.831.3:624.131.53

水平地表下にうがたれた だ円断面坑道周縁の応力*

石 田 誠**

On the Stress Distribution around an Elliptic-Sectioned Tunnel Excavated under the Horizontal Surface

by Makoto ISIDA

The problem is treated by the method of perturbation, and convenient formulas for the stress are given in forms of power series. Stress distributions are calculated for some sectional forms, and they are shown to be rather different from the results given by T. Sugihara neglecting the boundary conditions of the horizontal surface.

1. 緒 言

坑道あるいはトンネル周縁の地圧による応力の理論的解析は弾性論に基礎を置くものと、土圧論によるも

のとに大別することができ、前者は岩石の場合にあてはまり、後者は土の場合によく合うことが知られている。ここでは前者の弾性論によるものだけを考える。

円断面の場合については Jeffery の双極座標による解法⁽¹⁾ができるので、多くの人々によって解析が試みられ、水平地表下の円断面坑道に対する山口⁽²⁾、安蔵⁽⁴⁾、Mindlin⁽⁵⁾らの研究、さらにこれを一般化した

* 昭和30年11月25日 広島地方講演会において講演、原稿受付 昭和31年9月15日。

** 正員、徳島大学工学部。