満たすことで、板の曲りやボルト穴工作のカエリなどのためややもすれば振動数は低くなる傾向にあった。 $\alpha=60^\circ$ の実験値が少し低いのは、この欠点が除かれなかったためであろう。また $\alpha=30^\circ$ で一つの値が低いのは試験片にサンドペーパーをかけて厚さを約0.82 mmにしたためで、厚さの修正を施すとほぼ計算値と一致する。 $\alpha=60^\circ$ のもう一つの実値は非常に低く出た。これは試験片の中央部に凸凹を有して不良であったためである。その他の実験値はよく計算値と一致した。なお測定後各辺中央のナットを少しゆるめて測定値がほとんど変わらないことも確認した。

6. 結 言

弾性振動学における基礎量としての周辺固定ひし形板の基本振動数を求め、実験によってその結果を確認した。本方法の計算過程は行列式の計算を除いて全部

簡単な表計算であり、演算回数が多いという難点があるにしても、簡けつで取扱いが容易であるといってもよいであろう。

なお上に求めた ω の値が基本振動数であることを示すためには、振動形を求めてみるのが本筋であるが、 $\alpha=90^\circ$ の場合の既知の値から α とともに連続的に変化しているので、これを基本振動数と考えたわけである。

おわりに本研究に種々御指導をいただいた太田友弥教授ならびに阪大産研の栗谷丈夫氏に厚く御礼を申し上げる。また計算および実験の労を惜しまなかった井上豊君に感謝する。

文 献

- (1), (2) 浜田, 機械学会論文集, 23 巻 127 号, (昭 32-3).
- (3) Trefftz, ZAMM, Bd. 15, 1935.

621.888.6] 678.4:620.178.311.6

防振ゴムの動的性質の振動中心依存性*

榎 木 義 一** 得 丸 英 勝***

Dependence of Dynamic Properties of Rubber Vibration-Absorber on Initial Strain

by Yoshikazu SAWARAGI and Hidekatsu TOKUMARU

The vibration test of the rubber samples is performed with a forced resonance vibrator. The sample is circular cylinder ($10\phi \times 60$), both edge planes of which are cemented to the platens.

The variations of dynamic modulus E_d (apparent value) and internal friction $\eta\omega$ with the initial strain (0~30% in tension side) are investigated under constant temperature, frequency and impressed force. The following results are obtained.

1. Both E_d and $\eta\omega$ decrease with the increase of initial strain.
2. However, the ratio $\eta\omega/E_d$ remains unaffected with the change in initial strain.
3. The ratio of the static modulus to E_d is independent of the initial strain.
4. The larger the stiffness of the sample, the larger the rate of the decrease of E_d to the increase of initial strain.

は し が き

防振ゴムが用いられる場合は 10% 程度の初期ひずみをあらかじめうけた状態で用いられることが多い。ところがこのような状態における動的性質と、自由長における動的性質とは一般に異なっている。すなわち非線形特性を呈する。この点に関する研究は未だほと

んどなされていないようである。筆者らはこの点に関して研究を行い興味ある結果を得たので、ここに報告する。

1. 実 験

i) 試験片 実験に用いた試験片の形状を第1図に示す。ただし K-1 のみは高さ 50 である。両端は金属に接着されている。実験は引張方向で行った。試験片の組成を第1表に示す。試験片 K-1 はカーボンブラックを含んでおらず、振動特性は振幅には依存

* 昭和 31 年 2 月 17 日 機械力学, 自動制御部門連合講演会において講演, 原稿受付 昭和 32 年 2 月 7 日。

** , *** 正員, 京都大学工学部。

しないものである。他の試験片はすべてカーボンブラックを含んでおり、振動特性は振幅に依存する。K-1は線形粘弾性体であるが、他のものは粘弾性体として取り扱わねばならぬことはたびたび筆者らの主張してきた所である。

ii) 実験装置 実験装置の概略を第2図に示す。これは自由度1の振動系である。慣性かんは支点のまわりに回転運動をする。この運動の復原モーメント

第 1 図

第 1 表

	K-1	K-21'	K-5	K-7
生 ゴ ム	500	500	500	500
亜 鉛 華	25	25	25	25
ステアリン酸	5	5	5	5
老 防 D	10	10	10	10
い お う	15	15	15	15
促 進 剤	4	4	4	4
ミクロネックス	—	25	—	—
コスモス #60	—	—	250	—
P-33	—	—	—	250

加硫条件 2.5 kg/cm² 蒸気圧 (138°C) 50 分

がゴムによって与えられる。ばねを介して偏心機構が慣性かんに強制外力を作用する。

第 2 図

つりあい質量の支点からの距離を変えたり、また質量の大きさを変えることによってゴムの伸び(振動中心位置)を変えた。ゴムの伸びが変化した際も慣性かんが常に水平位置を中心として振動するようにするためゴムの下端を上下に移動できるようにした。

この振動系の慣性モーメントを調節するために支点の左右等距離の位置に慣性質量をつけてある。左右等距離であるためゴムの伸びには無関係である。

慣性かんの中央が2個の玉軸受(内径8)によってささえられている。この玉軸受部の粘性摩擦は最も損失の少ないゴム(K-1)の内部摩擦の約10%程度である。内部摩擦の小さいゴムにおいてはこの粘性摩擦の補正を行った。

iii) 実験 共振曲線を描き、その共振周波数から動的剛性係数を、共振振幅から内部摩擦を測定し、

温度・共振周波数・強制外力を一定に保ち、振動中心を変化せしめた時これらがどのように変化するかを測定した。ただし、ここで言う剛性係数は見かけの値である。行った実験の実験条件を第2表に示す。

第 2 表

	K-1	K-21'	K-5	K-7
振幅(%)	0.42 ~0.51	0.24 ~0.36	0.76 ~0.96	0.51 ~0.57
温 度	13.9	12.8	19.4	16.1
rpm	236	232	405	320

2. 実験結果

どの種のゴムにおいても、剛性係数および内部摩擦のいずれもがゴムの伸びの増加とともに小さくなるという結果を得た。いまこの一例を第3図に示す。

第 3 図

ゴム弾性論によれば、カーボンブラックを含まない加硫ゴムが準静的に、しかも一様なひずみ状態で伸長する場合の応力 σ と伸長比 λ との関係は

$$\sigma = G \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。この式によって規定せられる σ - ϵ 曲線(ただし $\epsilon = \lambda - 1$)は非直線的であり、したがって剛性係数は ϵ の関数となる。すなわち

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = G \left(1 + \frac{2}{\lambda^3} \right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

これらの式は 20~30% の伸張まで実験と良く一致することは周知のとおりである。

さて筆者らがここで扱う問題はこのような理想的な場合にくらべて、(a) 接着型ゴムであるためひずみ状態が一様でない。(b) 振動中心位置まで変形する過程は準静的な過程であるが剛性係数として取り扱うものは動的なものである。(c) 内部摩擦という新しく考慮すべき対象が存在する。(d) K-1以外の材料ではカーボンブラックの存在のために理想ゴム弾性理論では取り扱えない等の諸点で異なっている。

いま動的剛性係数が振動中心によって変化するようすを明りょうに示すために無次元量として表わそう。ただしゴムの伸びが0の場合の実験を行うことが出来なかったの、ここでは5%の伸びにおける動的剛性係数を100として表わすことにする。行ったすべての実験結果を第4図に示す。横軸は、振動中心位置(static strain)である。なお同時に比較のため(2)式

第4図

の値を点線で記入してある。図に見るように実験結果はすべて点線よりも下に存在する。K-1はカーボンブラックを含んでおらず、したがって理想ゴム弾性と考えられるから、K-1の曲線と点線との差は上述の(a), (b)の2点によるものと思われる。各種のゴムにおいてこわさの変化するようすはそれぞれ異なっているが一般に「かたい」ゴムほど変化の割合が大きいようである。このかたさはカーボンブラックの粒子の大きさや量等によってきまるものである。いまこの変化の

第5図

割合とゴムのかたさとの関係を定量的にはあくするため、5%の伸びにおける動的ばね定数を横軸に、第4図の10%伸びにおける縦軸の値と、100との差を縦軸にとった図が第5図である。結果は偶然にも直線的関係となった。このような関係を理論的に導くことは不可能であり、多くの実験結果が望まれる。

さて内部摩擦 $\eta\omega$ の変化率を動的剛性係数 E_d の変化率とくらべると、すべての材料において両者は一致していることを発見した。この一例を第6図に示す。

第6図

$\eta\omega/E$ なる量は loss factor と呼ばれる量であるが、この loss factor は振動中心に依存せず常に一定であるということが見出されたわけである。このような簡単な関係の存在は興味あることであり、また実際に防振ゴムの設計を行う際に非常に有用な関係である。

次に静的な剛性係数がゴムの伸びに対してどのように変化するかを見るため、K-1の荷重伸長曲線を描いた。これを第7図に示す。○印の点は加荷時の測定点であり①印は減荷時の測定点である。荷重の変化の速さは、最大荷重に達するのに約4時間という程度である。加荷時の経路と減荷時の経路は図に見るよう

第7図

致している。この曲線上の各点におけるこの曲線のこう配から剛性係数ひずみ曲線を描き、上と同様に5%伸びにおける剛性係数を100として表わすと、第4図のK-1の曲線と一致した。

カーボンブラックを含んだゴムにおいては静的な加荷、減荷曲線(重荷-伸長図上の)が履歴曲線となるため、静的剛性の変化を見るのに、K-1のような簡単な

方法を採用することは出来ない。ちょうど振動試験を行ったと同様に、種々の伸びの位置を中心に振動的に微小振幅で伸長させ、その時の履歴曲線から静的剛性を求めねばならない。この場合の静的剛性の計算はヒステリシスの骨にクロッターの方法を適用することによってできる。履歴曲線の面積を測定すれば内部摩擦を計算できるがここでは剛性係数のみを求めた。K-21' について静的剛性係数を求め、これを第4図にプロットした所(△印で示す)、やはり振動試験結果の曲線とほぼ一致した。

このように静的剛性と伸びに対する変化率が一致するという事実は非常に興味あることである。上述した $\eta\omega/E$ がゴムの伸び(振動中心)によらないという事実と、この事実とは一二の仮定を設ければ説明出来る。これを次節で述べる。

3. 考 察

筆者らは以前から非線形的挙動を呈する粘弾性体として粘塑弾性体の概念を提案して来た。これによってカーボンブラックを含んだ加硫ゴムの呈する動的性質の特異な振幅依存性を良く説明することができた。ところが粘塑弾性体の呈する非線形性は「動的性質は振幅によっては変るが、振幅が一定であるならば振動中心位置には無関係である。」という性質のものであった⁽¹⁾。したがって上述の実験結果(振動中心依存性)を粘塑弾性理論で説明することはできないのである。(線形粘弾性理論ではもちろん出来ない。)

この振動中心依存性という非線形特性は

1. 大変形であるため
2. ひずみ状態が一樣でないため

にひきおこされたものであって、いわゆる有限変位論によらねば解析することができないのである。しかしカーボンを含んだゴムに対しこの理論を適用し解析することは不可能に近いのである。そこで第4図の曲線の形を定めることは実験に頼らざるを得ない。ここではただ、動的剛性係数と内部摩擦と静的剛性とがすべて同一曲線となることについて次のような大まかな考察を行った。

いま微小変形の範囲で荷重 P と変形 x との間の関係を

$$x = f(P) \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表わしておく。粘弾性体の場合には(3)式の中に時間 t が explicit に入り、純履歴特性体の場合には $f(P)$ は一価関数ではなくなる。粘塑弾性体の場合にはこの両者の性質をもっている。このような複雑なものを、いま簡単に形式的に(3)式で表わしておく。いま扱っている材料は、振動中心位置が微小な範囲で変化してもその振動特性は変化しないものであるとしよう。線形粘弾性体や純履歴特性体や粘塑弾性体はこのようなものである。

さて P が大きくなると x が大きくなるが、その際

の変形は上述したように有限変形であるため(3)式によって期待されるものとは異なる。

いま真の変形量を y と記すならば

$$y - x > 0 : \text{引張り}$$

である。

さてここで「 y と x との差は x の関数である」と仮定しよう。すなわち

$$y = x + F(x) \quad \dots\dots\dots (4)$$

とおくことにする。 $F(x)$ は連続な一価関数であろう。また F なる関数形はその材料の力学的諸定数や試験片の形・拘束条件などによって変化するものである。

さて

$$P = 4P \sin \omega t$$

なる周期的力がゴムに作用する場合を考えてみる。このような周期的な力が作用すれば変位も定常状態において周期的となる。この時の $P-x$ 曲線はヒステリシスを描くがこれを

第 8 図

を描くがこれを第8図のAで表わしておく。するとこの材料のばね定数は、ループAの骨(ヒステリシスの肉厚の midpoint を結んだ曲線であって、ここでは鎖線で表わしてある)のこう配によって決定される。各

点におけるこう配がちょうど n 倍である曲線(を骨とするループを描く材料)のばね定数は n 倍となる。

また $c\omega$ はヒステリシスの面積 W から

$$c\omega = W/\pi X^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

によって決定される。ただし X は振幅である。内部摩擦 $\eta\omega$ は $c\omega$ に(高さ)/(断面積)を乗ずれば求められ、動的剛性係数はばね定数に同じものを乗じて得られる。これは周知のとおりである。

さて

$$P_0 + 4P \sin \omega t$$

なる力が試験片に作用した場合について考えよう。ただし $P_0 \gg 4P$ とする。(3)式によって期待される履歴曲線は第8図BのようにAループを平行移動したものとなる。所が実際の変形は(4)式の y で与えられるのであるから、履歴曲線は第8図B'のごとくである。さてヒステリシスB'の骨のこう配はヒステリシスB(したがってまたヒステリシスA)の骨のこう配の

$$1 / \left\{ 1 + \frac{dF}{dx} \Big|_{x_0} \right\} \text{ 倍}$$

となる。すなわち剛性係数がこの割合で小さくなるのである。

一方内部摩擦 $\eta\omega$ についてB'とB(A)を比較する

と, やはり B' が B の

$$1 / \left\{ 1 + \frac{dF}{dx} \bigg|_{x_0} \right\} \text{ 倍}$$

になっていることが(5)式より計算される。ここで x_0 は第8図に示すものである。

かくして $\eta\omega/E$ が振動中心位置にかかわらず一定であるという実験結果を説明することが出来た。また静的剛性と動的剛性についての第4図の曲線が一致することは, $F(x)$ なる関数形が同一試験片(同一材料・同一の形・同一拘束条件)であれば変化しないとするならば上述の理論で説明される。

しかし同一試験片であれば $F(x)$ なる関数形が変化しないと言えるかどうかはわからない。たとえば温度が変わったり, あるいは振動中心位置を変化さす速さが変わったりすれば $F(x)$ の関数形が変わるかもしれない。筆者らの行った実験ではすべての実験が同一温度であり, また静的な場合も動的な場合も振動中心位置を変化させる速さは, おおよそ同一であったか

ら, たとえ $F(x)$ の関数形が温度や振動中心を変化さす速さによって変るとしても, 静的と動的の第4図の曲線は一致するはずである。

筆者らの実験では共振法を採用したため, 本節の説明にあったように厳密に ΔP という一定の振幅の外力が作用したのではないが, その変化は微小なものであって実験結果に影響を与えるものではないであろう。

終りに臨み, 終始御指導・御助言をいただいている京都大学教授国井修二郎博士に感謝の意を表す。また実験に際し協力下さった舛谷嘉克氏・京都大学工学部学生堤淳雄・藤原恒昭の両君に感謝の意を表す。また防振ゴム試料の製作について住友電気工業会社ならびに朝日金属会社の絶大なる御支援を得ていることに対し厚く感謝の意を表す。

文 献

- (1) 榎木・得丸, *Proc. of the 5th Japan National Congr. for Appl. Mech.* (1955).

621.165-226.2:539.431

シュラウドを有するタービン翼の屈曲振動について*

藤 野 勉** 河 野 恵 祐***

The Vibration of Turbine Blades with Shroud

by Tsutomu Fujino and Keisuke Kōno

We experience sometimes the failure of turbine blades of about tencentimeter long caused by fatigue due to the vibration. The cause of this phenomenon is considered to be due to the resonant vibration of the fixed supported normal vibration of the blade system, whose blades are interconnected by a shroud on their top ends, excited by the periodic force owing to the wake of steam flow passed the nozzle. When the length of the blades becomes the length above mentioned, the resonance occurs most probably.

1. 緒 言

タービン翼はノズル後流による周期的強制力を受け疲れ破損を起すことがあるが戦前翼長 10 cm 前後の翼が最も事故を生じやすかった⁽¹⁾。本論文はこの原因に対する理論的考察で, 次の理由によるものと思われる。タービン翼は 10 枚前後の翼がその頂部をシュラウドにて結合され一つの振動系を構成している。これを翼群と呼び流体力学的意味の翼列と区別する。シュラウドは屈曲変形は行うが, 長さ方向の伸びは省略出来る。ゆえに, 翼群の頂部の変位は各翼について任意

の値をとることは許されない。このことより先端自由型⁽²⁾の他に先端支持型の固有振動の存在が導かれる。

第1図 翼長に対する破損ひん度曲線

一般に n 枚の翼をもって構成される翼群においては任意の次数に属する 1 個の先端自由型と $(n-1)$ 個の先

* 昭和 30 年 9 月 7 日 第 5 回応用力学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和 31 年 12 月 14 日。

** 正員, 三菱造船会社。

*** 三菱造船会社。