621.891:532.516.5

すべり軸受の強制給油量の計算式*

平野 富士夫** 小代 伸 博***

Oil-Flow Coefficient of Pressure-Fed Journal Bearing

by Fujio HIRANO and Nobuhiro SHŌDAI

Using conformal representation, the oil flow coefficient of the pressure-fed journal bearing with an axial oil groove is calculated. Though the graphical conformal mapping by Wilcock and Rosenblatt gives merely the data for particular forms of the groove, the coefficient for any value of l/L and b/L can be obtained by this analytical method where l and b are the length and width of the groove, respectively and L is the axial length of the bearing. And also the coefficient for nearly circular hole is simply calculated.

緒 言

すべり軸受が高速になると、発生熱の除去を有効にして温度上昇を防ぐ必要がある。軸受面からの熱放散だけではこのためには不十分であるから、油量による熱除去が問題になる。軸受から流出する油量は 2 部分よりなり、一つは軸の回転に伴うもので、他は強制給油圧によるものである。

前者による不足分は後者によって補わなければならないが、給油の穴やみぞの形状によって油量が大きく変化するので、正しい計算式の係数が見出されていない。この方面の研究としてはたとえば Clayton⁽¹⁾, McKee⁽²⁾の実験があり、また Wilcock & Rosenblatt⁽³⁾は図式的に等角写像を用いて、いくつかの給油みぞの形状についての係数を見出している。本報はさらに一般的な油量計算式の係数を解析的に求めたものである。

1. 記 号

Q : 油量	cm ³ /s
p : 軸受内油圧	kg/cm ²
p_1 : 強制給油圧	kg/cm ²
D : 軸受直径	cm
L : 軸受の軸方向の長さ	cm
l : 給油みぞの長さ (x 方向)	cm
b : 給油みぞの幅 (y 方向)	cm
C : 直径すきま	cm
Δr : 半径すきま $= C/2$	cm
h : 油膜厚	cm
h_1 : 給油位置における油膜厚	cm

e : ジャーナル位置偏心率	cm
n : 偏心率 $= e/\Delta r$	
φ : 最小油膜厚の位置と荷重との角度	
φ_1 : 給油位置の角度 (荷重方向より回転方向と逆に測った)	
μ : 油粘度	kg·s/cm ²
N' : 回転数	rev/s

2. 軸受油量の一般式

軸の回転に伴って軸受の両端から流出する油量は

$$Q_0 = q \cdot (\pi/4) N' DLC \quad \dots\dots\dots (1)$$

の形で表わされ、係数 q の値は図表で与えられていることが多い。たとえば Wilcock & Booser⁽⁴⁾の最近の著書では係数 q の値が Sommerfeld 変数 $S = (D/C)^2 \cdot (\mu N'/p)$ 、あるいは n, φ との関係で詳細に求められるようになっている。これに対し油圧 p_1 による強制給油の油量は

$$Q_1 = p_1 (\Delta r)^3 V / (12 \mu) \quad \dots\dots\dots (2)$$

の形になるが、係数 V は給油穴が円穴⁽⁵⁾の場合や円周方向みぞ⁽⁶⁾の場合には求められている。しかし実際に広く採用されている軸方向みぞについては Wilcock も二三の例をあげたに過ぎず、 b/L , l/L と V との関係は一般には求められていない。

この Q_0 と Q_1 との和が軸受より流出する全油量であって、これから油の温度上昇が

$$\Delta T = (H - \Phi) / (\gamma c_p Q) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$Q = Q_0 + Q_1 \quad \dots\dots\dots (4)$$

で計算される⁽⁷⁾。ここに H は軸受における発生熱、 Φ は油以外による放散熱量、 γ は油の比重、 c_p は比熱である。したがって V の取りかたが確定していないと温度上昇の推定値にかなりの誤差がはいりこむことになるわけである。

* 昭和 31 年 6 月 7 日 第 619 回講演会において講演，
原稿受付 昭和 32 年 7 月 25 日。

，* 正員，九州大学工学部。

3. 強制給油量の計算式

強制給油量は, ジャーナルの運動に伴わない油量であって, 2面が相対運動をしていないとした場合に給油圧力のみによって流出する油量である. 圧力こう配 $\partial p/\partial x$ がある場合に距離 h を隔てた2面間を流れる粘性流体の速度はよく知られているように

$$u_{\max} = -(h^2/8\mu)(\partial p/\partial x)$$

を最大値とする放物線分布であるから, これを h の間で積分して

$$Q_x = (2/3)hu_{\max} = -(h^3/12\mu)(\partial p/\partial x) \quad \dots\dots(5)$$

で x 方向の油量が計算される⁽⁸⁾. 同様に y 方向では

$$Q_y = -(h^3/12\mu)(\partial p/\partial y) \quad \dots\dots(6)$$

となる. 連続の式

$$(\partial Q_x/\partial x) + (\partial Q_y/\partial y) = 0$$

を満足せしめるため流れ関数 ψ を導入すれば,

$$Q_x = \partial\psi/\partial y, \quad Q_y = -\partial\psi/\partial x \quad \dots\dots(7)$$

である.

ここで h は一般にはジャーナルと軸受が同心ではないので一定ではない. これを一定として取り扱わないと計算が困難になるので, Wilcock-Rosenblatt は五つの理由を挙げて $h = \text{const.}$ とみなしてよいことを述べている⁽⁹⁾. そのうちでも特に考えられるのは油の流出の大部分が みぞの附近で起ることである. したがって円周方向に長い みぞを除外すれば h として みぞの部分の油膜厚 h_1 を取ってよいであろう.

このように考えれば, (5), (6) においてさらに μ を一定として

$$p - i(12\mu/h_1^3)\psi$$

が $z = x + iy$ の解析関数として取り扱うことになる. すなわち

$$p - i(12\mu/h_1^3)\psi = f(z) \quad \dots\dots(8)$$

と表わすことができる.

境界条件としては みぞの周辺で圧力が p_1 , 軸受の端にて圧力 0 とすべきであるが, 円周方向については軸受は有限の長さかあるいは閉じているので, 実際はかなり数学的取扱いが複雑である. しかし上述のように油膜厚が一定の h_1 であると仮定しているので, みぞから離れたところの油の流れはすでに実際と異なっており, またたとえ異なっているとしても大部分の油はみぞ附近から流出するので, 軸受の端の長さを土方向に ∞ と仮定する⁽¹⁰⁾. このように単純化すれば, 第2図の z 平面において境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} G_1 \text{ 上にて } \Re f(z) = p_1 \\ G_2 \text{ 上にて } \Re f(z) = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots(9)$$

と表わすことができる.

ここで写像関数

$$z = \varphi(\zeta) \quad \dots\dots(10)$$

第1図
油みぞの位置

第2図 写像関係図

によって z 平面の境界 G_1, G_2 を ζ 平面の同心円境界 Γ_1, Γ_2 に移す. ただし Γ_1, Γ_2 はそれぞれ半径 1, R の円で, Γ_1, Γ_2 に囲まれた領域内にて $\varphi(\zeta)$ は正則とする.

$$f(z) = f\{\varphi(\zeta)\} = F(\zeta) \quad \dots\dots(11)$$

とすれば, 境界条件 (9) は

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_1 \text{ 上にて } \Re F(\zeta) = p_1 \\ \Gamma_2 \text{ 上にて } \Re F(\zeta) = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots(12)$$

となる.

この条件を満たす $F(\zeta)$ は

$$F(\zeta) = p_1 \log(R/\zeta) / \log R \quad \dots\dots(13)$$

である. (8) より

$$\begin{aligned} -(12\mu/h_1^3)\psi &= \Im f(z) = \Im F(\zeta) \\ &= -p_1 \Im \log \zeta / \log R \end{aligned}$$

であるから,

$$\psi = (p_1 h_1^3 / 12\mu) (\theta / \log R) \quad \dots\dots(14)$$

となる. ここに $\theta = \Im \log \zeta = \arg \zeta$ である.

z 平面における2点 A, B をつなぐ線を通過する油量は

$$Q_1 = \int_A^B (Q_x dy - Q_y dx) = \int_A^B d\psi$$

と表わせるから, G_1 から流出する油量すなわち ζ 平面の Γ_1 からの流量は

$$Q_1 = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\psi = \left(\frac{\pi}{6 \log R} \right) \left(\frac{p_1 h_1^3}{\mu} \right) \quad \dots\dots(15)$$

となる.

第1図において

$$h_1 = 2r[1 - n \cos(\varphi + \varphi_1)] \quad \dots\dots(16)$$

であるが, n と φ の間の関係すなわち軸心の軌跡を半円で近似して

$$n = \cos \varphi \quad \dots\dots(17)$$

とすれば,

$$h_1/2r = 1 - n^2 \cos \varphi_1 + n\sqrt{1-n^2} \sin \varphi_1 \quad \dots\dots(18)$$

となる. (15) を書きなおして

$$Q_1 = 8q_1(p_1 h_1^3/\mu) = q_1(h_1/2r)^3(p_1 C^3/\mu) \quad \dots\dots(19)$$

$$q_1 = \pi/(48 \log R) \quad \dots\dots(20)$$

したがって, この係数 q_1 を計算すればよいこととなる. (2) 式の Wilcock の係数 V との関係は

$$V=96q_1(h_1/4r)^3 \quad \dots\dots\dots(21)$$

である。

4. 写 像 関 数

q_1 を計算するには (20) 式の R とみぞ形状の関係が付けばよいのであるから、問題は写像関数 $z=\varphi(\zeta)$ を見出すことに帰着する。そのために第2図の媒介平面 u, t, w の助けをかりる。

まず ζ 平面の単位円 Γ_1 を t 平面の単位円に、外周円 Γ_2 を t 平面の実軸の左右の半無限切断(太線)に対応せしめ、I II III IV において正則なるような写像関数は u 平面を媒介として次のように表わすことができる。

$$t=(1+k \operatorname{sn} u)/dn u \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$u=(2K'/\pi) \log \zeta \quad \dots\dots\dots(23)$$

(23) において $\zeta=R$ には $t=(1+k)/k'$, $u=K$ が対応するから

$$\log R=\pi K/(2K') \quad \dots\dots\dots(24)$$

をうる。ここに $\operatorname{sn} u$, $dn u$ は k を母数とする Jacobi のだ円関数で

$$K=\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}},$$

$$K'=\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 x}}=K(k')$$

$$k^2+k'^2=1$$

である⁽¹²⁾。したがって (20) より

$$q_1=K'/(24K) \quad \dots\dots\dots(25)$$

となり、(25) 式の q_1 が k の既知関数となるから、結局みぞの形状と k との関係が付けばよいこととなる。ただしみぞの形は簡単のため x, y について対称としておく。

そのために t 平面の単位円外で正則な関数

$$\omega(t)=t+(m_1/t)+(m_3/t^3)+(m_5/t^5)+\dots\dots\dots(26)$$

を用いて w 平面に写像する。 t 平面の切断の両端 $\pm(1+k)/k'$ には w 平面の切断の両端 $\pm\omega_*$ が対応する。ここで

$$\omega_*=w\{(1+k)/k'\} \quad \dots\dots\dots(27)$$

この w 平面と実際の z 平面とは

$$z=(L/\pi) \sin^{-1}(\omega(t)/\omega_*) \quad \dots\dots\dots(28)$$

の関係にある。これより w 平面の切断が z 平面の軸受の端 G_2 に対応する。したがって $\omega(t)$ を適当に選んで Γ_1 に対応する G_1 がみぞ形状になるようにすればよいこととなる。

5. 給油みぞの形状と係数 q_1

第2図の z 平面において b/L が一定の場合 q_1 が l/L によってどう変化するかを計算してみよう。

$$\left. \begin{aligned} t=1, \quad \omega(1) &\equiv \omega_1, \quad z=l/2 \\ t=i, \quad \omega(i) &\equiv i\omega_i, \quad z=ib/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

がそれぞれ対応関係にあるから、(28) より

$$\left. \begin{aligned} \omega_1/\omega_* &= \sin(\pi l/2L) \equiv S \\ \omega_i/\omega_* &= \sinh(\pi b/2L) \equiv \mathcal{E} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

となる。

最も簡単な場合として w 平面でだ円を表わす関数

$$\omega(t)=t+(m/t) \quad \dots\dots\dots(31)$$

を取れば、

$$\omega_1=1+m, \quad \omega_i=1-m,$$

$$\omega_*=\{(1+k)+m(1-k)\}/k'$$

であるから、(30) に代入すれば

$$S=(1+m)\mathcal{E}/(1-m),$$

さらに $k'/\mathcal{E}=\{(1+m)/(1-m)\}+k$

となり、 m を消去すれば

$$S=k'-k\mathcal{E} \quad \dots\dots\dots(32)$$

をうる。あるいは (32) より

$$\left. \begin{aligned} k &= (\sqrt{\mathcal{E}^2+1}-S^2-S\mathcal{E})/(\mathcal{E}^2+1) \\ k' &= (\mathcal{E}\sqrt{\mathcal{E}^2+1}-S^2+S)/(\mathcal{E}^2+1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

となり、(25) より

$$q_1=\frac{1}{24} \cdot \frac{K\{(\mathcal{E}\sqrt{\mathcal{E}^2+1}-S^2+S)/(\mathcal{E}^2+1)\}}{K\{(\sqrt{\mathcal{E}^2+1}-S^2-S\mathcal{E})/(\mathcal{E}^2+1)\}} \quad \dots\dots\dots(34)$$

にて、給油みぞの寸法 l/L , b/L と q_1 との関係が付いたことになる。

実際の給油みぞでは幅 b の両辺は平行直線であるのが普通であるから、

$$\omega(t)=t+(m/t)-(n/t^3) \quad \dots\dots\dots(35)$$

の形を取り、 $t=\pm i$ における (28) 式の曲率半径が ∞ になるように n を決定する。 t 平面の単位円に対応する関数 $z=z(t)$ の表わす曲線の曲率半径 ρ は

$$1/\rho=[1+\Re(tz''/z')]/|z'|$$

となるから、 $t=\pm i$ において $1+\Re(tz''/z')=0$ がこのための条件である。(28) を入れると

$$1+\Re\left(\frac{t\omega''}{\omega'}+\frac{t\omega\omega'}{\omega_*^2-\omega^2}\right)=0$$

となり、(35) を入れて ω_* を上式より求めると

$$\omega_*^2=\{(1-m-n)(1+m+3n)^2/(1-m-9n)- (1-m-n)^2\}$$

をうる。また (27), (35) より

$$\omega_*=[(1+m)+k(1-m)-n(1-k)^2/(1+k)]/k'$$

となる。ここで

$$(1+m)/(1-m)=M, \quad (1-m)/n=N \quad \dots\dots\dots(36)$$

と置けば、上式は

$$(\omega_*/n)^2=\{(N-1)(MN+3)^2/(N-9)- (N-1)^2\} \quad \dots\dots\dots(37)$$

$$\omega_*/n=[N(M+k)-(1-k)^2/(1+k)]/k' \quad \dots\dots\dots(38)$$

となる。さらに (30), (35) より

$$\omega_*/n=(N-1)/\mathcal{E} \quad \dots\dots\dots(39)$$

$$\omega_*/n=(MN-1)/S \quad \dots\dots\dots(40)$$

をうる。これらの式より M, N したがって m, n が求められるから (35) によるみぞの形状が計算できる。すなわち

$$N-1 = \frac{1-m-n}{n} = \frac{4[\Theta^2 + (1+k+k'\Theta) + \sqrt{(\Theta^2+1)\{\Theta^2 + (1+k+k'\Theta)^2\}}]}{(1+k)(k+k'\Theta)^2}$$

$$MN-1 = \frac{1+m-n}{n} = (N-1)\left(\frac{k'}{\Theta} - k\right) - \frac{4k}{1+k}$$

またみぞの幅比 b/L と長さ比 l/L との関係は

$$S = \Theta(MN-1)/(N-1) = (k' - k\Theta) - \{4k/(1+k)\}\{\Theta/(N-1)\} \quad \dots\dots\dots(41)$$

より

$$S = [(1+k)(k+k'\Theta) - k\sqrt{(\Theta^2+1)\{\Theta^2 + (1+k+k'\Theta)^2\}}]/\Theta \quad \dots\dots\dots(42)$$

となる。このようにして計算した給油みぞの形状の例を第3図に示すが、実際の場合に近い形が得られている。

第3図 油みぞの形状

第4図 油みぞ形状と係数 q_1 との関係
(◎印は Wilcock-Rosenblatt による図式計算値)

b/L したがって (30) より Θ がきわめて小さい場合には (42) は

$$S \approx k' - k\Theta \left\{ 1 + \frac{k^2}{2(1+k)} \right\} \quad \dots\dots\dots(43)$$

で近似される。さきに求めた (32) 式との差は $k < 1$ であるからわずかであって 3 に述べた仮定のことを考えると実際上は (32), (34) で計算してよいこととなる。

(42) 式より k を求め (25) にて q_1 を計算した結果を第4図に示す。

6. Wilcock の計算値との比較

Wilcock-Rosenblatt は、図式的に等角写像を用いて、みぞから出る流線の数と等圧線の数の比を求めているが、これは本論文の $4K'/K$ に相当し、(25) 式にしたがってその $1/96$ が q_1 の値になる。第1表にその計算結果を示す。

第1表 Wilcock-Rosenblatt による図式計算値

l/L	b/L	$4K'/K$	q_1
0.1	1/10	2.56	0.0266
0.5	1/12	4.66	0.0485
0.96	1/6	16.2	0.169

これを第4図に記入しているが、いうまでもなく解析的に求めた結果とよく一致している。

次に円孔に対しては (30) 式において

$$b=l=d \quad \dots\dots\dots(44)$$

として、(34) を用いて計算して近似値が得られるが、その結果を第5図に示す。Wilcock の著書には Poritsky による計算値として $V=96q_1$ の値が記されているが⁽¹³⁾、われわれの計算値との一致はきわめて良好であって図上での差は認められない。

第5図 油穴に対する係数 q_1

結 言

以上のように解析的に強制給油量の計算式の係数を求めることができたが、油膜厚一定の仮定はいまのところではやむをえないとは言え検討する必要がある。前にも述べたように油量の大部分は給油みぞの端部附近から流出するので、 $b < l$ すなわち、軸方向のみぞの場合にはこの取扱いも許されよう。 $b > l$ すなわち円周方向みぞの場合には油膜厚がみぞに沿って変化するので、この計算結果は適用しにくいと思われる。特定の位置の油膜厚を取って置換えることもできると考えられるが、これについては別に改めて取扱うことにする。

文 献

- (1) Clayton, *Proc. I.M.E.*, Vol. 155, p. 41 (1946).
- (2) McKee, *ASME*, Vol. 74, p. 841 (1952).
- (3) Wilcock & Rosenblatt, *ASME*, Vol. 74, p. 849 (1952).
- (4) Wilcock & Booser, *Bearing Design and Application*, (1957).
- (5) 同上 p. 250.
- (6) Shaw & Macks, *Analysis and Lubrication of Bearings*, (1949), p. 257.
- (7) 文献 (4), p. 220.
- (8) たとえば、文献 (4), p. 194.
- (9) 文献 (3).
- (10) 文献 (2) の Wilcock & Rosenblatt による討論.
- (11) 同上, Wilcock & Rosenblatt は $\varphi_1 = 180^\circ$ として $h_1/\Delta r \approx 1 + \mu^2$ と取っている.
- (12) たとえば、林桂一, 高等函数表.
- (13) 文献 (5).