539.384.6 : 539.414

ねじりを受ける半円筒殻の強さ*

(薄肉円筒の一般的解法 例題 3)

溝 口 孝 喜**

Strength of Semi-Circular Cylindrical Shells under Torsion
(General Theory of Cylindrical Shells, Statics Example 3)

by Kōki MIZOGUCHI

In this paper, the strength of a semi-circular cylindrical shell subjected to a pair of twisting moments on its straight edges is treated as an example, which cannot be solved exactly by the Timoshenko's equations, utilizing the author's fundamental differential equation in a single displacement.

1. 緒 言

有限長さの半円筒殻が、その直線端に 1 対のねじり力を受けた場合の応力変形のありさまを筆者の導いた基礎微分方程式⁽¹⁾の有効な利用例として、また Timoshenko の式、または Love の第 1 近似解の式では矛盾が生じ、完全に解き得ない例として解いたものである。

2. 解 法

第 1 図に示したように両直線端にはフランジが取り付けられており、問題を簡単にするため、このフランジは次の性質を有するものとする。

1. 不伸張である。
2. 曲げおよびねじりに対する抵抗は零である。

第 1 図

ねじり力 M は図のように、このフランジ面内に互に反対方向に作用するものとする。

$2l$ をこの殻の長さとし、 $x = \pm l$ における両端は自由であるとすれば、周囲条件として次の諸式をうる。

- 1) $x = \pm l$ で

$$T_x = 0, S' - \frac{\mathfrak{M}}{a} = 0, N_x + \frac{\partial \mathfrak{M}}{a \partial \theta} = 0, M_x = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

- 2) $\theta = \pm \pi/2$ で

$$\left. \begin{aligned} T_\theta = 0, u = 0, M_\theta = 0, w = \alpha_0 x \\ \int_{-l}^l \left(N_\theta + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \right) x dx - 2 \mathfrak{M}_{Dl} - 2 \mathfrak{M}_{Bl} = M \\ \int_{-l}^l \left(N_\theta + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \right) x dx - 2 \mathfrak{M}_{Cl} - 2 \mathfrak{M}_{Al} = -M \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (\theta = \pi/2) \\ (\theta = -\pi/2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに α_0 はある定数であり、これら諸式の文字の意味は文献 (1) に示した筆者の前論文のものと同じとする。この条件 (1), (2) は解の唯一性に対して十分条件であることが ひずみエネルギー の式から証明できる⁽²⁾。

曲面上に外力の作用しないときの円筒の基礎微分方程式は筆者により次のように導かれている⁽¹⁾。

$$\begin{aligned} & A \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + \frac{4B}{a^2} \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial \theta^2} + \frac{6C}{a^4} \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \theta^4} \\ & + \frac{8-2\nu^2}{a^4} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{6L}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & + \frac{4}{a^6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ & + \frac{1}{a^8} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ & = 0 \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } A \equiv 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2, \quad B \equiv 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \\ C \equiv 1 + \frac{1-\nu^2}{72} \left(\frac{h}{a} \right)^2, \quad L \equiv 2(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 A \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

(3) の解として次のものを得る

ここに $\bar{\alpha}, \kappa_3, \kappa_4$ は任意定数, λ は $\lambda = \alpha + i\beta$ なる形の複素数で

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{B}{Aa^2} \left[\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)} A - 1 \right] \\ \beta^2 &= \frac{B}{Aa^2} \left[\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)} A + 1 \right] \\ U &\equiv 1 + \frac{1+(1-\nu)^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

また $\Re$ は, これに続く関数の実数部を意味し, $\Im''$ は同一関数の虚数部を意味するものとする。

(5) の第1項が (3) の解であることは (3) の形から直ちにわかる。また第2, 第3項も解であることは, 筆者の前論文⁽³⁾から直ちにわかる。

(5) に対応する他の変位 u, v は $w-u$ および $w-v$ の関係式⁽⁴⁾から次のように求まる。

$$u = k - \frac{2V}{B} a \bar{\alpha} \cos \theta - a \bar{\alpha} \theta \cdot \sin \theta$$

$$T_x = \frac{2\nu D \bar{\alpha}}{a^3 B} x \cos \theta + \frac{12D}{h^2} \left[\kappa_3 \Re \frac{1}{a} \left\{ \frac{(2-\nu)}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^4 + \frac{B}{a^2} (1-\nu^2) \lambda^2 \right\} \sin \lambda x \cos \theta + \kappa_4 \Im'' \right] \dots\dots\dots (9)$$

$$T_\theta = \frac{2D \bar{\alpha}}{a^3 B} x \cos \theta + \frac{12D}{h^2} \left[\kappa_3 \Re \frac{1}{a} \left\{ (1-\nu^2) - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \lambda^4 \sin \lambda x \cos \theta + \kappa_4 \Im'' \right] \dots\dots\dots (10)$$

$$S = -\frac{2\nu D \bar{\alpha}}{a^2 B} \sin \theta - \frac{6(1-\nu)D}{h^2} \left[\kappa_3 \Re \lambda \left\{ \frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^4 + \frac{2(1+\nu)B}{a^2} \lambda^2 \right\} \cos \lambda x \sin \theta + \kappa_4 \Im'' \right] \dots\dots\dots (11)$$

$$M_x = \frac{2\nu D \bar{\alpha}}{a^2 B} x \cos \theta - D \left[\kappa_3 \Re \lambda^2 \left\{ A \lambda^4 + \frac{1}{a^2} (2U + \nu V) \lambda^2 + \frac{(1-\nu^2)B}{a^4} \right\} \sin \lambda x \cdot \cos \theta + \kappa_4 \Im'' \right] \dots\dots\dots (12)$$

$$M_\theta = \frac{2D \bar{\alpha}}{a^2 B} x \cos \theta - D \left[\kappa_3 \Re \lambda^2 \left\{ \nu A \lambda^4 + \frac{1}{a^2} (2\nu U + V) \lambda^2 \right\} \sin \lambda x \cdot \cos \theta + \kappa_4 \Im'' \right] \dots\dots\dots (13)$$

$$\Re = \frac{2(1-\nu)D \bar{\alpha}}{aB} \sin \theta - \frac{(1-\nu)D}{a} \left[\kappa_3 \Re \lambda \left\{ V \lambda^4 - \frac{\nu B}{a^2} \lambda^2 \right\} \cos \lambda x \cdot \sin \theta + \kappa_4 \Im'' \right] \dots\dots\dots (14)$$

ここに $D \equiv E h^3 / 12(1-\nu^2)$ である。

式 (11), (12), (13), (14) を各モーメントの平衡式⁽⁶⁾に代入すれば S', N_x, N_θ の値をうるが, 周囲条件 1),

2) を考えるためには $S' - \Re/a, N_x + \partial \Re / \partial \theta, N_\theta + \partial \Re / \partial x$ なる量が必要であり, これらを求めると次のようになる。

$$S' - \frac{\Re}{a} = -\frac{2(2-\nu)D \bar{\alpha}}{a^2 B} \sin \theta - \frac{6(1-\nu)D}{h^2} \left[\kappa_3 \Re \lambda \left\{ \frac{\nu A}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^4 + \frac{2(1+\nu)BI}{a^2} \lambda^2 \right\} \cos \lambda x \cdot \sin \theta + \kappa_4 \Im'' \right] \dots\dots\dots (15)$$

$$N_x + \frac{1}{a} \frac{\partial \Re}{\partial \theta} = \frac{2(2-\nu)D \bar{\alpha}}{a^2 B} \cos \theta - D \left[\kappa_3 \Re \lambda^3 \left\{ A \lambda^4 + \frac{1}{a^2} \left(4 - \nu + \frac{1-\nu}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right) \lambda^2 + \frac{(1-\nu)^2 B}{a^4} \right\} \cos \lambda x \cdot \cos \theta + \kappa_4 \Im'' \right] \dots\dots\dots (16)$$

$$N_\theta + \frac{\partial \Re}{\partial x} = -\frac{2D \bar{\alpha}}{a^3 B} x \sin \theta + \frac{D}{a} \left[\kappa_3 \Re \lambda^2 \left\{ (2-\nu) \lambda^4 + \frac{1+2\nu}{a^2} \lambda^2 \right\} \sin \lambda x \cdot \sin \theta + \kappa_4 \Im'' \right] \dots\dots\dots (17)$$

$$\text{ここで } I \equiv 1 + \frac{\nu}{6(1+\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \dots\dots\dots (18)$$

したがって周囲条件 1) に対して次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\nu \bar{\alpha} l}{a^3 B} + \frac{12}{h^2} \left[\kappa_3 \Re \frac{1}{a} \left\{ \frac{(2-\nu)}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^4 + \frac{B}{a^2} (1-\nu^2) \lambda^2 \right\} \sin \lambda l + \kappa_4 \Im'' \right] &= 0 \\ \frac{2(2-\nu) \bar{\alpha}}{a^2 B} + \frac{6(1-\nu)}{h^2} \left[\kappa_3 \Re \lambda \left\{ \frac{\nu A}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^4 + \frac{2(1+\nu)BI}{a^2} \lambda^2 \right\} \cos \lambda l + \kappa_4 \Im'' \right] &= 0 \\ \frac{2(2-\nu) \bar{\alpha}}{a^2 B} - \left[\kappa_3 \Re \lambda^3 \left\{ A \lambda^4 + \frac{1}{a^2} \left(4 - \nu + \frac{1-\nu}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right) \lambda^2 + \frac{(1-\nu)^2 B}{a^4} \right\} \cos \lambda l + \kappa_4 \Im'' \right] &= 0 \\ \frac{2\nu \bar{\alpha} l}{a^2 B} - \left[\kappa_3 \Re \lambda^2 \left\{ A \lambda^4 + \frac{1}{a^2} (2U + \nu V) \lambda^2 + \frac{(1-\nu^2)B}{a^4} \right\} \sin \lambda l + \kappa_4 \Im'' \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

(19) の条件のうち独立のものは二つである。すなわち (19) の第 1 式に a を乗じ、第 4 式を辺々引き λ の満たすべき方程式

$$A\lambda^4 + \frac{4B}{a^2}\lambda^2 + \frac{12(1-\nu^2)B^2}{a^2h^2} = 0 \quad (20)$$

を考慮すれば、その左辺は零となることがわかる。また第 2 式から第 3 式を辺々引き上と同様に (20) 式を考慮すればやはり左辺は零となる。すなわち (19) 式の 4 式中第 1 と第 2 式のみが独立である。この関係は $x = \pm l$ の場合のみでなく (20) の関係を利用し、(12) 式を変形すると (9) 式をうる。すなわち

$$aT_x = M_x \quad (21)$$

また (16) 式を変形すると (15) 式の $\sin \theta$ の代りに $-\cos \theta$ を置いたものとなる。すなわち

$$N_x + \frac{1}{a} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(S' - \frac{\mathfrak{M}}{a} \right) \quad (22)$$

これらの性質は殻が全体として完全な平衡状態にあるため成立するもので、もし Timoshenko の式または Love の第 1 近似解におけるように $S = S'$ と取ると法

$$\left. \begin{aligned} A &= (\lambda \bar{\lambda})^2 \mathfrak{S} \left\{ \frac{2-\nu}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^2 + \frac{6(1-\nu^2)B}{a^2} \right\} \left\{ \frac{\nu A}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^2 + \frac{6(1-\nu^2)BI}{a^2} \right\} \lambda \cdot \sin \bar{\lambda} l \cdot \cos \lambda l \\ A_3 &= \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left[\frac{(2-\nu)}{B} \mathfrak{S} \lambda^2 \left\{ \frac{(2-\nu)}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^2 + \frac{6(1-\nu^2)B}{a^2} \right\} \sin \lambda l \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu l}{B} \mathfrak{S} \lambda^3 \left\{ \frac{\nu A}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^2 + \frac{6(1-\nu^2)BI}{a^2} \right\} \cos \lambda l \right] \\ A_4 &= -\left(\frac{h}{a} \right)^2 \left[\frac{(2-\nu)}{B} \mathfrak{R} \lambda^2 \left\{ \frac{(2-\nu)}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^2 + \frac{6(1-\nu^2)B}{a^2} \right\} \sin \lambda l \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu l}{B} \mathfrak{R} \lambda^3 \left\{ \frac{\nu A}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^2 + \frac{6(1-\nu^2)BI}{a^2} \right\} \cos \lambda l \right] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここに $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ (26) である。

次に周囲条件 2) に対してはまず T_θ, M_θ については (10) 式および (13) 式を見れば明らかに満している。また u については (7) 式の第 1 から $\theta = \pm \pi/2$ に対して定数になることがわかる。したがって、これが零になるよう任意定数 k を選ぶことができ、この条件も満しうる。*

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(N_\theta + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \right) x dx &= -\frac{2D\bar{\alpha}}{a^3B} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 dx + \frac{D}{a} \left[\kappa_3 \mathfrak{R} \lambda^2 \left\{ (2-\nu) \lambda^4 + \frac{1+2\nu^2}{a^2} \lambda^2 \right\} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin \lambda x dx + \kappa_4 \mathfrak{S}(\lambda') \right] \\ &= -\frac{4DI^3}{3a^3B} \bar{\alpha} - \frac{2D}{a} \left[\kappa_3 \mathfrak{R} \lambda^2 \left\{ (2-\nu) \lambda^4 + \frac{1+2\nu^2}{a^2} \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{l \cos \lambda l}{\lambda} - \frac{\sin \lambda l}{\lambda^2} \right\} + \kappa_4 \mathfrak{S}(\lambda') \right] \end{aligned} \quad (28)$$

また (14) 式から

$$\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_D = \frac{2(1-\nu)D\bar{\alpha}}{aB} - \frac{(1-\nu)D}{a} \left[\kappa_3 \mathfrak{R} \lambda \left\{ \nu \lambda^4 - \frac{\nu B}{a^2} \lambda^2 \right\} \cos \lambda l + \kappa_4 \mathfrak{S}(\lambda') \right] \quad (29)$$

(28), (29) 式中の κ_3, κ_4 に (24), (25) の値を代入し、複素数の性質を利用し整理すればこの条件式として次式をうる。

$$\begin{aligned} \frac{4D}{a^3B} \bar{\alpha} \left[\frac{l^3}{3} - \frac{6(2-\nu)}{4} (\lambda \bar{\lambda})^2 \left\{ (1-\nu^2) - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \mathfrak{S} \left\{ \frac{(2-\nu)}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^2 + \frac{6(1-\nu^2)B}{a^2} \right\} \right. \\ \times \left\{ \bar{\lambda} l \cos \bar{\lambda} l - \sin \bar{\lambda} l \right\} \sin \lambda l + \frac{6\nu l}{4} (\lambda \bar{\lambda})^2 \left\{ (1-\nu^2) - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \\ \times \mathfrak{S} \lambda \left\{ \frac{\nu A}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^2 + \frac{6(1-\nu^2)BI}{a^2} \right\} \left\{ \bar{\lambda} l \cdot \cos \bar{\lambda} l - \sin \bar{\lambda} l \right\} \cos \lambda l \left. \right] = -M \end{aligned} \quad (30)$$

線の廻りの平衡式が成立せぬため、殻が全体として完全平衡にある本問題のような場合はいかにしても完全解は得られないことになる。

(19) の第 1, 第 2 の条件から κ_3, κ_4 を $\bar{\alpha}$ の関数として解きうる。すなわち第 1, 第 2 を少し変形すれば

$$\left. \begin{aligned} \kappa_3 \mathfrak{R} \lambda^2 \left\{ \frac{(2-\nu)}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^2 + \frac{6(1-\nu^2)B}{a^2} \right\} \sin \lambda l \\ + \kappa_4 \mathfrak{S}(\lambda') &= -\frac{\nu l}{B} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \bar{\alpha} \\ \kappa_3 \mathfrak{R} \lambda^3 \left\{ \frac{\nu A}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^2 + \frac{6(1-\nu^2)BI}{a^2} \right\} \cos \lambda l \\ + \kappa_4 \mathfrak{S}(\lambda') &= -\frac{(2-\nu)}{B} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \bar{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(23) より

$$\kappa_3 = \frac{A_3}{A} \bar{\alpha}, \quad \kappa_4 = \frac{A_4}{A} \bar{\alpha} \quad (24)$$

となり A, A_3, A_4 はそれぞれ次式で表わされる。

* $w = \alpha_0 x$ については (5) 式から明らかに満していることがわかり、しかも

$$\alpha_0 = \frac{\pi \bar{\alpha}}{2} \quad (27)$$

であることがわかる。最後の二つの条件については $N_\theta, \mathfrak{M}$ とも θ に対する奇関数であるから、この二つは同一条件である。(17) 式から

(30) より $\bar{\alpha}$ が定まり, すべての任意定数が求められる, 問題は解けたことになる。

(30) を変形し A, B 等を1とおき, また $\sinh 2\beta l$, $\cosh 2\beta l$ 等は十分大でいずれも $e^{2\beta l}/2$ に等しいと考えられる場合 ((6) 式から普通はこの条件は満たされ

ていることがわかる) に $\bar{\alpha}$ を計算すると次式をうる。

$$\bar{\alpha} = -\frac{M}{4D \left[\frac{1}{3} \left(\frac{l}{a} \right)^2 + \theta \right] \left(\frac{l}{a} \right)} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\theta = \frac{6(1-\nu)(1-\nu^2)l\alpha + \frac{1}{2}\{(2-\nu)^2 + \nu^2\} \left(\frac{h}{a} \right)^2 l\beta \sqrt{3(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 1} - \left(\frac{h}{a} \right) \sqrt{3(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 1} \left\{ \frac{(2-\nu)^2}{2} \left(\frac{h}{a} \right) + \nu^2 \left(\frac{l}{a} \right)^2 \sqrt{3(1-\nu^2)} \right\}}{(1-\nu) \left[3(1+\nu)l\alpha + \left(\frac{h}{a} \right)^2 \cdot l\beta \cdot \sqrt{3(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 1} \right]} \quad \dots\dots\dots (32)$$

なお $\theta=0$ の線で切った半分の平衡を考えれば

$$\int_{-l}^l (T_\theta) x dx = -M \quad \dots\dots\dots (33)$$

となるべきである。念のため (10) 式を用い (33) を計算して見ると (30) 式をうる事がわかる。

3. 内力, モーメント, 変位

(24), (25) の各式をたとえば (10) 式に代入して見ると, 複素数の性質を利用し次のようになる。

$$\begin{aligned} T_{\theta=0} &= \frac{2D\bar{\alpha}}{a^3B} x + \frac{12(2-\nu)D}{a^3B\lambda} \bar{\alpha} \left\{ (1-\nu^2) - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} (\lambda\bar{\lambda})^2 \Im \left\{ \frac{(2-\nu)}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\lambda\bar{\lambda})^2 + \frac{6(1-\nu^2)B}{a^2} \bar{\lambda}^2 \right\} \sin \lambda l \cdot \sin \bar{\lambda} x \\ &\quad - \frac{12\nu D}{a^3B\lambda} \bar{\alpha} \left\{ (1-\nu^2) - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} (\lambda\bar{\lambda})^2 \Im \left\{ \frac{\nu A}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\lambda\bar{\lambda})^2 + \frac{6(1-\nu^2)BI}{a^2} \bar{\lambda}^2 \right\} \lambda l \cdot \cos \lambda l \cdot \sin \bar{\lambda} x \\ &= \frac{2D\bar{\alpha}}{a^3B} x + \frac{12D\bar{\alpha}}{a^3B\lambda} \left\{ (1-\nu^2) - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} (\lambda\bar{\lambda})^2 [(2-\nu)\phi(x) - \nu\psi(x)] \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

とおけば (20) 式から $(\lambda\bar{\lambda})^2 = 12(1-\nu^2)B^2/Aa^2h^2$

$\lambda^2 = 2B/Aa^2 \times [-1 + i\sqrt{3(1-\nu^2)a^2/h^2} \cdot A - 1]$ 等の関係を利用し, $\phi(x), \psi(x)$ の値として次式をうる。

$$\begin{aligned} \phi(x) &= -\frac{3(1-\nu^2)B^2}{Aa^4} \left[2\sqrt{3(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2} A - 1 \left\{ \cos \alpha(l-x) \cosh \beta(l+x) - \cos \alpha(l+x) \cdot \cosh \beta(l-x) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \nu \left\{ \sin \alpha(l-x) \cdot \sinh \beta(l+x) - \sin \alpha(l+x) \cdot \sinh \beta(l-x) \right\} \right] \\ \psi(x) &= -\frac{3(1-\nu^2)B^2}{Aa^4} \left[2I\sqrt{3(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2} A - 1 \left\{ \beta l (\cos \alpha(l-x) \cdot \sinh \beta(l+x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \alpha(l+x) \cdot \sinh \beta(l-x)) - \alpha l (\sin \alpha(l-x) \cosh \beta(l+x) - \sin \alpha(l+x) \cdot \cosh \beta(l-x)) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ (2-\nu) - \frac{\nu^2}{3(1+\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \left\{ \beta l (\sin \alpha(l-x) \cosh \beta(l+x) - \sin \alpha(l+x) \cdot \cosh \beta(l-x)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha l (\cos \alpha(l-x) \cdot \sinh \beta(l+x) - \cos \alpha(l+x) \cdot \sinh \beta(l-x)) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

(35) の形から $\phi(x), \psi(x)$ は x の変化に対し波状を呈することがわかり, また (25) 式から λ には $\sin \lambda l \cdot \cos \lambda l = 1/2 [\sin 2\alpha l - i \sinh 2\beta l]$ を含むから (34) 式の $\phi(x), \psi(x)$ を有する項は $x = \pm l$ より少し内部に入るとその絶対値は急速に小になることがわかる。

他の内力, モーメントも同様に求められ, いずれも軸に沿っての変化は波状を呈することがわかる。このように波状を呈するから, x 軸に沿っての変化のありさまを見るには極値の位置を知る必要がある。たとえば T_θ に対しては (34) 式から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (T_\theta)_{\theta=0} &= \frac{2D\bar{\alpha}}{a^3B} + \frac{12D\bar{\alpha}}{a^3B\lambda} \left\{ (1-\nu^2) - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} (\lambda\bar{\lambda})^2 \\ &\quad \times \left[(2-\nu) \Im \left\{ \frac{(2-\nu)}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\lambda\bar{\lambda})^2 + \frac{6(1-\nu^2)B}{a^2} \bar{\lambda}^2 \right\} \bar{\lambda} \sin \lambda l \cdot \cos \bar{\lambda} x \right. \\ &\quad \left. - \nu (\lambda\bar{\lambda}) \Im \left\{ \frac{\nu A}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\lambda\bar{\lambda})^2 + \frac{6(1-\nu^2)BI}{a^2} \bar{\lambda}^2 \right\} l \cos \lambda l \cdot \cos \bar{\lambda} x \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

しかして前述のように波状は $x = \pm l$ 附近が問題であるから, この附近を考え $\sinh \beta(l+x) \cong \cosh \beta(l+x)$

$\cong e^{\beta(l+x)}/2$ として (36) 式から極値の生ずる位置を求めると, 次のようになる。

$$\tan \alpha(l-x) \cong \frac{\frac{4\nu l^2}{ah} \sqrt{3(1-\nu^2)} \sqrt{3(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 1} - 2(2-\nu) \sqrt{3(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 1} \cdot \beta l - \nu(2-\nu)\alpha l}{\frac{2\nu(2-\nu)l^2}{ah} \sqrt{3(1-\nu^2)} + 2(2-\nu) \sqrt{3(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 1} \cdot \alpha l - \nu(2-\nu)\beta l} \quad \dots\dots\dots (37)$$

ただし、これは $\sinh \beta l$ 等が十分大なることを要するが、(6) 式からこの条件は普通の場合満たされていることがわかる。

他の内力、モーメントに対しても同様にしてその極値の位置を求めることができる。

第 2 図および 3 図における実線は $a/h=50$, $l/a=2$, $\nu=0.3$ と取ったときのおおのの力の軸方向の変化を示したもので、円筒殻の特徴としてこれらの値はみな波状を呈している。また両端 $x=\pm l$ から少し内部に

第 2 図

第 3 図

はいると、そのありさまは不伸張変形にきわめて近づいて来る。このありさまを考えて見るに (5) 式および (7) 式において、 κ_3, κ_4 を係数に持たない項を考えると B および V は (4) 式および (8) 式から 1 にきわめて近く、また g は (8) 式からきわめて $-\bar{\alpha}$ に近い。今これらがそれぞれ 1 および $-\bar{\alpha}$ になった式を考えると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} w &= \bar{\alpha} x \theta \cdot \sin \theta \\ u &= k - a \bar{\alpha} (2 \cos \theta + \theta \cdot \sin \theta) \\ v &= -\bar{\alpha} x (\sin \theta - \theta \cdot \cos \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

(38) 式は $\partial u / \partial x = 0$, $\partial v / \partial \theta + w = 0$, $\partial v / \partial x + \partial u / a \partial \theta = 0$ を満たすから完全な不伸張変形である。しかし前述のように κ_3, κ_4 を係数に持つ項は両端から少し内部にはいると急速に小になる。したがって、この変形は両端附近を除いては全体としてきわめて不伸張変形に近いものであることがわかる。今このような完全不伸張のときの変形、内力の状態を考えて見るに、この場合のモーメントの各式は (12), (13), (14) より次の値であることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{2\nu D \bar{\alpha}}{a^2} x \cos \theta, & M_\theta &= \frac{2 D \bar{\alpha}}{a^2} x \cos \theta \\ \mathfrak{M} &= \frac{2(1-\nu) D \bar{\alpha}}{a} \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

不伸張殻のひずみエネルギー式は一般の場合⁽⁸⁾の特別の場合として次式で与えられる。

$$2W = \frac{1}{(1-\nu^2)D} [M_x^2 + M_\theta^2 - 2\nu M_x \cdot M_\theta + 2(1+\nu)\mathfrak{M}^2] \dots\dots\dots (40)$$

(40) 式に (39) を代入し、殻全体につき積分し、 $\theta = \pm \pi/2$ における外力 M のなせる仕事に等しいと置き $\bar{\alpha}$ が決定出来る。 $M_x, M_\theta, \mathfrak{M}$ が求まれば、これを平衡式に代入すれば T_x, T_θ, S が求まる。この場合 T_θ は一義的に定まるが T_x, S は積分定数に相当する θ の任意関数がはいて来る。これらを求めると次のようになる。

$$\bar{\alpha} = -\frac{M}{4D \left[\frac{1}{3} \left(\frac{l}{a} \right)^2 + 2(1-\nu) \right] \left(\frac{l}{a} \right)} \dots\dots\dots (41)$$

$$T_\theta = \frac{2D\bar{\alpha}}{a^3} x \cos \theta, \quad T_x = -\frac{x}{a} \frac{d}{d\theta} f(\theta), \quad S = f(\theta) \dots\dots\dots (42)$$

ここに $f(\theta)$ は θ のみの任意関数で、これは不伸張殻では変形を伴わずに任意応力を与えることを示す。

(41) 式は殻の薄い場合はほとんど (31) と同一値を与えることは (32) からわかる。 T_θ の値は (10) 式の κ_3, κ_4 を係数に持たぬ項にほとんど等しく、 T_x, S の値としてそれぞれ (9) および (11) の最初の項で $B=1$ としたものを取り、これらを図示したものが図中の点線である。これを見れば両端より少し内部にはいるとほとんど実線に一致するが、両端附近では全く異な

る. (T_x) , $(N_\theta + \partial \mathfrak{M} / \partial x)$ に対しては不伸張論で計算しても大差はない. なお鎖線は, この殻を細く環切りにし, 各環は互に干渉がないものと考えて計算したもので相当な誤差がある.

第 4 図

第4図はモーメントに関する同様な線図で, 点鎖鎖線の意味は第2,3図と同様である. これを見ればモーメントに関しては, 不伸張として計算してもかなり一致することがわかる.

この両端附近の内力の変化, 特に T_θ においてはなほだしい説明として, $\theta=0$ における状態が円周方向に一樣に列んだ軸対称荷重の場合を考えると本計算ときわめて近い値を与える. しかもこの端における T_θ の値は ν の値により敏感に左右されることもこれらの計算から理解できる. この現象は平板の場合⁽⁹⁾と同様端において M_x が急に零となるため局部的な w の急変による. しかし T_θ および M_θ による表面応力を第2, 4図より求める見ると次のようになる.

$$\sigma_t = (T_\theta)/h, \quad \sigma_\theta = 6(M_\theta)/h^2 \quad (43)$$

とすれば

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_\theta} = \frac{h}{6} \left(\frac{T_\theta}{M_\theta} \right) = \frac{h}{6} \cdot \frac{24.15}{0.335l} = \frac{24.15}{201} = 0.1201 \quad (44)$$

すなわち表面応力に対する T_θ の影響は大したものではない.

また S' および $\mathfrak{M}$ の線図は

$$\left. \begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} \left[S + \left(S' - \frac{\mathfrak{M}}{a} \right) \right] \\ \mathfrak{M} &= \frac{a}{2} \left[S - \left(S' - \frac{\mathfrak{M}}{a} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

から簡単に作ることができるので, 記入するのを略した. 第3図における $(S)_{\theta=\pi/2}$ の値と $(S' - \mathfrak{M}/a)_{\theta=\pi/2}$ の値を見れば $\mathfrak{M}$ の値は軸方向に沿いほとんど一定であることがわかる. 本問題は Timoshenko の式または Love の第1近似法では合理的に解けないことを述べたがこれは, この $\mathfrak{M}$ が軸方向に沿いほとんど一定ということに関係している. すなわち Timoshenko の式は法線の回りの平衡が成立せぬため殻が全体として完全な平衡にある限り (Kirchhoff の周囲条件は完全

平衡を与える), Timoshenko の式で合理的に解けるためには

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^l \mathfrak{M} \sin \theta \, dx \, d\theta = 0 \quad (46)$$

なる条件が満たされることが必要である. しかし上述のように $\mathfrak{M}$ は軸に沿いほとんど一定, したがって (46) の関係は満たし得ない. すなわち同氏の式では完全解の得られないことを意味している.

第 5 図

第5図は軸方向に沿っての変位の変化を図示したものである. 図中鎖線の意味は前図の場合と同様であるが点線は実線の約 99.4% となり, ほとんど重なってしまうので記入しなかった. また (w) の値は $(v)_{\theta=0}$ になるように殻を変形させた場合の値である. これは (5) および (7) 式に更に剛体として回転する変位

$$w = cx \cos \theta, \quad u = -ca \cos \theta, \quad v = -cx \sin \theta \quad (47)$$

を加え $(v)_{\theta=0} = 0$ となるよう c を適当に選ばばよい.

この (w) の線図も厳密にはやはり波状を呈しているのであるが, その振幅はきわめて小で図上には書き表わし難いため直線に記入したのである. その性質をしらべて見るに (7) 式より v を求めれば第2項以下は第1項に比し, きわめて小で十分無視できるゆえに (47) を加え端における v が零になるよう c を選べば

$$gl - cl = 0, \quad \text{すなわち} \quad c = g \quad (48)$$

したがって (5) に加うべき (47) の値は $w = gx \cos \theta$ となり, この $\theta=0$ における値に比し (5) 式の $\theta=0$ の値はきわめて小である. また g は (8) によりほとん

ど $-\bar{\alpha}$ であるから w は次の形に書ける。

$$w_{\theta=0} = -l\bar{\alpha} \left[\frac{x}{l} + \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 f \right] \dots\dots\dots (49)$$

(49) 式中の f を x/l に対し図示すると第 6 図のよう

にやはり波状を呈することがわかるが、(49)より、その影響は x/l に比し甚小で、したがって $w_{\theta=0}$ の図示は直線となる。しかしながら T_θ に対する影響は大で第 2 図に示した T_θ の波形は全くこの f による。 f がすなわち前述の M_x が端で急に零となるための局部的 w の変化である。

第 6 図

4. 結 言

本問題は筆者の導いた基礎微分方程式⁽¹⁾の有効な利用の一例で $w = cx\theta \cdot \sin \theta$ のような解はこの微分方程式からきわめて容易に見出される。結論を要約すると次のようになる。

- 1) 本例のような問題は Timoshenko または Love の第 1 近似解では完全な解が得られない。
- 2) 変形は完全な不伸張殻として求めてもきわめてよく一致する。したがってその軸方向に対する変化はほとんど直線的である。
- 3) モーメントは不伸張殻として求めてもかなりよく一致する。
- 4) 内力は不伸張殻として求めると内部の方はかなりよく一致するが両端附近は一般にはなはだしく相違する。しかし表面応力に対する内力の影響は大したものではない。

文 献

- (1) 筆者、機械学会論文集、20 巻 95 号、485 ページ、(6) 式。
- (2) 同上論文集、485 ページ (10) 式。
- (3) 同上論文集、486 ページ (12) 式。
- (4) 同上論文集、484 ページ (3) 式および (4) 式。
- (5) 同上論文集、484 ページ (2) 式。
- (6) 同上論文集、484 ページ (1) 式中後 3 式。
- (7) 同上論文集、486 ページ (13) 式。
- (8) 同上論文集、485 ページ (9) 式。
- (9) Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, p. 217.

533.662.3 : 621-592.6

偏心円孔を有する円板における半径方向の集中荷重による応力*

宮 尾 嘉 寿**

Stresses in a Circular Disk with an Eccentric Circular Hole under Radial Forces

by Kazuy Miyao

This note gives a theoretical solution to a disk with an eccentric circular hole when it is compressed by two equal and opposite forces acting at a radius of the outer circle on the center of the inner circle. The method of solution adds to the given stress system a suitable biharmonic function which gives no normal and tangential stress on the outer edge. The parametric coefficients involved in the solution are adjusted so as to satisfy the boundary conditions at the inner edge. Bipolar coordinates are used in the solution, by means of which explicit expressions are obtained for the parametric coefficients. Formulas of stress along the edges of circles are derived, and, in particular, the stress distributions of the inner hole are calculated.

1. 結 言

1 個のあるいは数個の穴のある鋼板車輪や鋳造車輪は交通機関およびその他に広く用いられている。この種の車輪の応力状態を明らかにすることはその設計上有意義と思う。本報告においては 1 個の偏心円孔のある円板車輪がレール上に静止状態にあるとき、車軸と

* 昭和 32 年 4 月 2 日 第 34 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 32 年 6 月 28 日。

** 正員、富山大学工学部。