曲 り は り の 図 式 解 法*

中 村 康 治** 沢 田 武 彦***

Graphical Analysis of Stresses in Curved Beams

by Kōji NAKAMURA and Takehiko SAWADA

In this paper we introduce a theory of curved beams, that is in mathematical treatises similar to the theory of rotating discs.

For the beam sections of rectangular, trapezoidal and other simple profiles we are able to solve analytically our basic equation, but may not in many other cases. Therefore, we propose a graphical calculating method, that is theoretically similar to Donath's method and practically suitable for the analysis of curved beams. We expect that more exact results can be obtained, especially for the beam of deep section, by our diagram of this paper than by Winkler's theory.

1. 緒 言

曲りはりに対しては、Winklerの理論を適用することが広く行われている。その場合、はり断面の断面係数を計算することによってあらゆる対称断面の はりの問題を解くことが出来る。この係数が解析的に求められ得ないような断面に対しては、これを図式に計算することが出来る。しかしこの図式計算は比較的小さい面積の差を求めねばならないために精度があまりよくない。また Winkler の理論は単純直線はり理論の拡張であり、曲率の大きい曲りはりに対しては精度が悪くなる。それで はり 内の応力を二次元的と仮定した理論を考えることは意義がある。

く形断面の曲りはりに対しては Airy の応力関数を用いて計算した結果が利用されうることとはよく知られている。同じ結果は初等的方法をもってしてもまた求め得られる。それは回転円板の二次元的応力を求める方法と数学的に類似の方法である。く形以外の断面の はり に対しては、解析的にその解を求めることは簡単ではないが、変断面の回転円板に対する近似図式解法と同様の考えをこれに適用することは容易に考えられる。またこれにより曲りはりの二次元理論の初等的解法を実用させることが可能となる。

ここにはその図式解法の一つを述べる。この方法は回転円板に対する Donath 法と類似のものである。

2. 基礎関係式

く形断面をもつ曲りはりが一様曲げを受ける場合の張合状態を考える。曲率中心より r の所におけるつりあい条件は二次元応力状態を仮定しうる場合次のごと

第 1 図

くなる。

$$(r\sigma_r)' = \sigma_t \quad \dots (1)$$

ここで $' = d/dr$, σ_r と σ_t とは第 1 図に示すように はり 内の応力である。変形後の曲率中心を元の曲率中心に一致させた場合半径方向の見かけの変位を u とすれば、半径方向および円周方向のひずみとこの変位 u との関係は

$$\epsilon_r = u', \quad \epsilon_t = u/r + \omega \quad \dots (2)$$

である。ここに ω は はり の曲る割合 $\omega = \Delta d\theta/d\theta$ である。(2) 式より u を消去すると、次の適合条件式 (3) が求まる。

$$(r\epsilon_t)' = \epsilon_r + \omega \quad \dots (3)$$

二次元応力と ひずみ との関係式

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= (\sigma_r - \nu\sigma_t)/E \\ \epsilon_t &= (\sigma_t - \nu\sigma_r)/E \end{aligned} \right\} \quad \dots (4)$$

と (1) 式の関係を用うれば、(3) 式は次のようになる。

$$(r\sigma_t)' = \sigma_r + E\omega \quad \dots (5)$$

(1) と (5) との両式から σ_t を消去すれば、

$$r(r\sigma_r)'' + (r\sigma_r)' - (r\sigma_r)/r = E\omega \quad \dots (6)$$

この基本式の解は、

$$(r\sigma_r) = A \cdot r + \frac{B}{r} + \frac{E\omega}{2} r \log r \quad \dots (7)$$

であり、したがって

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A + \frac{B}{r^2} + \frac{E\omega}{2} \log r \\ \text{また (1) 式より} \\ \sigma_t &= A - \frac{B}{r^2} + \frac{E\omega}{2} \cdot (1 + \log r) \end{aligned} \right\} \quad \dots (8)$$

* 昭和 31 年 4 月 2 日 第 33 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 32 年 3 月 23 日。

** 正員、横浜国立大学。 *** 正員、三菱化工機会社。

ここに A, B は はりの内外縁における条件により決定されるべき定数である。また

$$(r \cdot \sigma_t) = Ar - \frac{B}{r} + \frac{E\omega}{2} r(1 + \log r) \quad \dots\dots\dots (9)$$

である。

3. 線図の作成

(6) 式は一様な厚さをもつ回転円板についての基本式と同じでただ非同次項が異なるのみである。それで変断面回転円板についての近似図式解法と類似の図式解法が曲りはりに対しても適用できることが考えられる。

いま S, D として次のようなものを定義する。

第 2 図

$$S = \frac{(\sigma_t + \sigma_r) \cdot r}{aE\omega}, \quad D = \frac{(\sigma_t - \sigma_r) \cdot r}{aE\omega} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで a は第 2 図に示すように、はりの内縁曲率半径である。(7), (9) 式を上 (10) 式に代入すれば次式がえられる。

$$S = R \log R + K_1 R, \quad D = \frac{1}{2} R + K_2 \frac{1}{R} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし $R = r/a$, また K_1, K_2 は定数である。

$$K_1 = \frac{2A}{E\omega} + \frac{1}{2} + \log a, \quad K_2 = -\frac{2B}{E\omega a^2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

(11) 式を用いて K_1, K_2 を種々変化させて描いた線図が第 3 図である。この図中の U 曲線は次のようにして求めたものである。

く形断面をもつ単一の はり においては、その内外縁において、 $\sigma_r = 0$ なる境界条件、すなわち $R=1$ および $R=b/a=R_0$ において

$$S = D \quad \dots\dots\dots (13)$$

第 3 図

なる条件があるから (11) 式を用うれば K_1, K_2 は次のように決定される。

$$K_1 = \frac{1}{2} - \frac{R_0^2 \log R_0}{R_0^2 - 1}, \quad K_2 = -\frac{R_0^2 \log R_0}{R_0^2 - 1} \quad \dots\dots\dots (14)$$

外縁 ($R=R_0$) における S または D の値をいま U とすれば、 U と R_0 との関係は、(14) 式を (11) 式の S または D いずれかへ代入して、 $R=R_0$ とおけば求められる。すなわち、

$$U = \frac{1}{2} R_0 - \frac{R_0 \log R_0}{R_0^2 - 1} \quad \dots\dots\dots (15)$$

この U 曲線より く形断面 の はりの応力分布が直ちに求められることはもちろんであるが、く形以外の断面の はり に対する計算のときの出発点のたいの目安が得られる。

4. 対称変断面の はり

内外縁における境界条件は (13) 式で示される。中間は幾つかの部分 く形断面 の はり と考える。おのおのの境界面間の接続条件として、半径方向の応力のその境界面に関する総和と内外両境界面の半径方向の変位とがそれぞれ相等しいという条件を用いる。

上の条件を用いれば各接続部において S, D はそれぞれ次式で示される量だけ変化する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_{ij} &= -\frac{S_i - D_i}{2} (1 + \nu) \left(1 - \frac{h_i}{h_j}\right) \\ \Delta D_{ij} &= -\frac{S_i - D_i}{2} (1 - \nu) \left(1 - \frac{h_i}{h_j}\right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに h_i, h_j は境界面の内および外側の幅である。

(第 4 図参照)

断面の垂直張合力は (13) 式の条件のもとでは、零となるから はり の曲げモーメントは

$$M = \int_a^b r \sigma_t dA = a^2 E \omega \int_1^{R_0} \left(\frac{S+D}{2} \right) h dR \quad \dots\dots\dots (17)$$

第 4 図

で与えられる。ゆえにこれは線図上の面積を測ることによって求められる。

また応力 σ_r, σ_t は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= E\omega(S-D)/2R \\ \sigma_t &= E\omega(S+D)/2R \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

である。

5. 図式計算例

一例として第3図の計算図表を用いて台形断面の曲りはりに解析した結果を第5図に示す。

また、同一台形断面の二次元応力状態における厳密解と2,4および8等分したものと比較したものを第1表に示す。

6. 結 言

以上のことを次に要約すれば

1) 二次元応力を仮定した曲りはり理論において、その基本方程式は回転円板のそれに同じである。

第 5 図

第 1 表 (a)

R	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
2 等分	102.7%	109.4%	84.6%	93.1%	86.2%
4 等分	102.1	105.8	95.6	98.7	99.7
8 等分	99.9	100.9	99.1	100.0	100.4
$\sigma_t H^3/M$	-16.948	-3.334	3.171	7.260	10.270

第 1 表 (b)

R	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
2 等分	—	96.3%	103.3%	105.8%	—
4 等分	—	106.0	107.8	97.2	—
8 等分	—	101.3	102.9	95.9	—
$\sigma_r H^3/M$	0	-3.279	-2.855	-1.690	0

2) 解析的にその基本式を解くことの出来ない断面に対しての計算に役立てるため Donath 線図と類似の線図を作成した。

3) 台形断面について図式計算を行ってその結果を解析的な解と比較した。