ば急激に減少する。すなわち二次振動においては基本型振動の約 1/7 に減ずる。

終りにこの研究を行う動機を与えられた東北大学名誉教授樋口盛一博士に対し、また助言と批判を頂いた玉手教授ならびに鈴木助教授に対し深く感謝します。

文 献

- (1) S. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, 1928, p. 256.
- (2) 妹沢, 航空研究所集報, 74 号 (昭 5) 409~416 ページ.
- (3) 梅川, 機械学会論文集, 19 巻 83 号 (昭 28) 111~115 ページ.

534.113

円孔のある長方形断面棒の横振動 (続)*

高 橋 伸**

Free lateral Vibrations of rectangular sectional Bars with many circular Holes (Continued)

by Shin TAKAHASHI

Free lateral vibrations of rectangular-section bars with many circular holes are studied, in which the vibrations are produced to the direction perpendicular to the axes of holes. The boundary conditions considered are as follows: one end built in and the other free, built in ends, free ends, hinged ends and one end built in and the other hinged. The method used is to determine the coefficients of normal functions according to Ritz, and it is possible to obtain the frequencies of any mode. Numerical calculations are carried out for the bars with one end built in and the other free with respect to the first and second modes and a part of the calculated results is compared with experiments.

円孔のある長方形断面棒の穴の軸方向の振動については前に発表した⁽¹⁾、穴の軸に直角方向に振動する場合を Ritz の方法でといた。任意個の穴の中心はみな長方形断面の対称軸上にあるものとし、境界条件は一端固定他端自由、両端固定、両端自由、両端単純支持または一端固定他端単純支持とする。数値計算を一端固定他端自由の場合について行い、必要な数表をそえ、また実験とも比較した。前報の場合は軸に対称な半円の切欠きがあるときもそのまま用いられるが、本報は穴の場合しか用いられない。また前報の結果もあわせ用いると、穴の数個の中心軸は他のそれと直交するときも振動数を求めることが出来る。

記 号

- x, y …… : 直角座標. それぞれ棒の軸方向, 棒のたわみ. 原点は棒の左端.
 t …… : 時間
 p …… : 円振動数
 X …… : 一様断面棒の横振動の正規関数
 l, b, h …… : それぞれ棒の長さ, 幅, 厚さ
 k_n, λ_n, α_n …… : 境界条件より定まる定数. $\alpha_n = k_n l$
 l_1, l_2 …… : 穴の中心の x 座標

- r_1, r_2 …… : 穴の半径
 I …… : 断面二次モーメント. I_0 は穴のない部分のそれ
 A …… : 断面積. A_0 は穴のない部分のそれ
 E …… : 縦弾性係数
 γ …… : 比重量
 V, T …… : それぞれ ひずみ, 運動のエネルギー
 A_n, B_n, C_n : 定数
 μ …… : $\mu = p^2 A_0 \gamma l^4 / EI_0 g$
 ζ …… : $\zeta_1^2 = r_1^2 - (x - l_1)^2$

1. Ritz の方法

棒の たわみ曲線 を

$$y = \sum_n (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t) X_n$$

とする. X_n は正規関数で

$$X_n = C_n [(\sin k_n x \pm \sinh k_n x) + \lambda_n (\cos k_n x \pm \cosh k_n x)]$$

複号の境界条件による区別, $k_n l$ を求める式, λ_n をあらわす式は前報のとおりである. なお一端固定他端単純支持のときは複号は (一) をとり, $k_n l$ は

$$\tan k l = \tanh k l$$

の n 番目の根で $\lambda_n = -\tan k_n l$ である.

* 昭和 32 年 4 月 2 日 第 34 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 32 年 4 月 24 日.

** 正員, 山形大学工学部.

寸法は第 1 図に示してあり、半径 r_1 の穴の部分では

第 1 図

$$I = I_0 - \frac{8b\zeta_1^3}{12}, \quad A = A_0 - 2b\zeta_1,$$

$$\zeta_1 = \sqrt{r_1^2 - (x - l_1)^2}$$

である。最大ひずみ、運動のエネルギーは下のとおりである。

$$\frac{2V}{E} = I_0 \int_0^l (X'')^2 dx - \sum_{i_1} \frac{2b}{3} \int_{l_1-r_1}^{l_1+r_1} (X'')^2 \zeta_1^3 dx$$

$$\frac{2T}{E} = \frac{p^2 A_0 \gamma}{Eg} \int_0^l X^2 dx - \sum_{i_1} 2 \frac{p^2 b \gamma}{Eg} \int_{l_1-r_1}^{l_1+r_1} X^2 \zeta_1 dx$$

第 1 項は穴なしの一樣断面棒のエネルギーを表わし、第 2 項は穴のためそれより引くべきエネルギーを表わす。また $\sum_{i_1}$ は穴の数だけ加算することを意味する。

計算すると ($\alpha_n \equiv k_n l$)

$$\frac{2V}{E} = \frac{I_0}{l^3} \left[\sum_n C_n^2 \lambda_n^2 \alpha_n^4 - \left(\frac{2l}{h} \right)^3 \sum_{i_1} (B_{11} C_1^2 \alpha_1^4 + B_{22} C_2^2 \alpha_2^4 + \dots + 2B_{12} C_1 C_2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 + 2B_{13} C_1 C_3 \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \dots) \right]$$

$$\frac{2T}{E} = \frac{p^2 A_0 \gamma l}{Eg} \left[\sum_n C_n^2 \lambda_n^2 - \frac{2l}{h} \sum_{i_1} (A_{11} C_1^2 + A_{22} C_2^2 + \dots + 2A_{12} C_1 C_2 + 2A_{13} C_1 C_3 + 2A_{23} C_2 C_3 + \dots) \right]$$

A, B は無次元の量で次の式を用いてあらわされる。

すなわち $\phi_n(l_1/l) = \sin k_n l_1 + \lambda_n \cos k_n l_1$

$$\psi_n(l_1/l) = \cos k_n l_1 - \lambda_n \sin k_n l_1$$

$$\Phi_n(l_1/l) = \sinh k_n l_1 + \lambda_n \cosh k_n l_1$$

$$\Psi_n(l_1/l) = \cosh k_n l_1 + \lambda_n \sinh k_n l_1$$

とおき、 $J_1(\mu r + i\nu r)$, $J_2(\mu r + i\nu r)$ の実虚部をそれぞれ $\xi_1(\mu r, \nu r)$, $\eta_1(\mu r, \nu r)$ および $\xi_2(\mu r, \nu r)$, $\eta_2(\mu r, \nu r)$ とおくと ξ_1, η_1 は前報のとおりで、

$$J_2(\mu r + i\nu r) = \xi_2(\mu r, \nu r) + i\eta_2(\mu r, \nu r)$$

$$\begin{aligned} \xi_2(\mu r, \nu r) = & -J_0(\mu r) I_2(\nu r) \\ & + J_2(\mu r) [I_0(\nu r) + I_4(\nu r)] \\ & - J_4(\mu r) [I_2(\nu r) + I_6(\nu r)] \\ & + J_6(\mu r) [I_4(\nu r) + I_8(\nu r)] \\ & - J_8(\mu r) [I_6(\nu r) + I_{10}(\nu r)] \\ & + J_{10}(\mu r) [I_8(\nu r) + I_{12}(\nu r)] \\ & - + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2(\mu r, \nu r) = & J_1(\mu r) [I_1(\nu r) + I_3(\nu r)] \\ & - J_3(\mu r) [I_1(\nu r) + I_5(\nu r)] \\ & + J_5(\mu r) [I_3(\nu r) + I_7(\nu r)] \\ & - J_7(\mu r) [I_5(\nu r) + I_9(\nu r)] \\ & + J_9(\mu r) [I_7(\nu r) + I_{11}(\nu r)] \\ & - J_{11}(\mu r) [I_9(\nu r) + I_{13}(\nu r)] \\ & - + \dots \end{aligned}$$

これらの級数は収束がよい。 $\mu r, \nu r$ が小さなときは $J_2(\mu r + i\nu r)$ を直接展開して実虚部を求めてもよい。(数値計算例は展開によって求めた。)

なお ϕ_n などは次の関係がある。

$$\phi_n(1 - l_1/l) = (-1)^n \phi_n(l_1/l),$$

$$\psi_n(1 - l_1/l) = (-1)^{n-1} \psi_n(l_1/l),$$

$$\Phi_n(1 - l_1/l) = (-1)^{n-1} \Phi_n(l_1/l),$$

$$\Psi_n(1 - l_1/l) = (-1)^n \Psi_n(l_1/l)$$

とくに $l_1/l = 0.5$ のときは

$$n : \text{奇数} \quad \phi_n = 0, \quad \psi_n = 1/\cos k_n l_1$$

$$\Phi_n = -1/\sinh k_n l_1, \quad \Psi_n = 0$$

$$n : \text{偶数} \quad \phi_n = 1/\sin k_n l_1, \quad \psi_n = 0$$

$$\Phi_n = 0, \quad \Psi_n = 1/\cosh k_n l_1$$

これらを用いると

$$\begin{aligned} B_{nn} = & \frac{3\pi\lambda_n^2}{8} \left(\frac{r}{l} \right)^4 + \frac{3\pi}{8\alpha_n^2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 [(\phi_n^2 - \psi_n^2) J_2(2k_n r) + (\Phi_n^2 + \Psi_n^2) I_2(2k_n r)] \\ & + \frac{3\pi}{\alpha_n^2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 [\phi_n \Psi_n \xi_2(k_n r, k_n r) + \phi_n \Phi_n \eta_2(k_n r, k_n r)] \\ B_{np} = & \frac{3\pi}{2(\alpha_n - \alpha_p)^2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 [(\phi_n \phi_p + \psi_n \psi_p) J_2(k_n r - k_p r) + (\Phi_n \Phi_p - \Psi_n \Psi_p) I_2(k_n r - k_p r)] \\ & + \frac{3\pi}{2(\alpha_n + \alpha_p)^2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 [(\phi_n \phi_p - \psi_n \psi_p) J_2(k_n r + k_p r) + (\Phi_n \Phi_p + \Psi_n \Psi_p) I_2(k_n r + k_p r)] \\ & \pm \frac{3\pi}{(\alpha_n^2 + \alpha_p^2)^2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 [\{(\alpha_n^2 - \alpha_p^2) \phi_n \Phi_p + 2\alpha_n \alpha_p \psi_n \Psi_p\} \xi_2(k_n r, k_p r) \\ & + \{-(\alpha_n^2 - \alpha_p^2) \psi_n \Psi_p + 2\alpha_n \alpha_p \phi_n \Phi_p\} \eta_2(k_n r, k_p r)] \\ & \pm \frac{3\pi}{(\alpha_n^2 + \alpha_p^2)^2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 [\{(\alpha_p^2 - \alpha_n^2) \phi_p \Phi_n + 2\alpha_n \alpha_p \psi_p \Psi_n\} \xi_2(k_p r, k_n r) \\ & + \{-(\alpha_p^2 - \alpha_n^2) \psi_p \Psi_n + 2\alpha_n \alpha_p \phi_p \Phi_n\} \eta_2(k_p r, k_n r)] \end{aligned}$$

複号は両自由のときのみ下号を用い、他の境界条件ではすべて上号を用いる。 A は前報と同じような形をしているが無次元であらわしてある。すなわち

$$\begin{aligned}
A_{nn} &= \frac{\pi \lambda_n^2}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 + \frac{\pi}{4 \alpha_n} \left(\frac{r}{l} \right) [(\phi_n^2 - \psi_n^2) J_1(2k_n r) + (\Phi_n^2 + \Psi_n^2) I_1(2k_n r)] \\
&\quad + \frac{\pi}{\alpha_n} \left(\frac{r}{l} \right) [(\phi_n \Phi_n + \psi_n \Psi_n) \xi_1(k_n r, k_n r) + (\phi_n \Phi_n - \psi_n \Psi_n) \eta_1(k_n r, k_n r)] \\
A_{np} &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{l} \right) \left[(\phi_n \phi_p + \psi_n \psi_p) \frac{J_1(k_n r - k_p r)}{\alpha_n - \alpha_p} + (\phi_n \phi_p - \psi_n \psi_p) \frac{J_1(k_n r + k_p r)}{\alpha_n + \alpha_p} \right] \\
&\quad + \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{l} \right) \left[(\Phi_n \Phi_p - \Psi_n \Psi_p) \frac{I_1(k_n r - k_p r)}{\alpha_n - \alpha_p} + (\Phi_n \Phi_p + \Psi_n \Psi_p) \frac{I_1(k_n r + k_p r)}{\alpha_n + \alpha_p} \right] \\
&\quad \pm \frac{\pi}{\alpha_n^2 + \alpha_p^2} \left(\frac{r}{l} \right) [(\alpha_n \phi_n \Phi_p + \alpha_p \psi_n \Psi_p) \xi_1(k_n r, k_p r) + (\alpha_p \phi_n \Phi_p - \alpha_n \psi_n \Psi_p) \eta_1(k_n r, k_p r)] \\
&\quad \pm \frac{\pi}{\alpha_n^2 + \alpha_p^2} \left(\frac{r}{l} \right) [(\alpha_p \phi_p \Phi_n + \alpha_n \psi_p \Psi_n) \xi_1(k_p r, k_n r) + (\alpha_n \phi_p \Phi_n - \alpha_p \psi_p \Psi_n) \eta_1(k_p r, k_n r)]
\end{aligned}$$

複号は一端固定他端自由，両端固定，一端固定他端単純支持のとき（－），両端自由のとき（＋）をとるものとする。

また両端単純支持のときは

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= k_n l = n\pi, \quad \lambda_n = \frac{1}{2} \\
B_{nn} &= \frac{3\pi}{16} \left(\frac{r}{l} \right)^4 - \frac{3\pi}{8 \alpha_n^2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \cos 2k_n l_1 J_2(2k_n r) \\
B_{np} &= \frac{3\pi}{2(\alpha_n - \alpha_p)^2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \cos(k_n l_1 - k_p l_1) J_2(k_n r - k_p r) \\
&\quad - \frac{3\pi}{2(\alpha_n + \alpha_p)^2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \cos(k_n l_1 + k_p l_1) J_2(k_n r + k_p r) \\
A_{nn} &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{r}{l} \right)^2 - \frac{\pi}{4 \alpha_n} \left(\frac{r}{l} \right) \cos 2k_n l_1 J_1(2k_n r) \\
A_{np} &= \frac{\pi}{2(\alpha_n - \alpha_p)} \left(\frac{r}{l} \right) \cos(k_n l_1 - k_p l_1) J_1(k_n r - k_p r) \\
&\quad - \frac{\pi}{2(\alpha_n + \alpha_p)} \left(\frac{r}{l} \right) \cos(k_n l_1 + k_p l_1) J_1(k_n r + k_p r)
\end{aligned}$$

である。いま、

$$\mu = p^2 A_0 \gamma l^4 / EI_0 g$$

$$\begin{aligned}
\lambda_n^2 - \frac{2l}{h} A_{nn} &= a_{nn}, \quad \lambda_n^2 \alpha_n^4 - \left(\frac{2l}{h} \right)^3 B_{nn} \alpha_n^4 = b_{nn} \\
\frac{2l}{h} A_{np} &= a_{np}, \quad \left(\frac{2l}{h} \right)^3 B_{np} = b_{np}
\end{aligned}$$

とおくと Ritz により振動数方程式が次のように求まる。ただし $a_{np} = a_{pn}$ である。

$$\begin{vmatrix}
(a_{11}\mu - b_{11}) & a_{12} & a_{13} & \cdots \\
a_{21} & (a_{22}\mu - b_{22}) & a_{23} & \cdots \\
a_{31} & a_{32} & (a_{33}\mu - b_{33}) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{vmatrix} = 0$$

なお以上の式で J, I は第1種のベッセル，モディファイドベッセル関数である。

2. 数値計算例および実験との比較

一端固定，他端自由の棒について計算および実験を行った。以上の諸量の値は次表のとおりである。

$$k_1 l = \alpha_1 = 1.875 \ 104 \ 068 \ 712 \ 0$$

$$k_2 l = \alpha_2 = 4.694 \ 091 \ 132 \ 974 \ 2$$

$$\lambda_1 = -1.362 \ 220 \ 557 \ 485$$

$$\lambda_2 = -0.981 \ 867 \ 539 \ 175$$

l_1/l	$\phi_1(l_1/l)$	$\psi_1(l_1/l)$	$\Phi_1(l_1/l)$	$\Psi_1(l_1/l)$
0.1	-1.151 93	1.236 41	-1.197 63	0.760 70
0.2	-0.901 25	1.429 47	-1.075 27	0.548 23
0.3	-0.618 98	1.572 42	-0.990 82	0.355 09
0.4	-0.315 01	1.660 24	-0.941 32	0.174 47
0.5	0	1.689 87	-0.925 01	0

l_1/l	$\phi_2(l_1/l)$	$\psi_2(l_1/l)$	$\Phi_2(l_1/l)$	$\Psi_2(l_1/l)$
0.1	-0.423 31	1.335 99	-0.605 20	0.634 20
0.2	0.226 83	1.382 97	-0.364 36	0.410 73
0.3	0.827 90	1.130 78	-0.205 29	0.279 43
0.4	1.249 86	0.633 96	-0.092 29	0.210 84
0.5	1.401 45	0	0	0.189 57

計算は $h/l=1/10, 1/20, 1/30$ について第二次近似まで，第1次第2次振動数を求め無次元量 μ で表わしたのが第2図より第9図までである。比較のため， $h/l=1/10$ の場合について穴の軸方向に振動するときの μ も附記した（第3，5図）。

第 2 図

第 3 図

第 4 図

第 5 図

第 6 図

第 7 図

第 8 図

なお, $h/l=1/30$ の場合の一次振動数を実験から求めた。試片は $300\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 10\text{ mm}$ の正方形断面の軟鋼棒で, 穴を順次大きくして実験した。振動数から μ をきめるには, 穴のない棒の μ が計算と一致するものとして $A_0 r l^4 / E I_0 g$ をそれぞれの棒について定め, 穴のあるときは実験より求めた p^2 にこれを掛けて μ とした。実験結果は $2r/h$ が 0.7 くらいまでは計算とよく合う。装置は前報のとおりである。

終りに実験を行った卒業研究学生中村稔, 土田清二の両君に謝意を表する。

注. T は前報の方法で求まるが, V を計算するとき次の形の積分が必要である。

$$I'[\phi(x)] = \int_{l_1-r}^{l_1+r} \phi(x) [r^2 - (l_1 - x)^2]^{\frac{3}{2}} dx$$

ベッセル関数の第 2 積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^\pi e^{\pm i x \cos \phi} (\sin \phi)^{2n} d\phi$$

を用いると

$$I'[\sin \mu x \sin \nu x] = \frac{3\pi r^2}{2(\mu - \nu)^2} \cos(\mu l_1 - \nu l_1) J_2(\mu r - \nu r) - \frac{3\pi r^2}{2(\mu + \nu)^2} \cos(\mu l_1 + \nu l_1) J_2(\mu r + \nu r)$$