621.9.014 : 621.9.015

び び り 発 生 の 理 論 的 研 究*

(第 1 報 非 線 型 の 場 合)

加 藤 仁**

On the Theoretical Research of Chatter Vibration

(1st Report)

by Shinobu KATŌ

In the former report, a differential equation of the chatter was introduced, and it was proved theoretically that the chatter is a kind of self-excited vibration and that the characters of chatter could be explained fairly well by this equation. But, some of them could not be explained, because the analysis was made on a linear system assuming that the cutting force was in proportion to the thickness of chip. The relationship between them is usually non-linear. Then, in this paper, the analytical research has been made in the case of non-linear system. By this research, it has been shown that the facts which could not be explained by the linear treatment are well accounted for by the non-linear theory. Moreover, the general expressions of the condition for excitation have been ascertained, including the linear case.

1. 緒 言

前報⁽¹⁾においては、びびりについて土井とともに行った従来の実験結果⁽²⁾に基づいて、びびり振動を表わす微分方程式を導いた。この方程式による理論的研究の結果、びびりは振動中の被削材の水平変位に対して水平分力がわずかに遅れて作用するために発生する自励振動であることを理論的にも明らかにすることができた。またこの方程式によって、びびりの性質をかなり良く説明することができた。

しかし前報においては、取扱いを簡単にするため、切削力が切くず厚さに比例するものとし、いわゆる線型系について取扱いを進めたため、2, 3 の矛盾点ならびにびびりの性質を表わし得ない点を生じた。一般に、切削力(特にびびりの発生に重要な意味をもつ切削水平分力)は、切くず厚さに比例するものではなく、非線型であるのが普通である。

そこで本研究は、切削力と切くず厚さとの関係を実際に近い形で(4)式のように表わし、非線型系について解析を行った結果、上述の矛盾点ならびに線型取扱いでは表わし得なかった諸点を良く説明することができた。また線型の場合を含めた一般的なびびりの発生条件式を導くことができた。

2. びびりの微分方程式

取扱いを簡単にするため、本研究においても前報と同様に、二次元切削におけるびびり発生について研究を行った。

びびり発生中は、被削材は回転しながら斜め上の方向にたわみ振動を行っている。すなわち、被削材は上下、水平両方向に同じ周期で振動するものであるが、それによって切くず厚さの変化を生ずる水平振動がびびり発生のもとをなすことが明らかにされている⁽³⁾。したがって、本研究においても前報同様被削材の水平振動のみについて解析を進めることにする。

びびり振動の微分方程式は、振動系を 1 自由度の質点系と考えれば、前報⁽⁴⁾に示したとおり次のように表わしうる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x+a) = F\{d-x(t-h)\} \quad \cdots \cdots (1)$$

あるいは、

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x - f(d-x_h) = 0 \quad \cdots \cdots (2)$$

ただし、

$$\begin{cases} 2n = \frac{c}{m}, \quad p^2 = \frac{k}{m}, \quad x_h = x(t-h) \\ f(d-x_h) = \frac{1}{m}F(d-x_h) - \frac{1}{m}ka \end{cases} \quad \cdots \cdots (3)$$

ここに、 $F(d-x_h)$ は切削水平分力を表わす。すなわち従来の実験結果⁽⁵⁾に基づいて、被削材の振動によるある瞬間の未変形の切くず厚さ $(d-x)$ に相当する水平分力が、一定時間 h だけ遅れて作用するものとした。

前報においては、この水平分力が第 1 図 A 直線に示すように切くず厚さに比例するものとし、

$$F(d-x_h) = K \cdot (d-x_h) \quad \text{ただし、} d-x \geq 0$$

* 昭和 30 年 4 月 6 日 第 32 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 32 年 7 月 1 日。

** 正員、名古屋大学工学部(名古屋市千種区不老町)。

と仮定して取扱いを進めた。しかしながら、一般に水平分力は切くず厚さに比例するものではなく、第1図B曲線のように非線型であるのが普通である。この切削力と切くず厚さの関係を表わす式は種々提示⁽⁶⁾されているが、以下の取扱いを容易にするため、ここでは次のように表わすことにする。

第 1 図

$$F(d-x_h) = K \cdot (d-x_h) - K_3 \cdot (d-x_h)^3, \quad d-x \geq 0 \quad (4)$$

ここに、 K , K_3 は切削条件によって決まる定数である。(4)式によって、切くず厚さと水平分力の関係を以下の研究の範囲では何らさしつかえない程度によく表わすことができる。

切くず厚さと水平分力の関係を(4)式のように表わすと、 $K \cdot d - K_3 \cdot d^3 = k \cdot a$ であるから、

$$f(d-x_h) = -\lambda x_h + g(x_h) \quad (5)$$

ただし、

$$\lambda = \frac{K}{m}, \quad \lambda_3 = \frac{K_3}{m}, \quad g(x_h) = \lambda_3 x_h^3 - 3\lambda_3 d x_h^2 + 3\lambda_3 d^2 x_h \quad (5')$$

(5)式を用いると、びびりの微分方程式(2)は次のようになる。

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x + \lambda x_h - g(x_h) = 0 \quad (6)$$

(6)式を前報の線型の場合の方程式と比較すると、 $g(x_h)$ の項が余分に加わっており、明らかに非線型微分方程式である。

3. 解 析

(5)式の K_3 の値は K に比して小さい量であるとみなされ、したがって(6)式における $g(x_h)$ は λx_h に比して小さい量であると考えられる。したがって(6)式は、前報の線型の場合の結果を参照して、Kryloff-

$$\left\{ \frac{A(t+T) - A(t)}{T} + \frac{A\xi}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot d\gamma + \frac{A\eta}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \gamma \cdot d\gamma - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} g \cdot \cos \gamma \cdot d\gamma \right\} = 0 \quad (15)$$

$$\left\{ \frac{\beta(t+T) - \beta(t)}{T} - \frac{\xi}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \sin^2 \gamma \cdot d\gamma - \frac{\eta}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot d\gamma + \frac{1}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} g \cdot \sin \gamma \cdot d\gamma \right\} = 0 \quad (16)$$

(5), (14)の関係を入れ、上式を整理すると、次の2式をうる。

$$\left\{ \frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2\omega} \left\{ A(2n\omega - \lambda \sin \phi) + 3\lambda_3 d^2 A \sin \phi + \frac{3}{4} \lambda_3 A^3 \sin \phi \right\} \right\} \quad (17)$$

$$\left\{ \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2\omega} \left\{ (p^2 - \omega^2 + \lambda \cos \phi) - 3\lambda_3 d^2 \cos \phi - \frac{3}{4} \lambda_3 A^2 \cos \phi \right\} \right\} \quad (18)$$

びびりの微分方程式(6)の代りに、以下(17), (18)両式について取扱いを進める。

3.1 びびり発生条件 びびりを発生するためには、(17)式において $\frac{dA}{dt} > 0$ でなければならない。すなわち

$$A(2n\omega - \lambda \sin \phi) + 3\lambda_3 d^2 A \sin \phi + \frac{3}{4} \lambda_3 A^3 \sin \phi < 0$$

Bogoliuboffの方法⁽⁷⁾によって取扱うことができる。

(6)式の解を、

$$x = A(t) \sin \gamma(t), \quad \gamma(t) = \omega t + \beta(t) \quad (7)$$

と仮定し、かつ

$$\dot{x} = A\omega \cos \gamma \quad (8)$$

とする。ただし、

$$\dot{A} \sin \gamma + A\dot{\beta} \cos \gamma = 0 \quad (9)$$

(8)式から、

$$\ddot{x} = \dot{A}\omega \cos \gamma - A\omega^2 \sin \gamma - A\omega\dot{\beta} \sin \gamma \quad (10)$$

(7), (8), (10)式を(6)式に入れると、

$$(\dot{A}\omega + 2A\dot{n}\omega) \cos \gamma + (A\omega^2 - A\omega^2 - A\omega\dot{\beta}) \sin \gamma + \lambda A \sin(\gamma - \phi) - g\{A \sin(\gamma - \phi)\} = 0 \quad (11)$$

ただし、

$$\phi = \omega h$$

(9), (11)式から、次の二つの微分方程式をうる。

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{A} + \frac{A\xi}{\omega} \sin \gamma \cos \gamma + \frac{A\eta}{\omega} \cos^2 \gamma - \frac{g}{\omega} \cos \gamma &= 0 \quad (12) \\ \dot{\beta} - \frac{\xi}{\omega} \sin^2 \gamma - \frac{\eta}{\omega} \sin \gamma \cos \gamma + \frac{g}{\omega A} \sin \gamma &= 0 \quad (13) \end{aligned} \right.$$

ただし、

$$\xi = p^2 - \omega^2 + \lambda \cos \phi, \quad \eta = 2n\omega - \lambda \sin \phi \quad (14)$$

以上の結果、非線型微分方程式(6)を取り扱う代りに(12), (13)両式について解析を進めればよいことがわかる。

ところで、前報の線型の場合には、(14)式の $\xi=0$, $\eta=0$ の条件が満たされるとき、定常振動が発生することが明らかにされている。今、(6)式の非線型系においても、この線型系における定常振動附近について問題を取り扱うことにすると、非線型項 $g(x_h)$ は小さい量とみなしうるから、 $\xi \approx 0$, $\eta \approx 0$ と考えてよい。したがって、(12), (13)両式の左辺の第2, 3, 4項はいずれも小さい値であるから、 $\dot{A}$, $\dot{\beta}$ も小さい値であることがわかる。したがって、時刻 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ の間には $A(t)$, $\beta(t)$ はほとんど変化しないものとみてさしつかえない。そうすると、(12), (13)両式から次の2式をうる。

$$\left\{ \frac{A(t+T) - A(t)}{T} + \frac{A\xi}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot d\gamma + \frac{A\eta}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \gamma \cdot d\gamma - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} g \cdot \cos \gamma \cdot d\gamma \right\} = 0 \quad (15)$$

$$\left\{ \frac{\beta(t+T) - \beta(t)}{T} - \frac{\xi}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \sin^2 \gamma \cdot d\gamma - \frac{\eta}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot d\gamma + \frac{1}{2\pi\omega A} \int_0^{2\pi} g \cdot \sin \gamma \cdot d\gamma \right\} = 0 \quad (16)$$

(5), (14)の関係を入れ、上式を整理すると、次の2式をうる。

$$\left\{ \frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2\omega} \left\{ A(2n\omega - \lambda \sin \phi) + 3\lambda_3 d^2 A \sin \phi + \frac{3}{4} \lambda_3 A^3 \sin \phi \right\} \right\} \quad (17)$$

$$\left\{ \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2\omega} \left\{ (p^2 - \omega^2 + \lambda \cos \phi) - 3\lambda_3 d^2 \cos \phi - \frac{3}{4} \lambda_3 A^2 \cos \phi \right\} \right\} \quad (18)$$

びびりの微分方程式(6)の代りに、以下(17), (18)両式について取扱いを進める。

3.1 びびり発生条件 びびりを発生するためには、(17)式において $\frac{dA}{dt} > 0$ でなければならない。すなわち

$$A(2n\omega - \lambda \sin \phi) + 3\lambda_3 d^2 A \sin \phi + \frac{3}{4} \lambda_3 A^3 \sin \phi < 0$$

しかして、振動系の発振条件を考える場合には、 $A \approx 0$ の附近について考慮すればよく、したがって上式の左辺の第3項は無視してよい。

したがって、びびりの発生条件は、

$$(2n\omega - \lambda \sin \phi) + 3\lambda_3 d^2 \sin \phi < 0 \quad (19)$$

ところで、前報の線型系の場合には、系の状態あるいは切削条件によって決まる λ , n , h , p などのパラ

メータが(14)式の $\xi=0$, $\eta=0$ の関係を満たすとき、定常振動を発生することが明らかにされている。今 λ を除く他のパラメータを定数と考えると、この二つの関係式から、定常振動を発生するための λ の値 λ_1 、およびその振動数 ω_1 が決まる。さらに、 λ の値がこの λ_1 より大きい場合にはこの振動系は発振し、したがって線型の場合のびびりの発生条件は、 $\lambda \geq \lambda_1$ で表わされることが明らかにされている。

(6) 式で表わされる非線型系において、その非線型項 $g(x_h)$ は小さい量であるとみなし、線型系の定常振動附近 ($\lambda=\lambda_1$, $\omega=\omega_1$) について考えることにし、

$$\lambda = \lambda_1 + \Delta\lambda, \quad \omega = \omega_1 + \Delta\omega,$$

$$\phi = \phi_1 + \Delta\phi \quad (\phi_1 = \omega_1 h, \quad \Delta\phi = h \Delta\omega)$$

と置く。この関係を発振条件式 (19) に入れ、高次の微小量を無視すると、

$$\left\{ 1 - \left(\frac{2n}{\sin \phi_1} - \lambda_1 h \cot \phi_1 \right) \frac{\Delta\omega}{\Delta\lambda} \right\} \Delta\lambda > 3\lambda_3 d^2$$

上式に、前報で得られた関係式

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\lambda} = \frac{2\omega_1(2n^2 + \omega_1^2 - p^2)}{\lambda_1 \{ (2n - \lambda_1 h \cos \phi_1)^2 + (2\omega_1 + \lambda_1 h \sin \phi_1)^2 \}}$$

を入れて整理すると、びびりの発生条件 (19) 式は次のようになる。

$$\Delta\lambda > \lambda_3 d^2 R \quad \text{あるいは} \quad \lambda > \lambda_1 + \lambda_3 d^2 R \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、

$$R = \frac{3n \{ 4(n^2 + \omega_1^2) + 4nh(p^2 + \omega_1^2) + \lambda_1^2 h^2 \}}{(1+nh) \{ h\lambda_1^2 + 2n(p^2 + \omega_1^2) \}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

この (21) 式から明らかなように、 R は無次元の量であって、しかも常に正の値である。

びびりの発生条件式 (20) の右辺の第 2 項は、(6) 式の非線型項 $g(x_h)$ のために加わったものであって、 $\lambda_3=0$ の場合にはこの項は消失し、線型系の発振条件式と全く一致する。

3.2 定常振動の振幅および振動数 (17) 式において、 $\frac{dA}{dt}=0$ とおくことによって、定常振動の振幅 A_s が求められる。すなわち、

$$2n\omega - \lambda \sin \phi + 3\lambda_3 d^2 \sin \phi + \frac{3}{4} \lambda_3 A^2 \sin \phi = 0$$

上式に、 $A=A_s$, $\lambda=\lambda_1+\Delta\lambda$, $\omega=\omega_1+\Delta\omega$, $\phi=\phi_1+\Delta\phi$ の関係を入れ、高次の微小量を無視すると、

$$\frac{3}{4} \lambda_3 A_s^2 = \Delta\lambda - 3\lambda_3 d^2 - \frac{2n}{\sin \phi_1} (1 - \phi_1 \cot \phi_1) \Delta\omega$$

上式に $\frac{\Delta\omega}{\Delta\lambda}$ の関係を入れて整理すると、定常振幅 A_s は次のようになる。

$$A_s^2 = 4 \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_3 R} - d^2 \right) \quad \dots\dots\dots (22)$$

次に、(18)式から定常振動の振動数 ω_s を求めることができる。

定常振動においては、

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega + \frac{d\beta}{dt} = \text{const.} = \omega_s$$

である。今 $\omega_s = \omega_1 + \Delta\omega_s$ とし、 $\frac{d\beta}{dt} = \delta\omega$ とすれば

$$\Delta\omega_s = \Delta\omega + \delta\omega$$

ここで、 $\Delta\omega, \delta\omega$ の意味を考えてみる。線型の場合には、 $\lambda=\lambda_1$ のとき定常振動を行い、その振動数は ω_1 である。非線型の場合には、定常振動を発生するための λ の値が λ_1 から $\Delta\lambda$ だけ増加するとともにその振動数も $\Delta\omega_s$ だけ変化する。この中、 $\Delta\omega$ は線型の場合に λ の値が λ_1 から $\Delta\lambda$ だけ増加したために生ずる変化量であり、 $\delta\omega$ は非線型項 $g(x_h)$ が加わったための補正量と考えればよい。そうすると、 A_s を求めたのと同様の手段によって、(18)式から $\Delta\omega_s$ が次のように求められる。

$$\Delta\omega_s = \frac{h\lambda_1^2(p^2 - \omega_1^2) - 4n^3(p^2 + \omega_1^2) + 2n\lambda_1^2(1 - nh)}{2\lambda_1 n \omega_1 \{ 4(n^2 + \omega_1^2) + 4nh(p^2 + \omega_1^2) + \lambda_1^2 h^2 \}} \Delta\lambda$$

$$\text{したがって} \quad \omega_s = \omega_1 + \Delta\omega_s \quad \dots\dots\dots (23)$$

3.3 $d-x \geq 0$ の範囲内で定常振動を発生する条件

以上の取扱いは、すべて $d-x \geq 0$ の範囲内で行ってきたものである。すなわち、振動中被削材が刃先から全く離れない範囲内で問題を取り扱ってきた。

次に、この範囲内で定常振動を行うための条件を求めてみる。

まず、(22)式から $A_s^2 > 0$ の条件を求めてみると、

$$\Delta\lambda > \lambda_3 d^2 R \quad \dots\dots\dots (24)$$

となり、これはびびりの発生条件式 (20) と全く一致する。

次に、振動中被削材が刃先から全く離れない条件 $A_s^2 < d^2$ を求めると、

$$\Delta\lambda < \frac{5}{4} \lambda_3 d^2 R \quad \dots\dots\dots (25)$$

したがって、びびりを発生し、 $d-x \geq 0$ の範囲内で定常振動を行うための条件は、(24), (25) 両式から次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{5}{4} \lambda_3 d^2 R > \Delta\lambda > \lambda_3 d^2 R \\ \text{あるいは} \quad \lambda_1 + \frac{5}{4} \lambda_3 d^2 R > \lambda > \lambda_1 + \lambda_3 d^2 R \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

すなわち、 λ が (26) 式で示される範囲の値をとるとき、被削材と刃先が相離れない定常振動を行う。また $\lambda > \lambda_1 + \frac{5}{4} \lambda_3 d^2 R$ のときには、振動 1 サイクル中のある期間、被削材と刃先が相離れるような大きい振幅のびびりを発生する。 $\lambda < \lambda_1 + \lambda_3 d^2 R$ のときには、びびりを発生しない。

4. 数値計算および考察

次に (26) 式について、びびり発生の条件を数値計算によって求める。

ところで、数値計算にあたっては次の点が問題となる。すなわち、前節までの理論的解析においては、被削材を含めた旋盤主軸系を 1 自由度の質点系とみな

的大きな送りで切削する場合には、第 3 図のような安定な びびり を発生しやすことがわかる。また(26)式あるいは第 2 図によって明らかなように、 λ_3 に比し λ_1 が小さいほど A, B 曲線間の幅が相対的に広くなる。したがって、たとえば長い被削材を両センタで支持して切削するときのように振動系の減衰率 n が小さい場合には、 λ_1 が小さいから第 3 図のような安定な びびり を発生しやすことがわかる。これらの点は、従来の結果⁽¹⁰⁾とよく一致する。

また、この被削材と刃先が全く相離れない びびり の振幅は、(22)式によって明らかなように、 n, h, p, λ_3, d などの切削条件によって決まるもので、これは妥当な結果であると考えられる。

また第 2 図 B, D 曲線を見ると、送りが大きいほど びびり を発生するための λ の値が大きくなっており、送りが大きくなると びびり を発生し難い性質をよく表わしている。(びびり発生についてのこの性質は、送りが小さいときには被削材と刃先が相離れやすいくともよるものである⁽¹¹⁾。)

以上 (6) 式で表わされる非線型系について取扱いを進めた結果、線型取扱いにおいて生じた矛盾ならびに不備な点をよく補いうることが明らかにされた。またこの非線型系について求めた びびり の発生条件式は線型系を含めた一般的な びびり の発生条件式であるから、この式によって、前報の線型取扱いによって説明し得た びびり発生 についての諸性質をすべて表わ

しうることはもちろんである。

5. 結 言

切削力と切くず厚さとの関係を実際に近い形で表わし、非線型系について びびり振動 の理論的研究を進めた結果、前報の線型取扱いでの不備な点を補うことができ、びびり発生についての諸性質を理論的にもよく説明することができた。

またこの結果、びびりは被削材の水平振動によって生ずる切くず厚さの変化に対して切削力がわずかに遅れて作用するために発生する自励振動であることがいっそう明確にされた。

終りに、本研究遂行にあたって御指導を賜った土井静雄教授に深謝する。

文 献

- (1) 土井・加藤，機械学会論文集，21巻 102 号，110 ページおよび *Trans. ASME*, Vol. 78, p. 1127, July, 1956.
- (2) 土井・加藤，機械学会論文集，20 巻 90 号，61 ページ。
- (3) 土井，旅順工科大学紀要，11 巻 1 号，23 ページ。
- (4) 前掲(1)。
- (5) 前掲(2)および機械学会論文集，21巻 110 号，727 ページ。
- (6) たとえば機械工学便覧(昭 26 年版) 17—121 ページ。
- (7) *Introduction to Nonlinear Mechanics* (English translation)。
- (8) 前掲(1)。
- (9) 土井・栗田，機械学会論文集，20巻 90 号，55 ページ。
- (10) 前掲(3)。
- (11) 土井外 3 名，機械学会論文集，22巻 118 号，408 ページ。

621.9.014 : 621.9.015

び び り 発 生 の 理 論 的 研 究

(第 2 報 びびりの振動数について)*

加 藤 仁** 五 島 健***

On the Theoretical Research of Chatter Vibration

(2nd Report)

by Shinobu KATŌ and Takeshi GOSHIMA

In the former report, a differential equation of the chatter vibration was introduced.

In this paper, the frequencies of chatter vibration have been calculated basing on this equation, and discussed with the aid of experimental records.

It has been proved that the relations between the frequencies of chatter and the natural frequency, cutting conditions are well indicated by the above equation.

1. 緒 言

前報⁽¹⁾および第 1 報⁽²⁾において取り扱った びびり振動の微分方程式に基いて、びびりの振動数を計算し、これを実験的に確かめ、従来の実験結果と比較検討した。

その結果、この微分方程式によって、びびりの振動

* 昭和 31 年 4 月 3 日 第 33 期通常総会講演会において講演，原稿受付 昭和 32 年 7 月 1 日。

** 正員，名古屋大学工学部（名古屋市千種区不老町）。

*** 准員，キャノンカメラ会社（東京都大田区下丸子町 312）。