539. 384. 2 : 624. 073. 1

半円切欠きを有する半無限板のたわみ*

玉 手 統** 塩 谷 駿 介***

On the Transverse Flexure of a Semi-Infinite Thin Plate
with a Semi-Circular Notch

by Osamu TAMATE and Shunsuke SHIOYA

In this paper, the effects of a semi-circular notch in a semi-infinite plate under the state of plain bending are investigated by using the Poisson-Kirchhoff theory of thin plates.

The analysis is developed with the help of the complex variable method and the unknown coefficients included in the function, expressing the deflection of the plate, are determined by the method of perturbation.

In order to clarify the effect of making a semi-circular notch, the distributions of bending couples are numerically obtained. Moreover, the stress concentration factor k_t in the plate for various values of Poisson's ratio of the plate material is also computed.

1. 緒 言

周知のごとく薄い平板がたわむ場合に孔縁または切欠き縁に生ずる応力集中は板の形状および板材のポアソン比により影響を受ける。したがってこれらの間の関係を明らかにすることは理論的にも実用上からも興味のあることと思われる。しかして各種形状の穴を有する薄板のたわみに関する報告は従来から相当多く見受けられる⁽¹⁾が、切欠きを有する薄板に関する理論的報告は双曲線切欠き⁽²⁾⁽³⁾の場合以外には見られないようである。

この報告は、1 個の半円切欠きを有する半無限薄板が一様な曲げモーメントを受けてたわむ場合に板内の応力を求める問題を Poisson-Kirchhoff の薄板理論⁽⁴⁾に基いて取り扱ったものである。解析にあたっては応力の複素関数表示法⁽⁵⁾を採用し、解に含まれる未知係数は摂動法を用いて決定した。また数値計算を行って切欠き縁、直線縁および対称断面に沿う応力分布を示し、更に最大応力が板材のポアソン比によってどのように影響されるかを明らかにした。

2. 基 礎 式

薄板の中立面を z 平面とする。薄板に横荷重が働かないものとするれば薄板のたわみ $w(x, y)$ は重調和関数であり一般に次式で与えられる。

$$w = R_0[x_1(z) + \bar{z}\varphi_1(z)] \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに $R_0[\ ]$ は $[\ ]$ 内関数の実部を表す。

写像関数 $z = \omega(\zeta)$, $\zeta = \rho e^{i\theta}$ により問題の板を ζ 平面に写像するものとし、 ρ 一定、 θ 一定断面に作用する曲げモーメント、ねじりモーメントおよびせん断力をそれぞれ M_ρ , M_θ , $M_{\rho\theta}$, Q_ρ , Q_θ とすれば、これらは $w(x, y)$ から次式によって導かれる。

$$\left. \begin{aligned} M_\rho + M_\theta &= -4D(1+\nu)R_0[\Phi(\zeta)] \\ M_\theta - M_\rho - 2iM_{\rho\theta} &= 2D(1-\nu)\zeta^2[\Phi'(\zeta)\bar{\omega}(\bar{\zeta}) \\ &\quad + \Psi(\zeta)\omega'(\zeta)]/\{\rho^2\bar{\omega}'(\bar{\zeta})\} \\ Q_\rho - iQ_\theta &= -4D\zeta\Phi'(\zeta)/\{\rho|\omega'(\zeta)|\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= \varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta) \\ \psi_1(z) &= \chi_1'(z) = \psi_1[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta) \\ \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta) &= \Phi(\zeta) \\ \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta) &= \Psi(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

なお、(2) 式の右辺に含まれる D および ν はそれぞれ薄板のたわみ剛性およびポアソン比を表す。

また自由縁の条件式は一般に次式で与えられる。

$$-(1/\varepsilon)\varphi(\zeta) + (\omega(\zeta)/\bar{\omega}'(\bar{\zeta}))\bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) + \bar{\psi}(\bar{\zeta}) = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし

$$\varepsilon = (1-\nu)/(3+\nu)$$

(1), (2), (3) 式から明らかに、与えられた境界条件を満足するように解析関数 $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ が決められれば問題は解決する。

3. 解の誘導

第 1 図に示すように切欠きの中心を原点とする直角座標 (z 座標) を取り、 $z = \omega(\zeta) = a\zeta$ とお

第 1 図

* 昭和 32 年 9 月 27 日 創立 60 周年記念地方第 1 区(仙台)講演会において講演、原稿受付 昭和 32 年 10 月 4 日。

** 正員、東北大学工学部(仙台市桜小路)。

*** 正員、東北大学工学部大学院(仙台市桜小路)。

く、切欠き縁および直線縁がともに自由縁であるとすれば本問の境界条件は次のように与えられる。

(i) $\theta = \pm \pi/2$

$$-(1/\varepsilon)\varphi(\zeta) + \zeta\varphi'(\zeta) + \bar{\psi}(\bar{\zeta}) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

(ii) $\rho = 1$

$$-(1/\varepsilon)\varphi(\zeta) + \zeta\varphi'(\zeta) + \bar{\psi}(\bar{\zeta}) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

(iii) $\rho \rightarrow \infty$

$$M_x = 0, \quad M_y = M_0, \quad M_{xy} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= -\frac{M_0 a}{4D(1+\nu)} \zeta - \frac{M_0 a}{D(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{a_{2n}}{(2n+2)} \zeta^{-(2n+2)} + \frac{b_{2n}}{(2n+1)} \zeta^{-(2n+1)} \right\} \\ \psi(\zeta) &= \frac{M_0 a}{2D(1-\nu)} \zeta - \frac{M_0 a}{D(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{c_{2n}}{(2n+2)} \zeta^{-(2n+2)} + \frac{d_{2n}}{(2n+1)} \zeta^{-(2n+1)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

未知係数 a_{2n} , b_{2n} , c_{2n} , d_{2n} は問題の対称性から実数でなければならない。(9) 式の右辺第2項に対応する応力は無限遠で零となるから、(9) 式で与えられた解析関数 $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ が無限遠の条件を乱さないこ

したがって無限遠の応力状態は次式で与えられることになる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= -M_0 a \zeta / \{4D(1+\nu)\} \\ \psi(\zeta) &= M_0 a \zeta / \{2D(1-\nu)\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

しかしてこれらは境界条件(ii)を満足しないから、境界条件を満足する解析関数 $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} c_{2n} &= -\{(2n+2) - (1/\varepsilon)\} a_{2n} \\ d_{2n} &= -\{(2n+1) + (1/\varepsilon)\} b_{2n} \\ \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n+2)\varepsilon} e^{-i(2n+2)\theta} + e^{i(2n+4)\theta} + \left(1 - \frac{1}{(2n+2)\varepsilon}\right) e^{i(2n+2)\theta} \right\} a_{2n} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n+1)\varepsilon} e^{-i(2n+1)\theta} + e^{i(2n+3)\theta} + \left(1 + \frac{1}{(2n+1)\varepsilon}\right) e^{i(2n+1)\theta} \right\} b_{2n} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

(10) 式の第3式を実部と虚部に分ければ、

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \{ \cos(2n+2)\theta + \cos(2n+4)\theta \} a_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{2}{(2n+1)\varepsilon}\right) \cos(2n+1)\theta + \cos(2n+3)\theta \right\} b_{2n} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{(2n+2)\varepsilon}\right) \sin(2n+2)\theta + \sin(2n+4)\theta \right\} a_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \{ \sin(2n+1)\theta + \sin(2n+3)\theta \} b_{2n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ところで $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲で

$$\cos 2n\theta = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} (2s+1)}{(2s+1)^2 - (2n)^2} \cos(2s+1)\theta, \quad \sin 2n\theta = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} 2n}{(2s+1)^2 - (2n)^2} \sin(2s+1)\theta \quad \dots\dots\dots (12)$$

なる展開が可能であるから、(12)式を(11)式に代入して整理すれば、 b_{2s} に関する次の連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+3) - (2n+5)/\varepsilon}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} a_{2n} \\ b_{2s} &= \frac{4}{\pi} (2s+1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+s+1} \frac{(2n+2s+5) - (2n-2s+1)\varepsilon}{(2n-2s+1)(2n+2s+3)(2n+2s+5)} a_{2n} \quad (s \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

また(13)式を用いて b_{2s} を消去すれば、 a_{2n} に関する次の連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n+5) - (2n+1)\varepsilon - (2n+1)\varepsilon^2}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} a_{2n} &= -\frac{\varepsilon^2}{2} \\ \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+s} \frac{(2n+2s+1)(2n+2s+5) + 2(2n-2s+1)\varepsilon - (2n-2s+1)(2n-2s+3)\varepsilon^2}{(2n-2s+1)(2n+2s+3)(2n+2s+5)} a_{2n} \\ &= \varepsilon^2 \delta_{1,s} / 4 \quad (\delta_{1,s} : \text{Kronecker's delta}), \quad (s \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

未知係数 a_{2n} , b_{2n} は明らかに ε の関数であるから(13), (14)式を用いて係数 a_{2n} , b_{2n} を決定するには ε を変数とする摂動法を採用することにする。そのために係数 a_{2n} , b_{2n} を次式のように ε のべき級数に展開することができるものと仮定しよう。

$$a_{2n} = \sum_{r=2}^{\infty} a_{2n}^{(r)} \varepsilon^r, \quad b_{2n} = \sum_{r=1}^{\infty} b_{2n}^{(r)} \varepsilon^r \quad \dots\dots\dots (15)$$

(15)式を(13), (14)式に代入して ε の同べきの項

を等置すれば、(14)式から

$r=2$ に対して

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{2n}^{(2)}}{(2n+1)(2n+3)} &= -\frac{1}{4} \\ \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+s+1} \frac{a_{2n}^{(2)}}{(2n-2s+1)(2n+2s+3)} &= \frac{1}{4} \delta_{1,s} \quad (s \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$r=3$ に対して

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{2n}^{(3)}}{(2n+1)(2n+3)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{2k}^{(2)}}{2(2k+3)(2k+5)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+s+1} \frac{a_{2n}^{(3)}}{(2n-2s+1)(2n+2s+3)} &= - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+s+1} \frac{2a_{2k}^{(2)}}{(2k+2s+1)(2k+2s+3)(2k+2s+5)} \end{aligned} \right\} \cdots (17) \quad (s \geq 1)$$

$r \geq 4$ に対して

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{2n}^{(r)}}{(2n+1)(2n+3)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{2k}^{(r-1)} + a_{2k}^{(r-2)}}{2(2k+3)(2k+5)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+s+1} \frac{a_{2n}^{(r)}}{(2n-2s+1)(2n+2s+3)} &= - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+s+1} \frac{2a_{2k}^{(r-1)} - (2k-2s+3)a_{2k}^{(r-2)}}{(2k+2s+1)(2k+2s+3)(2k+2s+5)} \end{aligned} \right\} \cdots (18) \quad (s \geq 1)$$

(16), (17), (18) 式の $a_{2n}^{(r)} (r \geq 2)$ に関する連立方程式は全く同じ形式のものである。

一方 b_{2s} については, (13) 式から

$r=1$ に対して

$$\left. \begin{aligned} b_0^{(1)} &= -1/2 \\ b_{2s}^{(1)} &= 0 \quad (s \geq 1) \end{aligned} \right\} \cdots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0^{(r)} &= -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{a_{2n}^{(r-1)}}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{a_{2n}^{(r-2)}}{(2n+3)(2n+5)} \right] \\ b_{2s}^{(r)} &= \frac{4}{\pi} (2s+1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+s+1} \left[\frac{a_{2n}^{(r-1)}}{(2n-2s+1)(2n+2s+3)} - \frac{a_{2n}^{(r-2)}}{(2n+2s+3)(2n+2s+5)} \right] \end{aligned} \right\} \cdots (21) \quad (s \geq 1)$$

(16)~(21) 式を解くことによって, (15) 式の右辺の各項が r の小さい項から逐次求められる。未知係数 a_{2n}, b_{2n} が以上の諸式から決定できればたわみ $w(x, y)$ および各曲げモーメントの分布は (1), (2), (3) 式の関係から容易に求めることができる。

4. 数 値 例

板内の応力分布ならびに応力集中の状態を明らかにするために, (16)~(21) 式によって未知係数を算出したがその数値の表示は省略する。これらの数値を用いて $\nu=0.3$ の場合に対して求めた切欠き縁, 直線縁および最小断面の応力分布を示したものが第 2 図である。

曲線 I : 切欠き周縁の M_θ , 曲線 II : 対称断面の M_y , 曲線 III : 対称断面の M_x , 曲線 IV : 直線縁の M_y

第 2 図

一方最大曲げモーメントと ϵ の関係は次のように導かれる。すなわち最大曲げモーメントは切欠き縁底部 ($\rho=1, \theta=0$) に生ずる。しかして切欠き縁では $M_\rho =$

$r=2$ に対して

$$\left. \begin{aligned} b_0^{(2)} &= 1/4 \\ b_{2s}^{(2)} &= 3\delta_{1,s}/4 \quad (s \geq 1) \end{aligned} \right\} \cdots (20)$$

$r \geq 3$ に対して

0 であることを考慮すれば, $M_{\max}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{\max}/M_0 &= (M_\theta + M_\rho)_{\theta=0} / M_0 \\ &= 1 - 2(1-\epsilon) \sum_{r=1}^{\infty} M_r' \epsilon^{r-1} \\ \text{ただし } M_1' &= b_0^{(1)} \\ r \geq 2 \text{ に対して} \\ M_r' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^{(r)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}^{(r)} \end{aligned} \right\} \cdots (22)$$

M_r' のはじめの数個の値を第 1 表に示す。(22) 式から算出した $M_{\max}/M_0$ はこの場合の応力集中係数 k_b

第 1 表

r	M_r'
1	-5.0×10^{-1}
2	-3.34×10^{-3}
3	-1.156×10^{-2}
4	5.64×10^{-3}
5	2.60×10^{-3}
6	4.34×10^{-3}

を与えるが, これを ϵ に対して図示すれば第 3 図のようになり k_b が ϵ に対してほぼ直線的に変化することが明らかである。なおこの関係は 1 円孔を有する無限薄板がどのような曲げモーメントを受けて板面に垂直な方向にたわむ場合の k_b と ϵ の関係に非常に似ている。

第 3 図

5. 結 論

直線縁上に1個の半円切欠きを有する半無限薄板が、一様な曲げモーメントを受けてたわむ場合をPoisson-Kirchhoffの薄板理論に基づいて取り扱い、解に含まれる未知係数を振動法を用いて決定した。しかして数値計算を実行して $\nu=0.3$ の場合における切欠き縁、直線縁および対称断面上の応力分布を明らかにした。さらに切欠き底部に生ずる最大応力を $\sigma=(1-\nu)/(3+\nu)$ のべき級数として表わす式を導いて最大応力と板材ポアソン比の関係を明らかにした。この関係が1円孔を有する無限薄板が平面曲げを受ける場合の最大応力の変化と酷似していることは興味がある。

最後にこの研究にあたって種々有益な御教示をたまわった樋口盛一名誉教授に心からの謝意を表する。

文 献

- (1) 従来の研究報告については次記文献を参照されたい。
J.N. Goodier, *Phil. Mag.*, Ser. 7, Vol. 22, p. 69 (1936).
M. Goland, *J. Appl. Mech.*, Vol. 10, p. A-69(1943).
S. Holgate, *Roy. Soc. London. Proc., Ser. A.*, Vol. 185, p. 35(1946).
斎藤秀雄, 機械学会論文集, 17巻 61号, 35ページ(昭26).
玉手 統, 機械学会論文集, 20巻 99号, 687ページ(昭29).
Yu. Yi- Yuan, 2nd U.S. Nat. Congr. *Appl. Mech. Proc.*, p. 381(1955).
O. Tamate, *J. Appl. Mech.*, Vol. 24, p. 115(1957).
- (2) H. Neuber, *Z. angew. Math. Mech.*, Bd. 20, S. 199 (1940).
- (3) G.H. Lee, *J. Appl. Mech.*, Vol. 7, p. A-53(1940).
- (4) S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, Chapter 4 (1940).
- (5) たとえば G.N. Sawin, *Spannungserhöhung am Rande von Löchern*. (H. Neuber および O. Everling 訳) *V.E.B. Verlag Technik Berlin*, Abschnitt 6(1956).

539.384.6 : 539.386 : 624.072.21

薄肉片持管のせん断遅れについて*

(薄肉円筒の一般的解法 例題4)

溝 口 孝 喜**

On Shear Lag in Thin-Walled Cantilever Pipes

(General Theory of Cylindrical Shells, Example 4)

by Kōki MIZOGUCHI

In this paper, the shear-lag in a thin-walled cantilever pipe is discussed, utilizing the author's fundamental differential equation in a single displacement for a thin cylindrical shell.

The results are compared with those obtained by the simple beam theory or modified beam theory.

1. 緒 言

一端が固定され、他端に集中荷重を受ける薄肉片持円管のせん断遅れを、先に筆者の導いた薄肉円筒の基礎微分方程式⁽¹⁾を利用して論じたもので、たわみはいわゆるせん断ひずみを考慮に入れたはりとして計算した式ときわめてよく一致するが、固定端附近における各応力の分布状態ははり理論からは推測できない種々な様相を呈する。

2. 解 法

第1図に示したように円筒の軸に x 軸を取り、原点は荷重端の中央に取る。問題を簡単にするために荷重

端は薄板が取り付けられ、この薄板は面内変形に対しては大きな抵抗をするが、曲げに対する抵抗はきわめて小さいとする。また集中荷重は、この板に作用するものとし変形過程中原点 O は動かぬものとし、かつ固定端に傾斜は生じないようにするものとする。このように座標を取ったのは、固定端を座標原点に取るより式が簡単になるからである。

これらの仮定により周囲条件は次のようになる。

- 1) $x=-l$ (固定端) に対し, $w=\delta \cos \theta$,
 $v=-\delta \sin \theta$, $u=0$, $\partial w / \partial x=0$
- 2) $x=0$ (荷重端) に対し, $w=0$, $v=0$,
 $T_x=0$, $M_x=0$ および

第 1 図

* 昭和 32 年 9 月 7 日 第 7 回応用力学講演会において講演、原稿受付 昭和 32 年 9 月 24 日。

** 正員、大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥東之町)。