5. 結 論

直線縁上に1個の半円切欠きを有する半無限薄板が、一様な曲げモーメントを受けてたわむ場合をPoisson-Kirchhoffの薄板理論に基づいて取り扱い、解に含まれる未知係数を振動法を用いて決定した。しかして数値計算を実行して $\nu=0.3$ の場合における切欠き縁、直線縁および対称断面上の応力分布を明らかにした。さらに切欠き底部に生ずる最大応力を $\sigma=(1-\nu)/(3+\nu)$ のべき級数として表わす式を導いて最大応力と板材ポアソン比の関係を明らかにした。この関係が1円孔を有する無限薄板が平面曲げを受ける場合の最大応力の変化と酷似していることは興味がある。

最後にこの研究にあたって種々有益な御教示をたまわった樋口盛一名誉教授に心からの謝意を表する。

文 献

- (1) 従来の研究報告については次記文献を参照されたい。
J.N. Goodier, *Phil. Mag.*, Ser. 7, Vol. 22, p. 69 (1936).
M. Goland, *J. Appl. Mech.*, Vol. 10, p. A-69(1943).
S. Holgate, *Roy. Soc. London. Proc., Ser. A.*, Vol. 185, p. 35(1946).
斎藤秀雄, 機械学会論文集, 17巻 61号, 35ページ(昭26).
玉手 統, 機械学会論文集, 20巻 99号, 687ページ(昭29).
Yu. Yi- Yuan, 2nd U.S. Nat. Congr. *Appl. Mech. Proc.*, p. 381(1955).
O. Tamate, *J. Appl. Mech.*, Vol. 24, p. 115(1957).
- (2) H. Neuber, *Z. angew. Math. Mech.*, Bd. 20, S. 199 (1940).
- (3) G.H. Lee, *J. Appl. Mech.*, Vol. 7, p. A-53(1940).
- (4) S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, Chapter 4 (1940).
- (5) たとえば G.N. Sawin, *Spannungserhöhung am Rande von Löchern* (H. Neuber および O. Everling 訳) *V.E.B. Verlag Technik Berlin*, Abschnitt 6(1956).

539.384.6 : 539.386 : 624.072.21

薄肉片持管のせん断遅れについて*

(薄肉円筒の一般的解法 例題4)

溝 口 孝 喜**

On Shear Lag in Thin-Walled Cantilever Pipes

(General Theory of Cylindrical Shells, Example 4)

by Kōki MIZOGUCHI

In this paper, the shear-lag in a thin-walled cantilever pipe is discussed, utilizing the author's fundamental differential equation in a single displacement for a thin cylindrical shell.

The results are compared with those obtained by the simple beam theory or modified beam theory.

1. 緒 言

一端が固定され、他端に集中荷重を受ける薄肉片持円管のせん断遅れを、先に筆者の導いた薄肉円筒の基礎微分方程式⁽¹⁾を利用して論じたもので、たわみはいわゆるせん断ひずみを考慮に入れたはりとして計算した式ときわめてよく一致するが、固定端附近における各応力の分布状態ははり理論からは推測できない種々な様相を呈する。

2. 解 法

第1図に示したように円筒の軸に x 軸を取り、原点は荷重端の中央に取る。問題を簡単にするために荷重

端は薄板が取り付けられ、この薄板は面内変形に対しては大きな抵抗をするが、曲げに対する抵抗はきわめて小さいとする。また集中荷重は、この板に作用するものとし変形過程中原点 O は動かぬものとし、かつ固定端に傾斜は生じないようにするものとする。このように座標を取ったのは、固定端を座標原点に取るより式が簡単になるからである。

これらの仮定により周囲条件は次のようになる。

- 1) $x=-l$ (固定端) に対し, $w=\delta \cos \theta$,
 $v=-\delta \sin \theta$, $u=0$, $\partial w / \partial x=0$
- 2) $x=0$ (荷重端) に対し, $w=0$, $v=0$,
 $T_x=0$, $M_x=0$ および

第 1 図

* 昭和 32 年 9 月 7 日 第 7 回応用力学講演会において講演、原稿受付 昭和 32 年 9 月 24 日。

** 正員、大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥東之町)。

$$2 \int_0^{\pi} \left[\left(N_x + \frac{1}{a} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \theta} \right) \cos \theta + \left(S' - \frac{\mathfrak{M}}{a} \right) \sin \theta \right] a d\theta = P$$

ここに w, v, u などの変位, T_x, N_x, S' などは単位長の力, $M_x, \mathfrak{M}$ などは単位長さのモーメントであるが, それらの作用位置, 正の方向などに関しては筆者の前論文を参照されたい⁽¹⁾. また δ は たわみ に相当

$$A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{4B}{a^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{6C}{a^4} \frac{\partial^3 w}{\partial x^4 \partial \theta^4} + \frac{8-2\nu^2}{a^4} \frac{\partial^3 w}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{6L}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{4}{a^6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (1)$$

ここで w は半径方向の変位, ν はポアソン比

$$\left. \begin{aligned} A &\equiv 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2, & B &\equiv 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \\ C &\equiv 1 + \frac{1-\nu^2}{72} \left(\frac{h}{a} \right)^2, & L &\equiv 2(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 A \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

今 (1) の解として次の式を取る.

$$w = cx^3 \cos \theta + c_0 x \cos \theta + \kappa_3 \Re \left[A \lambda^4 + \frac{2}{a^2} U \lambda^2 + \frac{B}{a^4} \right] \sin \lambda x \cos \theta + \kappa_4 \Im(\zeta) \quad (3)$$

ここで, $c, c_0, \kappa_3, \kappa_4$ は周囲条件から定まる任意定数である. また λ は $\alpha + i\beta$ なる形の複素数で, α, β は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{B}{Aa^2} \left[\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)A} - 1 \right] \\ \beta^2 &= \frac{B}{Aa^2} \left[\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)A} + 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{かつ } U \equiv 1 + \frac{1+(1-\nu)^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (5)$$

(3) 式において $\Re$ は次に続く複素関数の実数部を取ることを意味し, $\Im(\zeta)$ は同一関数の虚数部を意味

$$T_x = -\frac{72caD}{h^2} (1-\nu^2) x \cos \theta + \frac{12D}{h^2} \left[\kappa_3 \Re \left\{ \frac{(2-\nu)}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^4 + \frac{B}{a^2} (1-\nu^2) \lambda^2 \right\} \sin \lambda x \cdot \cos \theta + \kappa_4 \Im(\zeta) \right] \quad (8)$$

$$T_\theta = \frac{12D}{h^2} \left[\kappa_3 \Re \left\{ \frac{1}{a} \left\{ (1-\nu^2) - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \lambda^4 \sin \lambda x \cdot \cos \theta + \kappa_4 \Im(\zeta) \right\} \right] \quad (9)$$

$$S = \frac{72ca^2D}{h^2} (1-\nu^2) \sin \theta - \frac{6(1-\nu)D}{h^2} \left[\kappa_3 \Re \left\{ \frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^4 + \frac{2(1+\nu)B}{a^2} \lambda^2 \right\} \cos \lambda x \cdot \sin \theta + \kappa_4 \Im(\zeta) \right] \quad (10)$$

$$M_x = 6cD(1-\nu^2) x \cos \theta - D \left[\kappa_3 \Re \left\{ A \lambda^4 + \frac{1}{a^2} (2U + \nu V) \lambda^2 + \frac{(1-\nu^2)B}{a^4} \right\} \sin \lambda x \cdot \cos \theta + \kappa_4 \Im(\zeta) \right] \quad (11)$$

$$M_\theta = -D \left[\kappa_3 \Re \left\{ \nu A \lambda^4 + \frac{1}{a^2} (2\nu U + V) \lambda^2 \right\} \sin \lambda x \cdot \cos \theta + \kappa_4 \Im(\zeta) \right] \quad (12)$$

$$\mathfrak{M} = -6cav(1-\nu)D \sin \theta - \frac{(1-\nu)D}{a} \left[\kappa_3 \Re \left\{ V \lambda^4 - \frac{\nu B}{a^2} \lambda^2 \right\} \cos \lambda x \cdot \sin \theta + \kappa_4 \Im(\zeta) \right] \quad (13)$$

次にこれら諸式をモーメントの平衡式に代入すると S', N_x, N_θ などの値をうるが, 更にこれらよりエフェ

するある量で未知量である.

条件 1) および 2) により解が唯一的に定まることはエネルギー式から証明できる⁽¹⁾.

円管に表面力が作用せぬ場合に, その基礎微分方程式は筆者により次のように導かれている⁽¹⁾.

している.

(3) 式の第 1, 第 2 項が (1) 式の解であることはその形から直ちにわかる. 第 3, 第 4 項に関しては筆者の前論文を参照されたい⁽¹⁾.

(3) 式に対応する, 他の変位, u, v は u, w および v, w の関係式から次のように求めることができる.

$$u = -3ca[x^2 + 2(2+\nu)a^2] \cos \theta - c_0 a \cos \theta + \kappa_3 \Re \left[\frac{\lambda}{a} \left\{ \nu - \frac{2-3\nu+3\nu^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \lambda^2 - \frac{B}{a^2} \right] \cos \lambda x \cos \theta + \kappa_4 \Im(\zeta) \quad (6)$$

$$v = -c(x^3 - 6\nu a^2 x) \sin \theta - c_0 x \sin \theta - \kappa_3 \Re \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^4 + \frac{1}{a^2} \left\{ (2+\nu) + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \lambda^2 + \frac{B}{a^4} \right] \sin \lambda x \cdot \sin \theta - \kappa_4 \Im(\zeta) \quad (7)$$

(3), (6), (7) の各式を応力と変位の各関係式⁽¹⁾に代入すれば各応力およびモーメントの式として次式をうる.

クチブな円周方向および横断方向のせん断力を求めると次のようになる.

$$S' - \frac{\mathfrak{M}}{a} = \frac{72(1-\nu^2)ca^2DI}{h^2} \sin \theta - D \left[\kappa_3 \Re \left\{ \frac{\nu A}{a^2} \lambda^4 + \frac{12(1-\nu^2)BI}{a^2 h^2} \lambda^2 \right\} \cos \lambda x \cdot \sin \theta + \kappa_4 \Im(\zeta) \right] \quad (14)$$

$$N_x + \frac{1}{a} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \theta} = 6c(1-\nu)^2 D \cos \theta - D \left[\kappa_3 \Re \left\{ A \lambda^4 + \frac{1}{a^2} \left(4-\nu + \frac{1-\nu}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right) \lambda^2 + \frac{(1-\nu)^2 B}{a^4} \right\} \cos \lambda x \cdot \cos \theta + \kappa_4 \Im(\zeta) \right] \quad (15)$$

$$\text{ここで } V \equiv 1 - \frac{\nu}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2, \quad I \equiv 1 + \frac{\nu}{6(1+\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (16)$$

次に周囲条件につき考えるに、(3), (7), (8), (11) ていることがわかる。条件 1) に対しては次の諸式を
の諸式を見れば条件 2) のはじめの四つは既に満され うる。

$$\left. \begin{aligned} -cl^3 - c_0 l - \kappa_3 \Re \left[A\lambda^4 + \frac{2U}{a^2} \lambda^2 + \frac{B}{a^4} \right] \sin \lambda l - \kappa_4 \Im(\lambda) &= \delta \\ c(l^3 - 6\nu a^2 l) + c_0 l + \kappa_3 \Re \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda^4 + \frac{1}{a^2} \left\{ (2+\nu) + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \lambda^2 + \frac{B}{a^4} \right] \sin \lambda l \\ + \kappa_4 \Im(\lambda) &= -\delta \\ -3c[l^2 + 2(2+\nu)a^2] - c_0 + \kappa_3 \Re \frac{\lambda}{a^2} \left[\left\{ \nu - \frac{2-3\nu+3\nu^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \lambda^2 - \frac{B}{a^2} \right] \cos \lambda l + \kappa_4 \Im(\lambda) &= 0 \\ 3cl^2 + c_0 + \kappa_3 \Re \lambda \left[A\lambda^4 + \frac{2U}{a^2} \lambda^2 + \frac{B}{a^4} \right] \cos \lambda l + \kappa_4 \Im(\lambda) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

(17)式の四つの条件および条件 2) の最後の条件計
五つの条件式に対し、未知量は $c, c_0, \kappa_3, \kappa_4, \delta$ の五つ
でちょうど定めうるが、まず (17) 式の第 1, 第 2 を
辺々加えた式および第 3, 第 4 式を辺々加えた式を作
れば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} 6(2+\nu)a^2c - \kappa_3 \Re \lambda \left[A\lambda^4 + \frac{(2+\nu)B}{a^2} \lambda^2 \right] \cos \lambda l \\ - \kappa_4 \Im(\lambda) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

(18) 式より、 κ_3, κ_4 を c の関数として次式で与え
られる。

$$\left. \begin{aligned} 6\nu a^2 l c + \kappa_3 \Re \left[V\lambda^4 - \frac{\nu B}{a^2} \lambda^2 \right] \sin \lambda l + \kappa_4 \Im(\lambda) &= 0 \\ \kappa_3 &= -\frac{c}{A} \left[6\nu a^2 l \Re \lambda \left\{ A\lambda^4 + \frac{(2+\nu)B}{a^2} \lambda^2 \right\} \cos \lambda l + 6(2+\nu)a^2 \Re \left\{ V\lambda^4 - \frac{\nu B}{a^2} \lambda^2 \right\} \sin \lambda l \right] \\ \kappa_4 &= \frac{c}{A} \left[6\nu a^2 l \Re \lambda \left\{ A\lambda^4 + \frac{(2+\nu)B}{a^2} \lambda^2 \right\} \cos \lambda l + 6(2+\nu)a^2 \Re \left\{ V\lambda^4 - \frac{\nu B}{a^2} \lambda^2 \right\} \sin \lambda l \right] \\ A &= \Re \lambda \left[V\lambda^4 - \frac{\nu B}{a^2} \lambda^2 \right] \cdot \left[A\lambda^4 + \frac{(2+\nu)B}{a^2} \lambda^2 \right] \sin \lambda l \cdot \cos \lambda l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここで $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ (20)

次に (14), (15) 式を周囲条件 2) の最後の式に代
入する。この場合 λ の満すべき方程式⁽¹⁾

$$A\lambda^4 + \frac{4B}{a^2} \lambda^2 + \frac{12(1-\nu^2)B^2}{a^2 h^2} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

を利用すると κ_3, κ_4 の項は消えてしまい、 c が直接次
式で求められる。

$$c = \frac{h^2 P}{72(1-\nu^2)\pi a^3 D B} \dots\dots\dots (22)$$

最後に (17) 式の第 4 番目の式に l を乗じ、第 1 式
を辺々加えると δ の式として次式をうる。

$$\delta = 2cl^3 + \kappa_3 \Re \left[A\lambda^4 + \frac{2}{a^2} U\lambda^2 + \frac{B}{a^4} \right] (\lambda l \cos \lambda l - \sin \lambda l) + \kappa_4 \Im(\lambda) \dots\dots\dots (23)$$

(23) 式における c, κ_3, κ_4 はそれぞれ (22), (19) で
求められている。また c_0 は単に剛体として回転する

量を示しているので求める必要はない。すなわち未知
定数はすべて定まったことになり、問題は解けたこと
になる。

なお念のために任意断面における合せ断力は P に
等しくなり、合モーメントは Px に等しくなるべきこ
とを検算して見ると、それらは満たされていることが
わかる。

3. た わ み

(23)式により たわみ を計算して見るに、薄肉円筒
と言う条件として $a/h > 30$ を取り、また $l/a > 1$ なる範
囲についてのみ考えれば $\cosh 2\beta l, \sinh 2\beta l$ は甚大な数
となり十分な精度において $\cosh 2\beta l \cong \sinh 2\beta l \cong e^{2\beta l}/2$
としてよく、また $\sin 2\alpha l$ は $\sinh 2\beta l$ に対し省略で
きる。更に $A, B, C, \dots$ などを 1 とおけば たわみ δ の
式として次式をうる。

$$\delta / \frac{Pl^3}{3EI_0} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\left[\left\{ 12(1+\nu)(1-\nu^2) + 2(2+2\nu+\nu^2)\sqrt{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right) \right\} \left(\frac{a}{l} \right)^2 - \frac{6\nu^2(1-\nu^2)}{l\alpha} - \frac{(2+\nu)^2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{l\alpha} \left(\frac{h}{a} \right) \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]}{3(1-\nu^2) + (1+\nu)\sqrt{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)} \dots\dots\dots (24)$$

ここに I_0 は、この円筒をはりと考えたときの断
面二次モーメント $\pi a^3 h$ を表わし、したがって左辺分
母は単純はりと考えた場合の たわみ を表わしている。
しかるに せん断ひずみ を考慮した単純はりで計算し
た たわみ の式を δ' とすれば、これは次式で与えら
れる⁽²⁾。

$$\delta' / \frac{Pl^3}{3EI_0} = 1 + 6(1+\nu) \left(\frac{a}{l} \right)^2 \dots\dots\dots (25)$$

(25) 式は h/a を含まず、厚さの影響はないことにな
るが(25)式は(24)式にきわめて近い値を与える。特
に $h/a \rightarrow 0$ の場合は完全に一致する。第 2 図は $a/h =$
30, $\nu = 0.3$ の場合の (24) 式を曲線に描いたもので

第 2 図

$$w_{\theta=0} = cx^3 - 3cl^2x + \kappa_3 \Re \left[A\lambda^4 + \frac{2U}{a^2}\lambda^2 + \frac{B}{a^4} \right] [\sin \lambda x - \lambda x \cdot \cos \lambda l] + \kappa_4 \Im(\lambda) \dots (26)$$

(26)式に (19) 式を代入し、複素数の性質を利用すれば、

$$w_{\theta=0} = cx^3 - 3cl^2x - \frac{6\nu a^2lc}{A} \Im \left[A\bar{\lambda}^4 + \frac{2U}{a^2}\bar{\lambda}^2 + \frac{B}{a^4} \right] \times [\sin \bar{\lambda}x - \bar{\lambda}x \cdot \cos \bar{\lambda}l] \lambda \left[A\lambda^4 + \frac{(2+\nu)B}{a^2}\lambda^2 \right] \cos \lambda l \\ - \frac{6(2+\nu)a^2c}{A} \Im \left[A\bar{\lambda}^4 + \frac{2U}{a^2}\bar{\lambda}^2 + \frac{B}{a^4} \right] \times [\sin \bar{\lambda}x - \bar{\lambda}x \cdot \cos \bar{\lambda}l] \cdot \left[V\lambda^4 - \frac{\nu B}{a^2}\lambda^2 \right] \sin \lambda l \dots (27)$$

(27)式中の c は (22) 式で与えられる。また $x = -l$ のときは当然ながら (23) 式と一致する。なお $w_{\theta=0}$ ははじめに述べたように荷重端の中心を固定した場合の値であるから、固定端を基準に取れば $\delta - w_{\theta=0}$ が弾性線の値となる。第 3 図実線は $a/h = 50, \nu = 0.3$ の場合に軸方向に関して $w_{\theta=0}$ を図示したもので円筒の特徴であ

る波状が表われている。

この計算においては δ を求めたときと同様な精度の高い近似を行っており、また複素数の計算においては λ の満たすべき関係式 (21) 式およびこれから誘導される諸関係

第 3 図

図中点線で示した曲線はせん断力を考慮したはりの式⁽²⁾で計算したもので前述のように $x = -l$ の値は実線ときわめてよく一致するが、途中の値はかなり相違する。点線のほうは波状を呈せず、このことは応力分布にかなりの相違を生ずるであろうことを示している。なお鎖線は全くの単純はりとして計算したもので、これははなはだしく相違し問題とならない。

4. 応 力

せん断遅れの問題としては応力分布、特に固定端附近の応力分布が興味がある。応力の中 T_x は筆者の前

$$\left. \begin{aligned} \lambda^3 &= -\frac{4B}{a^2A}\lambda - \frac{12(1-\nu^2)B^2}{a^2h^2A(\lambda\bar{\lambda})}\bar{\lambda} \\ \lambda^5 &= -\frac{4B}{a^2A}\lambda^3 - \frac{12(1-\nu^2)B^2}{a^2h^2A}\lambda \\ &= \frac{4B}{a^2A} \left[\frac{4B}{a^2A}\lambda + \frac{12(1-\nu^2)B^2}{a^2h^2A(\lambda\bar{\lambda})}\bar{\lambda} \right] - \frac{12(1-\nu^2)B^2}{a^2h^2A}\lambda \\ &= \left[\frac{16B^2}{a^4A} - \frac{12(1-\nu^2)B^2}{a^2h^2A} \right] \lambda + \frac{48(1-\nu^2)B^3}{a^2h^2A^2(\lambda\bar{\lambda})}\bar{\lambda} \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

などを利用し、計算の簡素化に努めた。

図中点線で示した曲線はせん断力を考慮したはりの式⁽²⁾で計算したもので前述のように $x = -l$ の値は実線ときわめてよく一致するが、途中の値はかなり相違する。点線のほうは波状を呈せず、このことは応力分布にかなりの相違を生ずるであろうことを示している。なお鎖線は全くの単純はりとして計算したもので、これははなはだしく相違し問題とならない。

論文からはりとして計算せるものとあまり変わらないことが想像され⁽¹⁾、せん断の影響を見るためには S, N_x および波状変形をするため M_x などの値に興味を持たれる。まずエフェクティブなせん断力を取り扱い (14) 式について考える。(14) 式中の κ_3, κ_4 に (19) 式を代入し、たわみを計算したときと同様複素数の性質を利用すれば次式をうる。

$$\frac{1}{D} \left[S' - \frac{\Re}{a} \right]_{\theta=\pi/2} = \frac{72(1-\nu^2)ca^2I}{h^2} \\ + \frac{6\nu a^2lc}{A} (\lambda\bar{\lambda}) \Im \left[\frac{\nu A}{a^2}\bar{\lambda}^4 + \frac{12(1-\nu^2)BI}{a^2h^2}\bar{\lambda}^2 \right] \\ \times \left[A\lambda^4 + \frac{(2+\nu)B}{a^2}\lambda^2 \right] \cos \lambda l \cdot \cos \bar{\lambda}x \\ + \frac{6(2+\nu)a^2c}{A} \Im \bar{\lambda} \left[\frac{\nu A}{a^2} + \bar{\lambda}^2 \frac{12(1-\nu^2)BI}{a^2h^2}\bar{\lambda}^2 \right] \\ \times \left[V\lambda^4 - \frac{\nu B}{a^2}\lambda^2 \right] \sin \lambda l \cdot \cos \bar{\lambda}x \dots (29)$$

(29)式中 c は (22) 式で与えられ、この計算においても $\delta, w_{\theta=0}$ の計算のときと同様精度の高い近似を行い、また (28) 式などの諸関係を利用した。ただし、こ

これらの応力は固定端近くでは急激な変化が予想されるので、その極値の位置を求めておく必要がある。(29)式を x で微分し、それを零とおくことにより、その位

置を求めうるが、その位置が問題となる固定端附近すなわち $x=-l$ 附近につき考え、前と同様精度の高い近似を行えば、その位置はだいたい次式で与えられる。

$$\tan \alpha(l+x) = - \frac{\nu \left(\frac{h}{a} \right) \left[l \beta \sqrt{3(1-\nu^2)} \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 1 + \nu l a \right]}{\nu \left(\frac{h}{a} \right) \left[l \alpha \sqrt{3(1-\nu^2)} \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 1 - \nu l \beta \right] + (2+\nu) \sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (30)$$

他の応力についても全く同様な計算法を行った。ただ $N_x + 1/a \cdot \partial \mathfrak{M} / \partial \theta$ を求めるには(15)式から直接求めなくとも $S' - \mathfrak{M}/a$ の式から次のように簡単に求めることができる。すなわち(21)式を用い(15)式を变形すれば

$$\begin{aligned} A \lambda^4 + \frac{1}{a^2} \left(4 - \nu + \frac{1-\nu}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right) \lambda^2 + \frac{(1-\nu)^2 B}{a^4} \\ = \frac{1}{a^2} \left[4 - \nu + \frac{1-\nu}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 - 4B \right] \lambda^2 \\ - \frac{12(1-\nu^2)B}{a^2 h^2} \left[B - \frac{(1-\nu)}{12(1+\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \\ = - \frac{\nu A}{a^2} \lambda^2 - \frac{12(1-\nu^2)BI}{a^2 h^2} \quad (31) \end{aligned}$$

なるゆえに

$$\begin{aligned} \left[N_x + \frac{1}{a} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = 6c(1-\nu)^2 D + D \left[\kappa_3 \mathfrak{M} \lambda^3 \left\{ \frac{\nu A}{a^2} \lambda^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{12(1-\nu^2)BI}{a^2 h^2} \right\} \cos \lambda x + \kappa_4 \vartheta(\lambda) \right] \quad (32) \end{aligned}$$

(32)式と(14)式を比較すれば次式をうる。

$$\begin{aligned} \left[S' - \frac{\mathfrak{M}}{a} \right]_{\theta=\pi/2} + \left[N_x + \frac{1}{a} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = \frac{72(1-\nu^2)ca^2 DI}{h^2} \\ + 6c(1-\nu)^2 D = \frac{72(1-\nu^2)ca^2 D}{h^2} \left[I + \frac{(1-\nu)}{12(1+\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

上式に(22)の関係を代入すれば次式をうる。

$$\left[S' - \frac{\mathfrak{M}}{a} \right]_{\theta=\pi/2} + \left[N_x + \frac{1}{a} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = \frac{P}{\pi a} \quad (33)$$

この関係から $S' - \mathfrak{M}/a$ の値がわかれば $N_x + 1/a \cdot \partial \mathfrak{M} / \partial \theta$ は簡単に求めることができる。(33)の関係は先に述べた周囲条件2)の最後の式が x のいかんによらず成立すべきことから当然予想されることである。

第4図は $a/h=50$, $l/a=2$, $\nu=0.3$ の場合に上記のようにして求めた各応力の軸 x に関する曲線でせん断遅れのありさまがよくわかる。はじめに予想したとおり T_x はほとんど直線となる。実際はやはり波状を呈するがその振幅はきわめて小で図には表わし得ない。全体として固定端附近の応力の分布状態の傾向は筆者の前論文の場合⁽¹⁾とかなり似ているのはむしろ当然であ

$$3\nu(1-\nu^2) \left(\frac{l}{a} \right)^2 / l \alpha = \left[3(1-\nu^2) + (1+\nu) \sqrt{3(1-\nu^2)} \right] \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{(2+\nu)}{2} \left(\frac{h}{a} \right) \sqrt{3(1-\nu^2)} \quad (34)$$

第6図は $\nu=0.3$ の場合に a/h の値に対し $S' - \mathfrak{M}/a$ が零になる l/a の値を図示したものである。これらの関係はすべてエフェクティブの値について考えて来たが、これを S について考えても(34)に相当する値は

第 4 図

る。最も興味ある $S' - \mathfrak{M}/a$ と $N_x + 1/a \cdot \partial \mathfrak{M} / \partial \theta$ の関係はこの線図から、固定端にては、荷重の受持ちはほとんど $S' - \mathfrak{M}/a$ にて行われていることがわかる。しかるに l/a が増大するにしたがい $S' - \mathfrak{M}/a$ の受持ちは漸時減少し、反対に $N_x + 1/a \cdot \partial \mathfrak{M} / \partial \theta$ の受持ちが増して来る。第5図は $a/h=50$, $l/a=10$, $\nu=0.3$ の場合のこれらせん断力の線図である。これを見れば N_x

第 5 図

$+1/a \cdot \partial \mathfrak{M} / \partial \theta$ の受持ちが増している。しかしこれは固定端における現象で、固定端からわずかに内部にはいれば、やはりほとんど $S' - \mathfrak{M}/a$ が荷重を受持っていることがわかる。このように固定端においては $S' - \mathfrak{M}/a$ の値が l/a の増加とともに減少するから l/a のある値に対して $S' - \mathfrak{M}/a$ が零となるところがあるはずである。固定端における値は(29)式で $x=-l$ とおけば得られ、この値を零とおけば前述と同様な高精度の近似値として次式をうる。

ほとんど変わらないことがわかる。

このような現象がなぜ生ずるかを考えて見るに、前述のように合せん断力は l のいかんによらず一定値 P であるが、合モーメントは l に比例した Pl である。

第 6 図

しかして N_x はこの Pl に関係し、 l の増大とともに増すので、したがって S' が減少せざるを得ないためである。この現象は次のように考えれば更によく理解できる。すなわち円筒の長さが l のときと $l+l'$ のときを考えて見るに後者の場合に固定端附近の状態は Saint Venant の法則により l の長さに P なる力とここに $l'P$ なるモーメントが作用したときとほとんど同一のはずである。したがって荷重端に曲げモーメントが作用したときの固定端におけるせん断力がいかに変化するかを考えればよい。この曲げモーメントが何の阻止もなく生ずる場合、固定端を基準に取れば、その変位は次式で与えられる⁽¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} w &= ca^2 \cos \theta, & u &= -2acx \cos \theta, \\ v &= -c(x^2 - 2\nu a^2) \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (35)$$

これは固定端で $w=0$, $u=0$, $\partial w/\partial x=0$ の条件を満たすが、 $v=2\nu ca^2 \sin \theta$ となり零とならない。完全固定なるためには条件 1) に示したように、これは零ならしめねばならず、そのため接線せん断力を減ずる方向にせん断力が生ぜねばならない。したがってこの現象は固定端におけるごく局部的な現象で、少し内部にはいれば円筒の長さには無関係となるはずである。事実第 4 図、第 5 図を見れば明らかにこのような現象を生じている。いまこの説明に (35) 式を用いたが、この式を用いなくとも、曲げモーメントにより軸方向に引張力が生ずれば円周方向に収縮を起す。固定端にてはこの収縮が阻止されるため、円周方向せん断力が減少する方向にせん断力が生じ同時に荷重と平衡するための横断せん断力が生ずると考えればよい。このように考えれば l の増大とともに円周方向せん断力が減少するのはむしろ当然であることがわかる。このことはまた (24) 式の分子に負の項が存在することとも関連している。この現象はせん断遅れの理論としてはきわめて興味深いことであるが、上記のようにその範囲は固定端のごく一小部分に限られており、また $S'-M/a$ が零となるとときには T_x が既に大なる値となっているので実際にはあまり問題とならないであろう。

第 7 図はモーメントの値を軸方向に関して図示したものであるが M はその値が小さいので省略した。す

べてこれらの値は波状を呈し、はりの式からは予測できない。

第 7 図

前述のように、これらの応力分布のありさまは筆者の前論文⁽¹⁾とその傾向は似てはいるが大きさはかなり異なっている。その原因は前論文では均一荷重に相当する場合のためにもよるが、最も大きな理由は端における固定状況の相違である。前論文の場合その条件は

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad u=0 \quad \dots\dots (36)$$

で与えられているのに反し、本題では

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad v=0, \quad u=0 \quad \dots\dots (37)$$

(37) は真の固定の条件であり、(36) は前論文中に述べてあるとおりに傾斜を変化せぬように規定し、しかもその固定装置と円筒間には何ら摩擦のない場合に相当しており、これは、ビルトインまたはクランプといわれているものに相当している。(ただし、このビルトインの定義には他にも考えられる。)普通はりではこの固定とビルトインとはあまり厳重に区別しておらないようであるが、薄肉円筒の場合は厳重に区別することが必要である。(36) 式によれば端において荷重はすべて横断せん断力にて受持つため、一般に殻への食込みは真の固定の場合よりはなほだしい⁽⁸⁾。

5. 結 言

以上の所論を要約すると次のようになる。

- (1) たわみ δ はせん断ひずみを考慮したはりの式で十分に表わしうる。しかし厳密にはこのはりの式はわずかに補正し過ぎる傾向にある。また弾性線の式ははりの式からは十分な値は得られない。
- (2) 軸方向の応力は単純はりとして計算したもので十分正確に表わしうる。
- (3) 固定端においては、荷重はだいたい円周方向のせん断力を受持つが、円筒の長さが長くなるに従い、円周方向のせん断力の受持ちが減じ、反対に、横断せん断力の受持ちが増大する。ただしこのありさまは固定端におけるきわめて局部的な現象であって、わずかに内部にはいれば円筒の長さいかにらず、

荷重はほとんど円周方向のせん断力が受持つ。

(4) 固定端附近の応力分布はすべて波状を呈し、軸方向応力以外は、一般に激しい変化をなし、はりの式からは推測できない。

文 献

- (1) 機械学会論文集, 20巻 95号(昭29-7) 483 ページ.
- (2) たとえば Timoshenko, 材料力学, 片山, 北畠訳, p. 117..
- (3) 注 (1) の論文 488 ページ第 4 図参照.

539.384.2 : 624.073.1

面内荷重を受ける長方形板内の応力分布*

(ひずみエネルギーによる解法)

浜 田 実**

Stress Distribution in a Rectangular Plate Subject to Forces Acting in it's Plane

(Method by Strain Energy)

by Minoru HAMADA

The problem of stress distribution in a rectangular plate subject to forces acting in it's plane has been solved by using various methods, but some of them are very complicated for numerical calculations and others are not enough in accuracy. In this study, this problem is solved approximately by the method of strain energy, using double Fourier cosine series, thereby boundary conditions are considered as constrained conditions in the calculus of variations. Numerical calculations are carried out for some examples, and it has been found that their results agree very well with other exact solutions.

1. 緒 言

周辺に面内荷重を受ける長方形板内の応力分布の問題は以前に大久保教授⁽¹⁾により一般解が与えられており、また二対辺中央に集中荷重が作用する場合については最近八巻氏⁽²⁾が解いておられるが、いずれも数値計算はかなり複雑である。他に久野氏⁽³⁾や樋口氏ら⁽⁴⁾の解があるが精度はあまりよくない。また階差法や弛張法による場合も手数なりに精度は低いようである(計算例 [6] 参照)。これに対して Conway 氏ら⁽⁵⁾は二対辺のみに荷重が作用する場合において、まず荷重辺の条件のみ考えた応力関数を求め、次に他の二辺の条件をみたすためエネルギー法により求めた第2応力関数の解を重ねる方法を提案しているが、各問題ごとに第2関数を求める手数はかなり大きい。筆者は最初よりエネルギー法により応力関数を求める方法を用いる。元来エネルギー法は精度が低いといわれるが、項数を十分多くとれば高くできるのであり、その場合連立方程式の未知数なるべく少なくするため境界条件をゆるく取ることとする。これは前に周辺固定長方形板の横振

動などの問題で用いた方法⁽⁶⁾と同じであるが、数値計算の結果、かなり良好な精度が得られることがわかった。なおここでは荷重が周縁に垂直の場合のみ考え、それに沿う荷重すなわちせん断荷重の場合は取り扱わない。

2. 解 法

両辺の長さを a および b とし、第1図のように座標系 $O-X, Y$ をとる。また無次元変数 $x=X/a$ および $y=Y/b$ を用いる。次に板厚を t とし周辺の荷重分布

第 1 図

* 昭和 32 年 3 月 20 日 関西支部第 32 期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 32 年 7 月 10 日.

** 正員, 大阪大学工学部 (大阪市都島区東野田町).