流体中における円柱の偏心回転運動 (第 2 報)*

飯 田 周 助**

On the Eccentric Rotation of a Circular Cylinder in Fluid (2nd Report)

by Syūsuke IIDA

In the previous and another reports, we obtained the stream functions for the eccentric rotational motion of a cylinder in fluid. In this report, from these results we calculate the pressure distributions on the surface of the cylinder and the resultant force.

The pressure distributions for the motion in the infinitely wide region (Case A) are expressed by Eq. (4) and for the motion in the cylindrical vessel (Case B), by Eq. (12), and some numerical examples are shown in Fig. 1 for Case A and in Fig. 5 and 6 for Case B.

The resultant force P_L' acting towards the direction that increases the eccentricity, is expressed by Eq. (8) for Case A and by Eq. (22) and (25) (when r_i/r_0 is nearly equal to 1) for Case B. Figs. 7 and 8 show the above results respectively for $\omega/\Omega=1$ (forward precession) and for $\omega/\Omega=-1$ (backward precession).

Also we calculate the attached moment of inertia which is shown in Eqs. (30) and (31), and in Fig. 12.

1. 緒 言

著者はさきに円柱が流体中で偏心回転する場合、周囲の流体の運動を理論的に解析し、流れの関数を求めた⁽¹⁾⁽²⁾。本論文ではその結果を用いて流体の円柱に及ぼす力、付加慣性モーメントなどを計算し、一方また円柱表面上の圧力分布を実験的に求めて計算と比較した。

2. 圧力分布およびその合力

A. 無限に広い領域における偏心回転の場合
流れの関数 $\Psi' = \Omega r_i^2 \Psi^{***}$ は

$$\begin{aligned} \Psi = & -\log r + \left(\frac{A_1}{r} + \frac{A_3}{r^3} + \frac{A_5}{r^5} + \frac{A_7}{r^7} \right) \sin \alpha \\ & + \left(\frac{A_2}{r^2} + \frac{A_4}{r^4} + \frac{A_6}{r^6} + \frac{A_8}{r^8} \right) \sin 2\alpha \\ & + \left(\frac{B_1}{r} + \frac{B_3}{r^3} + \frac{B_5}{r^5} + \frac{B_7}{r^7} \right) \cos \alpha \\ & + \left(\frac{B_2}{r^2} + \frac{B_4}{r^4} + \frac{B_6}{r^6} + \frac{B_8}{r^8} \right) \cos 2\alpha \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [p]_{r=1} = & \left\{ \left(1 - \frac{\omega}{\Omega} \right) + 4(3B_2 + B_4) \right\} \frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{r_i} \sin \alpha + \left\{ 12 \frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{r_i} - 6A_1 - 2A_3 \right\} \frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{r_i} \cos 2\alpha + \left\{ \frac{1}{R_i} \left(624 \frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{r_i} \right. \right. \\ & \left. \left. - 360A_1 - 136A_3 \right) - (12A_2 + 4A_4) \frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{r_i} \right\} \cos \alpha + \left\{ \frac{1}{R_i} (216B_2 + 80B_4) + (12B_1 + 4B_3) \frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{r_i} \right\} \sin 2\alpha \\ & + \text{const.} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

で表わされる⁽¹⁾。これより動径方向および切線方向の各分速度はそれぞれ

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \quad v_\alpha = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

で表わされる。いま粘性流体の運動方程式のうち

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\alpha'}{\partial t'} + v_r' \frac{\partial v_\alpha'}{\partial r'} + \frac{v_\alpha'}{r'} \frac{\partial v_\alpha'}{\partial \alpha} + \frac{v_r' v_\alpha'}{r'} \\ = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p'}{r' \partial \alpha} + \nu \left(\nabla^2 v_\alpha' + \frac{2}{r'^2} \frac{\partial v_r'}{\partial \alpha} - \frac{v_\alpha'}{r'^2} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (2)$$

を用いて圧力 $p' = \rho_w (\Omega r_i)^2 p$ を求める。ここで $\partial v_\alpha' / \partial t' = -\omega (\partial v_\alpha' / \partial \alpha)$ であるから上式を無次元形で表わすと

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \alpha} = & \frac{\omega}{\Omega} r \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} - \left(r v_r \frac{\partial v_\alpha}{\partial r} + v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + v_r v_\alpha \right) \\ & + \frac{1}{R_i} \left(r \nabla^2 v_\alpha + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \alpha} - \frac{v_\alpha}{r} \right) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

となる。これに (1) を代入して α について積分し、 $r=1$ とおくと円柱表面の圧力分布をうる。すなわち

となる。ここで const. は偏心 0 のときの表面の圧力を示し、また $1/R_i^2$ 以下を含む項は省略してある。上式右辺第 3, 4 項の影響は小さいので、いま第 1, 2 項のみをとって計算した例を第 1 図に示す。実線は d/r_i

* 昭和 28 年 4 月 3 日 第 30 期定時総会 および 昭和 32 年 4 月 4 日 第 34 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 32 年 4 月 8 日。

** 正員、大阪府立大学工学部 (堺市百舌鳥東之町)。

*** 記号 ' のあるものは有次元量、ないものは無次元量を表わす。

第1図 円柱表面上の圧力分布

第2図 実験装置

=1.0 のとき $\omega/\Omega=2.0, 1.0, -1.0$ と変えたときの計算結果である。この結果を確かめるため次のような実験を行った。すなわちこの装置は第2図のごとく、第1報と同じ水そう中で円柱(黄銅管)を垂直軸の回りに回転せしめるもので、圧力はその中央の小穴(1.5 mm ϕ)より導管(外径 3 mm, 内径 1.5 mm の銅管)で円柱外に導き、それをゴム管で回転軸中にそう入した同種の銅管につなぎ、更にその銅管の他端を回転軸上部で液柱計の一端に接続して、この液柱計により測定した。この液柱計(U字型ガラス管)の他端は大気開放されており、使用した液体はテトラブロームエタン(比重=2.975)を赤色に着色したものである。液柱計は回転軸に固定されていて円柱とともに回転するもので、回転がおそいときは、その液面の高さは十分正確に測定できる。そして $\omega=\Omega$ のとき液柱計は円柱に相対的に静止しているが、 $\omega \neq \Omega$ になると相対的に位置が変化して圧力測定は不可能となるので、 $\omega=\Omega$ の場合のみについて実験を行った。なお導管自体が回転しているから、その中の水の遠心力によって液柱計の読みには誤差を生ずるわけであるから、これは導管中各部分の水の容積、回転軸よりの距離を測って計算によって補正した。このような方法により穴の方向(α)を 30° ずつ変えて圧力を測定した。

いま、 $d=r_i=50\text{mm}$, $\omega=\Omega=10.47\text{ rad/s}$ (100 rpm) なる場合の実験結果が第1図の点線で示されるものである。おおよその傾向は計算と合うが、後縁側($\alpha=180^\circ$)では計算値より低い値を示す。これは、はく離によるものであることが推察でき、 d/r_i が大きくなるほどこの傾向は顕著になる。また $|\omega/\Omega|$ が大きくなったときも同じことが言えるものと思われる。

次にこのような運動において流体に生ずる応力は下のように表わされる。 r —一定の面に r の方向に生ずる応力を p_{rr} , r —一定の面に α の増す方向に生ずる応力を $p_{r\alpha}$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + \frac{2}{R_i} \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ p_{r\alpha} &= \frac{1}{R_i} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \alpha} - \frac{v_\alpha}{r} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

で表わされ⁽⁸⁾, これに (1), (4) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} [p_{rr}]_{r=1} &= -[p]_{r=1} \\ [p_{r\alpha}]_{r=1} &= -\frac{1}{R_i} \left\{ 2 + 8 \left(3A_1 + A_3 - 6 \frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{r_i} \right) \sin \alpha \right. \\ &\quad \left. + 8(3B_2 + B_4) \cos 2\alpha \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

となる。第3図からわかるように

第3図

$$\left. \begin{aligned} P_L' &= \text{偏心を大きくする力} \\ &= \int_0^{2\pi} (-p_{rr}' \sin \alpha - p_{r\alpha}' \cos \alpha) r_i d\alpha \\ P_D' &= \text{偏心回転に対する抵抗力} \\ &= \int_0^{2\pi} (-p_{rr}' \cos \alpha + p_{r\alpha}' \sin \alpha) r_i d\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

であるから、これに (6) を代入すると円柱に作用する流体の力が求められる。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{P_L'}{(\rho_w \pi r_i^2) r_i \Omega^2} &= \left(1 - \frac{\omega}{\Omega} \right) \frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{r_i} \\ &\quad + 4(3B_2 + B_4) \frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{r_i} \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_D'}{(\rho_w \pi r_i^2) r_i \Omega^2} &= \frac{1}{R_i} \left(672 \frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{r_i} - 384A_1 - 144A_3 \right) \\ &\quad - (12A_2 + 4A_4) \frac{\omega}{\Omega} \frac{d}{r_i} \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

となる。

B. 円筒容器における偏心回転の場合

第 4 図左 (z -面) において中心 O' の円が O のまわりに偏心回転する場合, これを $z = -(a\zeta + 1)/(\zeta + a)$ なる関係で右 (ζ -面) に写像して考える⁽²⁾. このと

第 4 図

$$[p]_{\theta=c} = \frac{[p']_{\theta=c}}{\rho_w(\Omega r_0)^2} = -M_1 \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \cos \beta_c - M_2 \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \cos 2\beta_c + \frac{1}{R} \left\{ \frac{6c}{(1-c)^3} (A_3 + 4A_5 + 10A_7) \right. \\ \left. - \frac{2}{(1-c)^2} (A_1 + 3A_3 + 6A_5 + 10A_7) - 2 \left(\frac{1}{c} \frac{d}{r_0} - \frac{1}{a} \frac{r_i}{r_0} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{a} \frac{r_i}{r_0} \right) \right\} \sin \beta_c + \text{const.} \quad (12)$$

となる. ここで

$$M_1 = -c \frac{r_0}{r_i} \frac{d}{r_i} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 + \left\{ \frac{2c^2}{a} \frac{r_0}{r_i} + \frac{1+c^2}{1-c^2} \frac{d}{r_i} + \frac{1+c^2}{2ac} \left(\frac{d}{r_i} \right)^2 \right\} \frac{\omega}{\Omega} - \left\{ \frac{2c^2}{1-c^2} \frac{d}{r_i} + \frac{1}{a} \left(\frac{d}{r_i} \right)^2 \right\} \quad (13)$$

$$M_2 = \frac{c(2+c)}{2(1-c)^2} \left(\frac{d}{r_i} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 + \left\{ \frac{-1+6c+6c^2-10c^3-c^4}{4c(1-c)^2} \cdot \frac{d}{r_i} + \frac{1-6c-7c^2}{4(1-c)^2} \left(\frac{d}{r_i} \right)^2 \right\} \frac{\omega}{\Omega} \\ + \left\{ \frac{2-3c+c^2}{(1-c)^2} \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{c(7-6c-c^2)}{2(1-c)^2} \frac{1}{a} \frac{d}{r_i} + \frac{3c^2}{2(1-c)^2} \left(\frac{d}{r_i} \right)^2 \right\} \quad (14)$$

である. ただし, ここに

$$A_1 + A_3 + A_5 + A_7 = -c(d/r_0)(\omega/\Omega) + c(d/r_0) \\ - (1-c^2)(1/a)(r_i/r_0) \\ 2A_1 + 3A_3 + 4A_5 + 5A_7 = (1-c) \{ (d/r_0)(\omega/\Omega) \\ - 2c(1/a)(r_i/r_0) \} \\ A_1 + 3A_3 + 6A_5 + 10A_7 = A_1 + 3A_3 + 5A_5 + 7A_7 \\ = (2+c)(d/r_0)(\omega/\Omega) - 3c(d/r_0) \\ + (3-4c+c^2)(1/a)(r_i/r_0)$$

なる関係が用いてある.

また円柱表面上の点については第 4 図のとおり, z -面と ζ -面とにおいて β_c , ϕ_i および δ の間に次の関係がある.

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta_c &= -\sin \phi_i + \{(1+c^2)/2ac\} \sin 2\phi_i \\ \cos \beta_c &= -\cos \phi_i \\ &\quad - \{(1+c^2)/2ac\} (1-\cos 2\phi_i) \\ \sin \phi_i &= \sin \delta + (d/2r_i) \sin 2\delta \\ \cos \phi_i &= \cos \delta - (d/2r_i) (1-\cos 2\delta) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

いま δ に対する圧力分布 $p'/\rho_w(\Omega r_i)^2$ を (12) により計算した一例を第 5, 6 図の実線で示す. ただし $1/R$ を含む項は無視してある.

第 2 図と同じ装置に外円筒を付け加えて同じ方法で実験した結果が点線で示されたもので, いずれも $r_i = 50 \text{ mm}$, $r_0 = 71.4 \text{ mm}$, $\omega = \Omega = 12.57 \text{ rad/s}$ (120 rpm) であり, 第 5 図は $d = 5.6 \text{ mm}$, 第 6 図は $d = 10.7 \text{ mm}$ である. 計算結果はおおよそ等しい傾向を示しているが, A の場合と同様に, はく離のため後縁側では ($\delta = 90^\circ$ の側). 実験値は計算値より低い圧

き ζ -面における流れの関数 $\Psi' = \Omega r_0^2 \Psi$ は

$$\Psi = - \left(\frac{r_i}{r_0} \frac{c}{1-c^2} + \frac{1}{2a} \frac{d}{r_0} \right) \left(\log \rho - \frac{\rho^2}{2} \right) \\ + \left\{ A_1 \left(\frac{1-\rho}{1-c} \right)^2 + A_3 \left(\frac{1-\rho}{1-c} \right)^3 + A_5 \left(\frac{1-\rho}{1-c} \right)^4 \right. \\ \left. + A_7 \left(\frac{1-\rho}{1-c} \right)^5 \right\} \cos \beta \quad (10)$$

で表わされる. 前の場合と同様にして

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{\omega}{\Omega} \rho \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} - \left(\rho v_\rho \frac{\partial v_\beta}{\partial \rho} + v_\beta \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + v_\rho v_\beta \right) \\ + \frac{1}{R} \left(\rho v^2 v_\beta + \frac{2}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \beta} - \frac{v_\beta}{\rho} \right) \quad (11)$$

なる関係によって円柱表面の圧力分布が得られる. すなわち

第 5 図 円柱表面上の圧力分布

第 6 図 円柱表面上の圧力分布

力を示している。

次に (5) と同様に考えた応力

$$p_{\rho\rho} = -p + \frac{2}{R} \frac{\partial v_{\rho}}{\partial \rho}, \quad p_{\rho\beta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_{\beta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_{\rho}}{\partial \beta} - \frac{v_{\beta}}{\rho} \right) \quad (16)$$

に (10), (12) を代入すると

$$\begin{aligned} [p_{\rho\rho}]_{\rho=c} &= (r_i/r_0)^2 (M_1 \cos \beta_c + M_2 \cos 2\beta_c) \\ &+ (1/R) \left\{ -6c(1-c)^{-3} (A_3 + 4A_5 + 10A_7) \right. \\ &+ 2(1-c)^{-2} (A_1 + 3A_3 + 6A_5 + 10A_7) \\ &+ 4 \left(\frac{1}{c} \frac{d}{r_0} - \frac{1}{a} \frac{r_i}{r_0} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{a} \frac{r_i}{r_0} \right) \left. \right\} \sin \beta_c + \text{const.} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} [p_{\rho\beta}]_{\rho=c} &= \frac{1}{R} \left[\left\{ -\frac{2}{(1-c)^2} (A_1 + 3A_3 + 6A_5 \right. \right. \\ &+ 10A_7) - \left(\frac{1}{c} \frac{d}{r_0} - \frac{1}{a} \frac{r_i}{r_0} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{a} \frac{r_i}{r_0} \right) \left. \right\} \cos \beta_c \\ &- \frac{2}{c^2} \left(\frac{r_i}{r_0} \frac{c}{1-c^2} + \frac{1}{2a} \frac{d}{r_0} \right) \left. \right] \quad (18) \end{aligned}$$

となる。第4図に示すように近似的に

$$\begin{aligned} p_r &= p_r' / \rho_w (\Omega r_0)^2 = [p_{\rho\rho}]_{\rho=c}, \\ p_{\beta} &= p_{\beta}' / \rho_w (\Omega r_0)^2 = [p_{\rho\beta}]_{\rho=c} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P_L'}{(\rho_w \pi r_i^2) r_i \Omega^2} &= \left(\frac{d}{r_i} \right) \left[\left\{ -1 + \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \right\} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 + \left\{ 1 + 3 \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \right\} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) - 2 \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \right] / \left\{ 1 - \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \right\} \\ &+ \left(\frac{d}{r_i} \right)^3 \left[\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \right\} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) - \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \right] / \left\{ 1 - \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \right\} \\ &+ \left(\frac{d}{r_i} \right)^3 \left\{ - \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^3 \left(2 + \frac{r_i}{r_0} \right) \left(1 + \frac{r_i}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 + \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^4 \left(1 + \frac{r_i}{r_0} \right) \left(1 + 3 \frac{r_i}{r_0} \right) \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) - 2 \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^6 \right\} / \left\{ 1 - \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \right\}^3 \quad (20) \end{aligned}$$

と考えると

$$P_L' = \text{偏心を大きくする力} = \int_0^{2\pi} (-p_r' \cos \delta + p_{\beta}' \sin \delta) r_i d\delta \quad (21)$$

$P_{Di}' = \text{偏心回転に対する抵抗力}$

$$= \int_0^{2\pi} (p_r' \sin \delta + p_{\beta}' \cos \delta) r_i d\delta \quad (22)$$

であるから、これに (17), (18) を代入すると円柱に作用する流体の力が求められる。すなわち

$$\frac{P_L'}{(\rho_w \pi r_i^2) r_i \Omega^2} = M_1 - \left(\frac{1+c^2}{ac} - \frac{d}{r_i} \right) M_2 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{Di}'}{(\rho_w \pi r_i^2) r_i \Omega^2} &= \frac{1}{R} \left(\frac{r_0}{r_i} \right)^2 \left\{ \frac{6c}{(1-c)^3} (A_3 + 4A_5 + 10A_7) \right. \\ &- 3 \left(\frac{1}{c} \frac{d}{r_0} - \frac{1}{a} \frac{r_i}{r_0} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{a} \frac{r_i}{r_0} \right) \left. \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

となる。

なお r_i/r_0 が 1 にごく近い値をもつときは

$$\begin{aligned} c &\doteq r_i/r_0, \\ 1/a &\doteq (d/r_0) / \{1 - (r_i/r_0)^2\} \doteq d/2(r_0 - r_i) \quad (25) \end{aligned}$$

となり、このとき (22) は

となる。そしてさらに d/r_i がきわめて小さいときは

$$\begin{aligned} \frac{P_L'}{(\rho_w \pi r_i^2) r_i \Omega^2} &= \frac{d}{r_i} \left[\left\{ -1 + \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \right\} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right. \\ &+ \left\{ 1 + 3 \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \right\} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) - 2 \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \left. \right] / \left\{ 1 - \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

で表わされる。

(22) の関係を $\omega/\Omega = 1.0$ および -1.0 について図示したものが、それぞれ第7, 8図である。前者は $P_L' > 0$ であり、後者は $P_L' < 0$ となる。

また第5, 6図に示した実験例について、測定された圧力分布から得た合力 P_L' の値を第7図中の黒点で示した。(これは第4図の圧力 p_r' の合力の OO' 方向の成分である。 p_{β}' の方は含まれていない。)

(23) の関係を d/r_i あるいは r_i/r_0 に対して示したのが第9, 10図である。

第7~10図からわかるように、これらの力は r_i/r_0 が1に近いほど、また d/r_i が大きいほど大きくなる。

次に外円筒に作用する圧力は

$$\begin{aligned} [p]_{\rho=1} &= \frac{1}{R} \left\{ -\frac{2A_1}{(1-c)^2} + \frac{6A_3}{(1-c)^3} \right\} \sin \beta \\ &+ \text{const.} \quad (27) \end{aligned}$$

第7図 $\omega/\Omega = 1.0$ の場合

第8図 $\omega/\Omega = -1.0$ の場合

となり,これを全円周について積分するとその合力 $P_{Do'}$ は

$$\frac{P_{Do'}}{(\rho_w \pi r_0^2) r_0 \Omega^2} = \frac{1}{R} \left\{ \frac{2A_1}{(1-c)^2} - \frac{6A_3}{(1-c)^3} \right\} \dots (28)$$

となる. 第 11 図にこの値の d/r_i あるいは r_i/r_0 に対する関係を示した. これも内円柱にはたらく力と同様に r_i/r_0 が 1 に近いほど, また d/r_i が大きくなるほど大となる.

3. 付加慣性モーメント

A. 無限に広い領域における偏心回転の場合

円柱周囲の流体の持っている運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} \rho_w \iint (v_r'^2 + v_\alpha'^2) r' dr' d\alpha$$

で表わされるが, このうち偏心回転によってよけいに加わった部分は

$$\frac{1}{2} \rho_w \iint \left((v_r'^2 + v_\alpha'^2 - \frac{\Omega^2 r_i^2}{r'^2}) \right) r' dr' d\alpha$$

で,これを $(1/2) I_a' \Omega^2$ とおくと付加慣性モーメント I_a' は

$$I_a = \frac{I_a'}{\rho_w \pi r_i^4 / 4} = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \left(v_r^2 + v_\alpha^2 - \frac{1}{r^2} \right) r dr d\alpha \dots (29)$$

である. これに (1) を代入して計算すると

第 9 図

第 10 図

第 11 図

$$I_a = \{2.743A_1^2 + 1.143A_1A_3 + 0.152A_3^2 - 5.029A_1(\omega d/\Omega r_i) - 0.914A_3(\omega d/\Omega r_i) + 6.971(\omega d/\Omega r_i)^2\} \\ + \{1.714B_2^2 + 0.800B_2B_4 + 0.105B_4^2\} + \{1.714A_2^2 + 0.800A_2A_4 + 0.105A_4^2\} \\ + \{2.743B_1^2 + 1.143B_1B_3 + 0.152B_3^2\} \dots (30)$$

となる.

B. 円筒容器中における偏心回転の場合

流体の持っている運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} \rho_w \iint \left\{ \left(-\frac{\partial \Psi'}{\partial r'} \right)^2 + \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial \Psi'}{\partial \phi} \right)^2 \right\} r' dr' d\phi \\ = \frac{1}{2} \rho_w \Omega^2 r_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right)^2 \right\} \rho d\rho d\beta$$

$$I_a = \frac{I_a'}{\rho_w \pi r_i^4 / 4} = \left(\frac{r_0}{r_i} \right)^4 \left\{ \frac{4(1+3c)}{3(1-c)} A_1^2 + \frac{12(1+4c)}{5(1-c)} A_1A_3 + \frac{32(1+5c)}{15(1-c)} A_1A_5 + \frac{40(1+6c)}{21(1-c)} A_1A_7 \right. \\ \left. + \frac{6(1+5c)}{5(1-c)} A_3^2 + \frac{16(1+6c)}{7(1-c)} A_3A_5 + \frac{15(1+7c)}{7(1-c)} A_3A_7 + \frac{8(1+7c)}{7(1-c)} A_5^2 + \frac{20(1+8c)}{9(1-c)} A_5A_7 + \frac{10(1+9c)}{9(1-c)} A_7^2 \right\} \dots (31)$$

であって,これを $(1/2) I' \Omega^2$ とおき (10) を代入すると

$$\frac{I'}{\rho_w r_0^4} = \left(\frac{r_i}{r_0} \frac{c}{1-c^2} + \frac{d}{r_0} \frac{1}{2a} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right)^2 \rho d\rho d\beta \\ + \frac{I_a'}{\rho_w r_0^4}$$

となり,ここで I_a' は付加慣性モーメントを表わし, 小さい値を省略して結局次のようになる.

第12図にこの値の d/r_i あるいは r_i/r_0 に対する関係を示した。これも r_i/r_0 が1に近いほど、また d/r_i が大きくなるほど大となる。さらに ω/Ω の値を変えてみると、 $\omega/\Omega=1.0$ のときが他の二つの場合2, -1のときより小さい値を示している。

第12図

4. 結 論

(i) 円柱に作用する流体の圧力分布は、周囲に容器のない場合およびある場合について、それぞれ(4)および(12)で表わされ、はく離の影響が大きくひびかない範囲において、実験とほぼ一致した傾向を得た。

(ii) 上の圧力の合力については、偏心回転に抵抗する力はもちろん生ずるが、そのほかに偏心を大きくする方向の力、あるいは逆に小さくする方向の力を生ずることが注目すべき点である。

円筒容器中で回転する場合は(26)からわかるように

$$[1+3(r_i/r_0)^2 + \{1-2(r_i/r_0)^2+17(r_i/r_0)^4\}^{1/2}]$$

$$/2\{1-(r_i/r_0)^2\} > \omega/\Omega > [1+3(r_i/r_0)^2$$

$$- \{1-2(r_i/r_0)^2+17(r_i/r_0)^4\}^{1/2}]/2\{1-(r_i/r_0)^2\}$$

において $P_L' > 0$ となるが、特に問題となる $\omega/\Omega=1$ (forward precession)のときは

$$P_L' = 2\rho_w \pi r_i^2 d \Omega^2 (r_i/r_0)^2 / \{1-(r_i/r_0)^2\} > 0$$

となって偏心を大きくする力がはたらき、 $\omega/\Omega=-1$ (backward precession)のときは

$$P_L' = -2\rho_w \pi r_i^2 d \Omega^2 \{1+2(r_i/r_0)^2\} / \{1-(r_i/r_0)^2\} < 0$$

となって偏心を小さくする力がはたらく。いずれの場合にも、この力は偏心量 d 、角速度 Ω の平方に比例し、 r_i/r_0 が1に近いほど大きい。

周囲に容器のない場合は $1 > \omega/\Omega > 0$ において $P_L' > 0$ となる。 $\omega/\Omega=1$ のときは $P_L'=0$ であり、 $\omega/\Omega=-1$ のときは

$$P_L' = -2\rho_w \pi r_i^2 d \Omega^2 < 0 \quad \text{となる。}$$

(iii) 偏心回転に対する抵抗力は(9)および(23)で表わされる。この値も偏心量が大きくなるほど、 r_i/r_0 が1に近づくほど、大きくなり、 $\omega/\Omega=1$ のときより $\omega/\Omega=-1$ のときのほうが大きい。

(iv) 付加慣性モーメントは(30)および(31)で表わされ、(iii)と同様の傾向を持っている。

終りにのぞみ、本研究に対し常に懇篤なる御指導を賜わった、大阪大学植松教授に厚く感謝の意を表します。

文 献

- (1) 飯田, 本誌 278 ページ.
- (2) S. Iida, *Proceedings of the 6th Japan National Congress for Applied Mechanics*, 1956, p. 299.
- (3) Lamb, *Hydrodynamics* (6th ed.) p. 579.

532.542.1

非ニュートン流体の管内流れについて*

富 田 幸 雄**

A Study on Non-Newtonian Flow in Pipe Lines

by Yukio TOMITA

The author studied the law of similarity with respect to the flow of non-Newtonian fluids in pipe lines by using the equations of motion. Secondly, the Fanning's formula of pressure losses in pipe lines was extended to the non-Newtonian flow. Moreover, the turbulent coefficients of resistance were evaluated. When the coefficients of resistance and the Reynolds number in a wider sense are used, the characteristics of non-Newtonian flow in pipe lines are approximately represented equal to those of Newtonian flow.

1. 緒 言

従来流体力学や水力学で取扱ってきた流体は、応力

と変形速度の関係が一次形式で表わされる、いわゆるニュートン流体に限られていた。しかしこれに固体の微粒子が懸濁していると流体の性質は非ニュートンの性格をおびてくる。さらに最近の化学工業の進歩は、応力が変形速度のある関数で表わされるような、いわ

* 昭和32年10月13日 創立60周年記念東京講演会において講演, 原稿受付 昭和32年10月17日.

** 正員, 東京工業大学(東京都目黒区大岡山).