第12図にこの値の d/r_i あるいは r_i/r_0 に対する関係を示した。これも r_i/r_0 が1に近いほど、また d/r_i が大きくなるほど大となる。さらに ω/Ω の値を変えてみると、 $\omega/\Omega=1.0$ のときが他の二つの場合2, -1のときより小さい値を示している。

第12図

4. 結 論

(i) 円柱に作用する流体の圧力分布は、周囲に容器のない場合およびある場合について、それぞれ(4)および(12)で表わされ、はく離の影響が大きくひびかない範囲において、実験とほぼ一致した傾向を得た。

(ii) 上の圧力の合力については、偏心回転に抵抗する力はもちろん生ずるが、そのほかに偏心を大きくする方向の力、あるいは逆に小さくする方向の力を生ずることが注目すべき点である。

円筒容器中で回転する場合は(26)からわかるように

$$[1+3(r_i/r_0)^2 + \{1-2(r_i/r_0)^2+17(r_i/r_0)^4\}^{1/2}]$$

$$/2\{1-(r_i/r_0)^2\} > \omega/\Omega > [1+3(r_i/r_0)^2$$

$$- \{1-2(r_i/r_0)^2+17(r_i/r_0)^4\}^{1/2}]/2\{1-(r_i/r_0)^2\}$$

において $P_L' > 0$ となるが、特に問題となる $\omega/\Omega=1$ (forward precession)のときは

$$P_L' = 2\rho_w \pi r_i^2 d \Omega^2 (r_i/r_0)^2 / \{1-(r_i/r_0)^2\} > 0$$

となって偏心を大きくする力がはたらき、 $\omega/\Omega=-1$ (backward precession)のときは

$$P_L' = -2\rho_w \pi r_i^2 d \Omega^2 \{1+2(r_i/r_0)^2\} / \{1-(r_i/r_0)^2\} < 0$$

となって偏心を小さくする力がはたらく。いずれの場合にも、この力は偏心量 d 、角速度 Ω の平方に比例し、 r_i/r_0 が1に近いほど大きい。

周囲に容器のない場合は $1 > \omega/\Omega > 0$ において $P_L' > 0$ となる。 $\omega/\Omega=1$ のときは $P_L'=0$ であり、 $\omega/\Omega=-1$ のときは

$$P_L' = -2\rho_w \pi r_i^2 d \Omega^2 < 0 \quad \text{となる。}$$

(iii) 偏心回転に対する抵抗力は(9)および(23)で表わされる。この値も偏心量が大きくなるほど、 r_i/r_0 が1に近づくほど、大きくなり、 $\omega/\Omega=1$ のときより $\omega/\Omega=-1$ のときのほうが大きい。

(iv) 付加慣性モーメントは(30)および(31)で表わされ、(iii)と同様の傾向を持っている。

終りにのぞみ、本研究に対し常に懇篤なる御指導を賜わった、大阪大学植松教授に厚く感謝の意を表します。

文 献

- (1) 飯田, 本誌 278 ページ.
- (2) S. Iida, *Proceedings of the 6th Japan National Congress for Applied Mechanics*, 1956, p. 299.
- (3) Lamb, *Hydrodynamics* (6th ed.) p. 579.

532.542.1

非ニュートン流体の管内流れについて*

富 田 幸 雄**

A Study on Non-Newtonian Flow in Pipe Lines

by Yukio TOMITA

The author studied the law of similarity with respect to the flow of non-Newtonian fluids in pipe lines by using the equations of motion. Secondly, the Fanning's formula of pressure losses in pipe lines was extended to the non-Newtonian flow. Moreover, the turbulent coefficients of resistance were evaluated. When the coefficients of resistance and the Reynolds number in a wider sense are used, the characteristics of non-Newtonian flow in pipe lines are approximately represented equal to those of Newtonian flow.

1. 緒 言

従来流体力学や水力学で取扱ってきた流体は、応力

と変形速度の関係が一次形式で表わされる、いわゆるニュートン流体に限られていた。しかしこれに固体の微粒子が懸濁していると流体の性質は非ニュートンの性格をおびてくる。さらに最近の化学工業の進歩は、応力が変形速度のある関数で表わされるような、いわ

* 昭和32年10月13日 創立60周年記念東京講演会において講演, 原稿受付 昭和32年10月17日.

** 正員, 東京工業大学(東京都目黒区大岡山).

ゆる非ニュートン流体を多数作り出し、工業上これらの流体を取扱う必要が急増した。特にこれらの流体を輸送する際の管内流れの圧力損失などの研究が重要な課題となってきた。

さて二つの幾何学的に相似な境界の間のニュートン流体の流れでは、両者のレイノルズ数が等しければ流れが相似になるという、相似則が成立することはよく知られているが、非ニュートン流体の流れに対する相似則はあまり深くは研究されていなかった。これについて最近伊藤氏⁽¹⁾は、はなはだ意義深い研究を発表された。すなわち工学的にはたとえば管内流れでは内部の速度分布が問題になるより、圧力降下が問題になるから流れについての相似が成り立たなくても、その流れが境界におよぼす力の積分されたものとして表われてくる圧力降下に関して相似が成り立てばよいとしている(これを見掛け相似の法則と呼んでいる)。この考えを基礎として非ニュートン流体の広義のレイノルズ数 R_* を次のように定めている。

$$R_* = \frac{\text{単位時間内の全運動エネルギーの代表量}}{\text{単位時間に粘性によって失われるエネルギーの代表量}}$$

筆者は非ニュートン流体の運動方程式から出発して管内流れの相似則を求め、さらに管摩擦損失に関する Fanning の式を拡張し、乱流管摩擦係数などを求め

第 1 図

た。ここで非ニュートン流体と呼んでいるのは第 1 図に示すような擬塑性流体、ダイラタント流体、ビンガム流体、非ビンガム流体の総称である。

2. ビンガム流体

粘土でいしょうやアスファルトなどの実際の塑性流体は厳密にはビンガム流体ではないが、工学的には近似的にビンガム流体とみなしうるものが多い。

2.1 相似則の誘導 ビンガム流体の流動特性はよく知られているように

$$\tau = \tau_y - \mu_B \frac{du}{dr} \quad (1)$$

で与えられる。いま管内の流れは定常的であるとし、管の x 断面と $(x+dx)$ 断面の間のつりあいを考えれば次式が得られる。

$$\tau = r/2 \cdot dp/dx, \quad \tau/\tau_y = r/R \quad (2)$$

ここで τ, τ_y = 任意の点および壁面のせん断応力, τ_y = 降伏応力, p = 圧力, r, R = 管中心より任意の点および

第 2 図

び管壁までの距離, $u=x$ 方向の流速, μ_B = 塑性粘度を表わし dp/dx は絶対値をとることにする。(1), (2) 式より次のような関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\tau_y}{2r_y\mu_B} (R^2 - 2Rr_y + 2r_yr - r^2) \\ u_m &= \frac{R\tau_y}{\mu_B} \beta, \quad \beta = \frac{(1-a)^2}{2a} \\ u_a &= \frac{R\tau_y}{\mu_B} \alpha, \quad \alpha = \frac{a^4 - 4a + 3}{12a} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし r_y = せん断応力が降伏応力に等しくなる半径, u_m = セン部の速度, u_a = 平均速度, $a = \tau_y/\tau_w = r_y/R$ (比せん半径) である。また

$$\tau_y - \mu_B \frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dx} \quad (4)$$

となる。乱流の場合には、さらにレイノルズ応力 $(-\rho u'v')$ を考慮しなければならないから (4) 式は次のように書き改められる。

$$\tau_y - \mu_B \frac{d\bar{u}}{dr} + (-\overline{\rho u'v'}) = \frac{r}{2} \frac{d\bar{p}}{dx} \quad (5)$$

ただし ρ = 流体の密度, u', v' = 変動速度成分を表わし, $\bar{}$ は時間的平均値を示す。ビンガム流体に対する Hencky の方程式によれば一般的には (5) 式の τ_y の代りに (直角座標で示す)

$$\left. \begin{aligned} \tau_y' &= \sqrt{2(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2} \\ e_{ii} &= \partial u_i / \partial i, \quad (i=x, y, z) \\ e_{ij} &= \partial u_j / \partial i + \partial u_i / \partial j \quad (i, j=x, y, z; i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

の時間的平均値を適用すべきであるが、 τ_y' は τ_y と同じ次元を持つゆえ、ここでは相似則を考えるのであるから便宜上 (5) 式が成立するとした。さて (5) 式を無次元化するために

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= u_a u^+, \quad r = R r', \quad \bar{p} = \rho u_a^2 p', \\ x &= R x', \quad u' = u_a u'', \quad v' = u_a v'' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とおけば (5) 式は

$$\frac{\tau_y}{\rho u_a^2} - \frac{\mu_B}{\rho u_a R} \left(\frac{du^+}{dr'} \right) + (-\overline{u''v''}) = \frac{r'}{2} \frac{dp'}{dx'} \quad (8)$$

となる。かくして管内流れが相似になるためには $(\rho u_a^2)/\tau_y$ と $(\rho u_a R)/\mu_B$ が同時に等しくならねばならないことがわかる。したがってこの二つの無次元数

の種々の組合せについて実験をすればよいわけであるが、実験の手数が多くかかり、かつ一般的なみとおしが困難になる。そこで緒言で述べたように流れそのものが相似になるという条件をゆりて、単に圧力降下相似になるような条件を問題にすることにする。しかるときは管内層流では(3)式より $\tau_y = (u_a \mu_B) / (R\alpha)$ の関係が得られるから

$$\frac{\rho u_a^2}{\tau_y} = \frac{\rho u_a R}{\mu_B} \alpha$$

となり、結局(3)式を用いて(8)式を a から 1 まで積分すれば後でわかるように簡単に一つの無次元数 $\{\rho u_a D (4a\alpha) F(a)\} / \mu_B$ で圧力降下を整理することができる。いま乱流でも層流と同じように、 $\tau_y = \{u_a \mu_B \varphi(a)\} / R$ ($\varphi(a)$ は比せん半径 a のある関数とする。このような関係が成立するかどうかは断定できないが)と表わせると考えれば

$$\frac{\rho u_a^2}{\tau_y} = \frac{\rho u_a R}{\mu_B} \frac{1}{\varphi(a)}$$

となるから、仮りに厳密な乱流速度分布が得られたとして(8)式を a から 1 まで積分すれば圧力降下が相似になる条件として ($D=2R$)

$$R_{eB}' = \frac{\rho u_a D}{\mu_B} \Phi(a) \quad \dots\dots\dots (9)$$

($\Phi(a)$ は $\varphi(a)$ とは異なる a のある関数である)なる一つの無次元数が得られるであろう。ところで層流における $4a\alpha F(a)$ と乱流における $\Phi(a)$ は異なるであろうから層流、乱流領域を通じて単に圧力降下についても厳密には一つの無次元数で整理することはできないのではないかと考えられる。すなわち一つの無次元数で整理するという見掛けの相似法則は厳密な意味では成立しないのではないと思われる。

いま乱流を、その平均流速 u_a をもった層流であると仮想し、乱流における圧力降下をも層流において得られる一つの無次元数で近似的に処理することにする。(もちろんこの当否は実験結果にまたねばならないが)このようにすれば μ_B, τ_y および u_a が与えられれば(3)式より比せん半径 a が求められ実用上非常に便利になると思われる。そのために層流の場合に対して(8)式を積分すれば

$$\frac{2\pi\tau_y}{\rho u_a^2} \int_a^1 r' dr' - \frac{2\pi\mu_B}{\rho u_a R} \int_a^1 r' \left(\frac{du'}{dr'} \right) dr' = \pi \frac{dp'}{dx} \int_a^1 r'^2 dr' \quad \dots\dots\dots (10)$$

この式に(3)式より得られる速度分布式

$$u' = \frac{1-2a+2ar'-r'^2}{2a\alpha}$$

を代入して計算すれば

$$\frac{dp'}{dx} = \frac{2\mu_B}{\rho u_a R \alpha} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。かくして

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2u_a \mu_B}{R^2 \alpha} \quad \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。

2.2 管摩擦損失に対する Fanning の式の拡張

よく知られているように管摩擦損失を表わす Fanning の式は

$$\frac{dp}{dx} = 4f \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho u_a^2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

である。ただし D =管径、 f =管摩擦係数、 dp/dx =単位管長当りの圧力降下である。さてビンガム流体に Fanning の式をそのまま使用してよいかどうかは検討

第 3 図

を要することである。第3図に示すように平均速度 u_a が等しくても、せん部分の大小により速度分布が異なり、壁面における速度こう配すなわち壁面せん断応力が異なり、結局 dp/dx が異なってくる。かくして u_a^2 が同一でも dp/dx はせん部の大小によりいくとおりもの値が生じて、 u_a^2 に対して dp/dx が一義的に対応しないことになる。それでこのような場合には、どのような速度を使用したらいかがが問題となってくる。いま dp/dx の値を一義的に定めるような速度を U として Fanning の式を拡張して

$$\frac{dp}{dx} = 4f^* \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho U^2 \quad \dots\dots\dots (14)$$

とおいてみる。 dp/dx はせん部以外の速度分布に関係するから、この部分の u^2 の平均値を U^2 とすれば dp/dx と U^2 は 1 対 1 に対応し同一の f が得られるであろうと思われる。言い換えれば U^2 としてエネルギー消散に関する部分の平均値をとることにするのである。ニュートン流体の場合には当然 $U^2 = cu_a^2$ となるであろうが順序としてまずこの場合を調べてみる。この場合の速度分布は

$$u = \{\tau_w (R^2 - r^2)\} / (2\mu R) \quad \dots\dots\dots (15)$$

となるから U^2 は

$$U^2 = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R r u^2 dr = \frac{\tau_w^2 R^2}{12\mu^2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。平均速度 u_a は $(\tau_w R) / (4\mu)$ であるから結局

$$U^2 = 4u_a^2 / 3 \quad \dots\dots\dots (17)$$

となり(14)式は

$$\frac{dp}{dx} = 4f_N^* \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho \frac{4}{3} u_a^2 = 4f_N \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho u_a^2 \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。ただし $f_N = 4f_N^* / 3$ である。さてビンガム流体の場合には速度分布は(3)式より

$$u = \frac{\tau_w}{2\mu_B R} (R^2 - 2Rr_y + 2r_y r - r^2)$$

であるから

$$U^2 = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R r u^2 dr = \frac{\tau_w^2 R^2}{60 \mu_B^2} (1-a)^4 (5+6a-11a^2) \quad \dots\dots\dots (19)$$

となる。一方平均速度 u_a は (3) 式より

$$u_a = \frac{\tau_w R}{\mu_B} \frac{a^4 - 4a + 3}{12}$$

であるから (19) 式および上式から

$$U^2 = \frac{12}{5} \frac{(5+6a-11a^2)}{(3+2a+a^2)^2} u_a^2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

が得られ (14) 式は (ニュートン流体の場合と同様に $f_B = 4f_B^*/3$ とおく)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= 4f_B^* \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho \frac{12}{5} \frac{(5+6a-11a^2)}{(3+2a+a^2)^2} u_a^2 \\ &= 4f_B \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho u_a^2 F(a) \\ F(a) &= \frac{9}{5} \frac{(5+6a-11a^2)}{(3+2a+a^2)^2} \div 1-a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

となる。すなわち dp/dx と $u_a^2 F(a)$ が 1 対 1 に対応することになるのである。かくしてニュートン流体の場合と同じく $R_{eB} \cdot f_B = 16$ になるようにレイノルズ数 R_{eB} を (12), (21) 式より求めれば

$$R_{eB} = \frac{\rho u_a D (4a\alpha)}{\mu_B} F(a) \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり管摩擦係数 f_B は (21) 式より

$$f_B = \frac{dp/dx}{4 \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho u_a^2 F(a)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。ただし $\alpha = (a^4 - 4a + 3)/(12a)$ である。この管摩擦係数 f_B とレイノルズ数 R_{eB} は伊藤氏⁽¹⁾によって求められたものと全く同一のものである。前にも述べたようにこれはあくまでも層流に対して求められたもので乱流に対して適用できるかどうかは実験にまたねばならない。実験結果の一例を第 4 図⁽¹⁾⁽²⁾に示す。この図を見てもわかるように工学的には十分満足すべき結果でニュートン流体の場合に一致していると思われる。(22), (23) 式は層流, 乱流を通じてすべて層流と考えて比せん半径 a を (3) 式より求めて使用できるという点に実用上利用価値があるのである。すなわち平均流速 u_a さえ与えれば第 4 図より層流, 乱流を通じて管摩擦係数 f_B が求まるのである(もちろん μ_B, τ_y は既知としてである)。乱流領域において、このようによい結果が得られるのは、乱流における速度分布が厳密に求まるとしたとき (14) 式から計算される $F'(a)$ ($F(a)$ の導関数ではない。 a のある関数を表わす) と (9)

式の $\Phi(a)$ の関係が $F(a)$ と $4a\alpha F(a)$ の関係にかなりよく似ているからであろうと思われる。

製紙用パルプ液は、細い繊維が見掛け上均一に液体に混合しておりその混合物はでいしょうの一種と考えられる。したがって流れの状態はビンガム流体に類似したものとなる。ただ固体微粒子が繊維状であるため、多少複雑な様相を呈すると思われる。したがってパルプ液の管内流れについても上述の方法でだいたい整理できると考えられるが、ただパルプ液では降伏応力 τ_y が大きいので (22) 式のような R_{eB} よりも、むしろ (22) 式を τ_y で変形した $R_{eB} = \{8\rho u_a^2 a F(a)\}/\tau_y$ の形のもので整理した方が好結果をうと思う。この点については今後調べてみたいと思っている。

2.3 乱流管摩擦係数 (5) 式左辺の第 2 項を無視し、さらに近似的に $\tau_y \div \tau_y'$ とおき、レイノルズ応力に対して Prandtl の混合距離を使用すればニュートン流体の場合と同じく

$$\tau_w \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \tau_y + \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

となる。ただし y は壁面からの距離を表わす。ここで $\tau_w \div \tau$ とおき、(24) 式を積分し、 $y = R(1-a)$ で $u = u_m$ とおけば次式が得られる。

$$\frac{u_m - u}{u^*} = \frac{\sqrt{1-a}}{\kappa} \log \frac{R(1-a)}{y} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし $u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, $a = r_y/R = \tau_y/\tau_w$ である。いま (25) 式を変形して

$$\frac{u}{u^*} = A\sqrt{1-a} + B\sqrt{1-a} \log R_{eB}' \frac{\sqrt{2} u^*}{u_a \sqrt{F'(a)}} \frac{y}{R(1-a)} \quad \dots\dots\dots (26)$$

とおく。 R_{eB}' は (9) 式で定義した広義のレイノルズ数であり、 $F'(a)$ はその場合の $F(a)$ に相当するものでいづれも未確定のものである。(25) 式より平均速度 u_a を求むれば

第 4 図

$$u_m - u_a = \frac{u^*}{2\kappa} (1-a)^{\frac{3}{2}} (a+3) \dots\dots\dots (27)$$

となる。(26), (27) 式より

$$\frac{u_a}{u^*} = \left\{ A - \frac{1}{2\kappa} (1-a)(a+3) \right\} \sqrt{1-a} + B\sqrt{1-a} \log R_{eB'} \frac{\sqrt{2} u^*}{u_a \sqrt{F'(a)}} \dots\dots\dots (28)$$

が得られる。他方 (2) 式および (23) 式に相当する式から $\tau_w = \{f_B' \rho u_a^2 F'(a)\} / 2$ となるから

$$u^* = \sqrt{\frac{f_B' F'(a)}{2}} u_a \dots\dots\dots (29)$$

(28), (29) 式より

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{f_B' F'(a)}} = \left\{ A - \frac{1}{2\kappa} (1-a)(a+3) \right\} \sqrt{1-a} + B\sqrt{1-a} \log (R_{eB'} \sqrt{f_B'}) \dots\dots\dots (30)$$

となる。さらに変形すれば上式は

$$\frac{1}{\sqrt{f_B'}} = \left\{ A_1 - \frac{1}{2\kappa} (1-a)(a+3) \right\} \sqrt{F'(a)(1-a)} + B_1 \sqrt{F'(a)(1-a)} \log (R_{eB'} \sqrt{f_B'}) \dots\dots\dots (31)$$

とかける。ただし A, B, A_1, B_1, κ は実験より定まる定数である。かくして乱流管摩擦係数 f_B' は乱流における広義のレイノルズ数 $R_{eB'}$ が定まるとしても $R_{eB'}$ だけでは完全には、整理できないのではないかと思われる(もちろん $\tau_y \neq \tau_y'$ とおいて導いた結果なので、このように断定することはできないが)。乱流における τ_w は、乱流と同じ平均流速 u_a を有する層流の τ_w より大きくなるであろうから比せん半径 a も小さくなり、したがって $(1-a), F'(a)$ はそれぞれ層流とした場合より 1 に近づくであろう。そこでいま $\lambda_B = 4f_B$ とおき (22) 式のレイノルズ数 R_{eB} および (23) 式の管摩擦係数 f_B を使用して (31) 式を次式で近似してみることにする。

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_B}} = C \log_{10} (R_{eB} \sqrt{\lambda_B}) + C' \dots\dots\dots (32)$$

第5図は実験結果⁽²⁾⁽³⁾を(32)式で整理した一例であるが、ニュートン流体の場合と同じく $C=2.03, C'=-0.8$ といった直線上に大略のことがわかる。したがって実用上は (22) 式の R_{eB} と (23) 式の f_B すなわち

第 5 図

$$\lambda_B = \left(\frac{dp}{dx} \right) / \left(\frac{1}{2} \rho u_a^2 F(a) \frac{1}{D} \right) \dots\dots\dots (23)'$$

を用いて

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_B}} = 2.03 \log_{10} (R_{eB} \sqrt{\lambda_B}) - 0.8 \dots\dots\dots (32)'$$

より乱流管摩擦係数 λ_B を求めてよいと思われる。

3. 擬塑性流体およびダイラタント流体

擬塑性流体には繊維素エステル、でん粉のり、高分子物質の溶液などが、そしてダイラタント流体には適当な配合の砂と水の混合物などがあり、その使用される範囲は相当に広いと思われる。

3.1 相似則の誘導 Waele-Ostwald⁽⁴⁾⁽⁵⁾によればこれらの流体の流動特性は次式でかなりよく表わすことができる。

$$-du/dr = \tau^n / \mu_P \dots\dots\dots (33)$$

上式で擬塑性流体の場合は $n > 1$ であり、ダイラタン

第 6 図

ト流体の場合は $n < 1$ である。ただし μ_P はニュートン流体の粘性係数に類似な量である ($[\mu_P] = [\text{kg}^n / \text{m}^n \cdot \text{s}^{2n-1}]$ なる次元をもっている)。(33)式が乱流の場合にも成立するかどうかは断定しがたいが、仮りに成立するとすれば、2.1と同様にして次式が得られる。

$$\mu_{Pn}^{\frac{1}{n}} \left\{ -\frac{d(\bar{u} + u')}{dr} \right\}^{\frac{1}{n}} + (-\rho u'v') = \frac{r}{2} \frac{dp}{dx} \dots\dots\dots (34)$$

(7) 式と同じ関係を使用すれば (34) 式は無次元化されて

$$\frac{\mu_{Pn}^{\frac{1}{n}}}{R^n u_a^{(2-\frac{1}{n})} \rho} \left\{ -\frac{d(u^+ + u'')}{dr'} \right\}^{\frac{1}{n}} + (\bar{u}''v'') = \frac{r'}{2} \frac{dp'}{dx'} \dots\dots\dots (35)$$

となる。これより管内流れが相似になるためにはただ一つの無次元数 $R_{eP} = \{R^n u_a^{(2-\frac{1}{n})} \rho\} / \mu_{Pn}$ が等しくなればよいことがわかる。ニュートン流体の層流で成立する関係式 $f \cdot R_e = 16$ がこの場合の流体の層流に対しても成立するように R_{eP} を定めるために、層流の場合に対して (35) 式を管断面にわたって積分すれば

$$\frac{2\pi \mu_{Pn}^{\frac{1}{n}}}{R^n u_a^{(2-\frac{1}{n})} \rho} \int_0^1 r' \left(-\frac{du^+}{dr'} \right)^{\frac{1}{n}} dr' = \pi \frac{dp'}{dx'} \int_0^1 r'^2 dr' \dots\dots\dots (36)$$

第 7 図

この式に層流速度分布式

$$u' = \frac{(n+3)}{(n+1)} \{1 - r'^{n+1}\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

を代入して計算すれば

$$\frac{dp'}{dx'} = \frac{2\mu_p \frac{1}{n} (n+3) \frac{1}{n}}{R_n^{\frac{1}{n}} u_a^{\frac{2-n}{n}} \rho} \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。かくして

$$\frac{dp}{dx} = \frac{4 \{2(n+3)\mu_p u_a\}^{\frac{1}{n}}}{D^{1+\frac{1}{n}}} \quad \dots\dots\dots (39)$$

が得られる。

この流体の場合にも単位管長当りの圧力降下 dp/dx は平均速度 u_a だけでは一義的に定まらず n によって変るから、拡張した Fanning の式を用いる必要がある。2.2 で述べた方法で計算すれば

$$U^2 = \frac{(n+3)}{(n+2)} u_a^2 \quad \dots\dots\dots (40)$$

が得られ、結局

$$\frac{dp}{dx} = 4f_P \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho u_a^2 F(n), \quad F(n) = \frac{3}{4} \frac{(n+3)}{(n+2)} \quad \dots\dots\dots (41)$$

となる。(39), (41) 式から $f \cdot R_{eP} = 16$ なるように R_{eP} を定めると

$$R_{eP} = \frac{6(n+3)^{1-\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} (n+2)} \frac{D^{\frac{1}{n}} u_a^{\frac{2-n}{n}} \rho}{\mu_p^{\frac{1}{n}}} \quad \dots\dots\dots (42)$$

が得られる。このようにして定めた管摩擦係数 f と広義のレイノルズ数 R_{eP} を用いれば、 n が異なるすべての流体がニュートン流体に対する曲線上にのると思われる。もちろん層流の場合に成立する $F(n) = \{3(n+3)\} / \{4(n+2)\}$ の関係が乱流になれば異なってくるであろうが、ビンガム流体の場合と対比して考えれば乱流でも十分満足すべ

き結果が得られるであろうと思われる。第 7 図に実験結果(4)(6)の一例を示す。図の石灰でいしょうは塑性流体であるが近似的に擬塑性流体とみなして取扱ったものである。図より見られるごとくだいたい満足すべき結果が得られていると考えられる。しかしダイラタント流体については現在のところ乱流実験がほとんど見当たらないようなので上述の議論の当否は今後にまっほかはしない。また擬塑性流体についてもさらに広範囲の乱流実験が望まれる。

3.2 乱流管摩擦係数 この流体の場合も 2.3 とほとんど同様に取扱える。すなわち (34) 式の左辺第 1 項を無視し、レイノルズ応力に対して Prandtl の混合距離を用いれば次のような速度分布式が得られる。

$$\frac{u_m - u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \log \frac{y}{R} \quad \dots\dots\dots (43)$$

ただし u_m は管中心における流速を表わす。(43)式を変形すれば

$$\frac{u}{u^*} = A + B \log \left\{ \frac{\sqrt{2} u^*}{u_a \sqrt{F'(n)}} \frac{y}{R} \right\} R_{eP}' \quad \dots\dots\dots (44)$$

となる。ここで $F'(n)$, R_{eP}' はそれぞれ乱流速度分布が厳密に求められたとしたときの $F(n)$, R_{eP} に相当するもので未確定のものである。また平均速度 u_a は (43) 式より

$$u_m - u_a = (3u^*) / (2\kappa) \quad \dots\dots\dots (45)$$

(44), (45) 式ならびに (41) 式に相当する式

$$\frac{dp}{dx} = 4f_P \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho u_a^2 F'(n)$$

を用いれば

$$\frac{1}{\sqrt{f_P'}} = A' \sqrt{F'(n)} + B' \sqrt{F'(n)} \log \{R_{eP}' \sqrt{f_P'}\} \quad \dots\dots\dots (46)$$

第 8 図

が得られる. いま $\lambda_P = 4f_P$ すなわち

$$\lambda_P = \left(\frac{dp}{dx} \right) / \left(\frac{1}{2} \rho u_a^2 F(n) \frac{1}{D} \right) \dots\dots\dots (47)$$

と, (42) 式の R_{eP} を用いて (46) 式を次式で近似してみることにする.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_P}} = C \log_{10}(R_{eP} \sqrt{\lambda_P}) + C' \dots\dots\dots (48)$$

第8図は実験結果⁽⁴⁾⁽⁶⁾を上式で整理したものであるがニュートン流体の場合と同様に $C=2.03$, $C'=-0.8$ とおいた直線上に大略のことがわかる. よって実用上は (48) 式を使用してさしつかえないものと思われる. もちろんダイラタント流体に対しては (48) 式を使用してよいかどうかは, 今後の実験結果にまたなければならない.

4. 結 論

非ニュートン流体の管内流れの相似則を運動方程式から出発して求め, さらに管摩擦損失に関する Fanning の式を拡張した. また乱流管摩擦係数をも求めた. 上述のような管摩擦係数および広義のレイノルズ数を用いれば非ニュートン流体の管内流れでも, ニュートン流体の管内流れに対して得られている諸関係

と, ほとんど同一な関係が得られることがわかった. ただダイラタント流体に対しては現在のところ乱流領域における実験がほとんど見当たらないようなので, どの程度上述の議論が当てはまるかわからない. さらに今後非ニュートン流体の広範囲にわたる乱流領域での実験により上述の議論の当否を検討することが望まれる. 終りにのぞみ種々の御指導をいただいた東京工大板谷松樹教授ならびに貴重なデータを貸与下され, 有益な御教示をいただいた伊藤四郎助教授に厚く御礼申し上げます.

文 献

- (1) 伊藤: 機械学会第93回講習会テキスト (1957-5), “塑性流体の流れ” 日刊工業 (1957).
- (2) Gregory, W.B.: *Mech. Eng.*, **49**, 609 (1927).
Caldwell, D.H.; Babbitt, H.E.: *Ind. Eng. Chem.*, **33**, 249 (1941).
- (3) Wilhelm, R.H.; Wroughton, D.M.; Loeffel, W.F.: *Ind. Eng. Chem.*, **31**, 622 (1939).
- (4) 長谷川, 平井: 化学工学, **20**, 15 (1956).
平井: 学位論文 (1957-11).
- (5) Weltman, R.N.: *N. A. C. A., Tech. Note*, 3397 (1955).
- (6) Metzner, A.B.; Reed, J.C.: *A. I. Ch. E. Journal*, **1**, 434 (1955).

イギリスで 550 MW 発電機用ボイラ建設

イギリス中央電気庁 (The British Central Electricity Authority) はイングランドのドンカスター近くに, 1100 MW (1 MW = 1000 kW) の発電所を 112 百万ドル (約 340 億円) の予算で建設する計画をたてた.

この発電所に設置されるボイラは世界最大のもので, 550 MW 発電機用再熱ボイラ 2 かみである.

ボイラの送出蒸気量は 2400 psi で, 1675 t/h, 蒸気温度は 1055 F ~ 1055 F となっている.

ボイラは 275 MW クロスコンパランド・タービン発電機 2 基に蒸気を供給するようになっている.

このボイラは International Combustion Ltd が製作するもので, その容量は現在イギリスが使用しているボイラの 9 かま分に相当するものである.

この巨大なボイラの使用石炭量は石炭の質によって異なるが, 1 時間に 205 トンから 200 トンの微粉炭を消費するといわれている. 消費される石炭の質は, 灰分 6% から 30%, 水分 4% から 20% の範囲内のものが使用されることになっている.

ボイラは二つの炉を備えていて, それぞれ 2 室に再

分され, 炉壁はウォーター・チューブもしくはスチーム・チューブで冷却されている.

一つの炉は主蒸気温度を調節し, 他の一つは蒸気温度を再熱するようになっている.

炉の大きさは, 幅 68 ft (20.7 m), 奥行 28 ft (8.5 m), 高さ 100 ft (30.5 m) となっていて, メインドラムは地上 148.5 ft (45.3 m) の高さのところに設置される.

蒸気の循環は強制循環方式である. 炉内もしくはその他の場所に設置されるウォーター・チューブは水中に沈められた特製のポンプにより調節された水が供給される.

微粉炭は各炉に 4 基, 計 8 基の微粉炭粉碎装置によって炉のすみにあるバーナに送られる.

粉碎能力は普通毎時 50 トンである.

各基には 4 台のロータリ・エア・ヒータと 4 台のファンが備えられている.

清塵装置にはボイラ全建設基の約 1 割が充当されていて, ボイラの保証効率 90% となっている.

(服部敏夫)