が摩擦面に附着し表面を保護するときの摩擦減少効果がいかに大きいかかわかる。また摩擦材料の組合せや摩擦条件によっては摩擦を続けると摩擦増加の割合が次第に増して、定常摩擦の方が初期摩擦のときより摩擦が多くなることがあるが、これはおそらくそのときに生成する摩擦粉が摩擦面を引っかけてラッピング的な摩擦が行われるような状態になっていて、そのために摩擦が助長されるのであろう。これまでも摩擦速度、接触圧力などの摩擦条件の変化によって摩擦粉が金属粉末、いろいろの状態の酸化物あるいは溶融状態になっていることが観察されているが⁽⁵⁾、このような摩擦粉のいろいろな形態の変化に従ってその摩擦面の保護効果、あるいはラッピング的な効果も異なってくるものと考えられる。しかしそれらの効果の詳細な機構に

ついては判然としない点が多く、後日さらに検討するつもりである。

終りにのぞみ本研究に際し終始御指導をたまわった科学研究所大越諄主任研究員に厚く感謝の意を表す。また本研究の実施に際し熱心な御協力をいただいた科学研究所水野万亀雄氏に感謝する。なお本研究は昭和 29 年度文部省科学研究助成費の補助を受けた。

文 献

- (1) 朝倉, 金属の摩擦, 丸善, 31ページ.
- (2) 大越, 佐田, 水野, 機械学会論文集, 21, 107 (昭30), 555.
- (3) 小坂, 磨耗変質層の研究, 万里閣, 101 ページ.
- (4) W.Hirst and J.K. Lancaster, *Appl. Phys.*, J., 27 (1956), 1057.
- (5) 大越, 坂井, 機械学会論文集, 7, 29 (昭16), I-29.

543.121.1 : 624.073.1 : 624.075.4

長方形板の振動・たわみ・座屈問題の一解法 (続報)*

浜 田 実**

A Method for Solving Problems of Vibration, Deflection and Buckling of Rectangular Plates (Continued Report)

by Minoru HAMADA

In this paper, the undetermined multiplier method in the calculus of variations under constrained conditions is applied to the problems of transverse vibrations (free and forced), statical deflections, bucklings and others of rectangular plates, some edges of which are clamped and the others are supported. The numerical examples of various kinds are solved in order to explain the process of this method.

1. 緒 言

前に⁽¹⁾四辺固定長方形板の振動・たわみ・座屈問題を、拘束条件をもつ変分問題における未定係数の方法を用いて統一的に取扱う計算方式を提案したが、ここではある辺は固定され他の辺は支持された長方形板に対して同じ方法を適用する。この方法はかつて Trefftz⁽²⁾が周辺固定正方形板の圧縮座屈問題に用い、その後 Budiansky ら⁽³⁾が周辺固定長方形板の圧縮座屈問題を解き、また最近では Thurston⁽⁴⁾がサンドイッチ板の座屈問題に適用するなどその有用性が示されているが、簡単な数値計算を回数多く行うという点で特に電

子計算機に適しているようである[†]。筆者もまたこの方法がある種の平面応力問題⁽⁵⁾や周辺固定平行四辺形板の振動問題⁽⁶⁾に用いられることを示したが、ここでは支持辺と固定辺をもつ長方形板の振動・たわみ・座屈問題に対する統一的な計算方式を確立し、数値計算例により演算法を説明する。

2. 解 法

支持辺と固定辺の数および配置により4個の場合に分けられるが、どの場合も前報の四辺固定の場合に準じて取扱われるから、対照を容易にするため解法を表により示すと第1表のようになる。ただし符号はすべて前報と同じものを用いた。

* 昭和 32 年 10 月 18 日 創立 60 周年記念地方第3区(名古屋)講演会において講演, 原稿受付 昭和 33 年 1 月 25 日.

** 正員, 大阪大学工学部(大阪市都島区東野田町 9).

† ただし本論文における数値計算はすべて手動計算機によるものである。

第 1 表 解 法

分 類	[A] 一边固定三辺支持	[B] 二対辺固定他辺支持	[C] 二隣辺固定他辺支持	[D] 三辺固定一边支持
支持辺と固定辺の配置	$\alpha=1$ を固定辺とする	$\alpha=0, \alpha=1$ を固定辺とする	$\alpha=1, \beta=1$ を固定辺とする	$\alpha=0$ を支持辺とする
W の 式	$\sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,2,3,\dots} C_{m,n} \sin \frac{m\pi}{2} x \sin n\pi y$	$\sum_{m=0,2,4,\dots} \sum_{n=1,2,3,\dots} C_{m,n} \cos m\pi x \sin n\pi y$	$\sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} C_{m,n} \sin \frac{m\pi}{2} x \sin \frac{n\pi}{2} y$	$\sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=0,1,2,\dots} C_{m,n} \sin \frac{m\pi}{2} x \cos n\pi y$
W の式で満足されない境界条件	$\alpha=1$ にて $W=0$	$\alpha=0, \alpha=1$ にて $W=0$	$\alpha=1, \beta=1$ にて $W=0$	$\alpha=1, \beta=0, \beta=1$ にて $W=0$
$C_{m,n}$ したがって $d_{m,n}$ の満足すべき条件式	$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{m-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}} d_{m,n} = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$)	$\sum_{m=0,2,4,\dots} d_{m,n} = 0$ $\sum_{m=1,3,5,\dots} d_{m,n} = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$)	$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{m+n} (-1)^{\frac{m+n}{2}} d_{m,n} = 0$ ($n=1, 3, 5, \dots$) $\sum_{n=1,3,5,\dots}^{m+n} (-1)^{\frac{m+n}{2}} d_{m,n} = 0$ ($m=1, 3, 5, \dots$)	$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{m-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}} d_{m,n} = 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$) $\sum_{n=0,2,4,\dots} d_{m,n} = 0$ $\sum_{n=1,3,5,\dots} d_{m,n} = 0$ ($m=1, 3, 5, \dots$)
$V / \frac{\pi^4 AD}{8h^4}$	$\sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,2,3,\dots} \left\{ \left(\frac{1}{4} m^2 h^2 + n^2 \right)^2 + r \left(\frac{m^2 h^2}{4} + n^2 \right) + \lambda \right\} C_{m,n}^2$	$2 \sum_{n=1,2,3,\dots} (n^4 + n^2 r + \lambda) C_{0,n}^2 + \sum_{m=1,2,3,\dots} \sum_{n=1,2,3,\dots} \left\{ (m^2 h^2 + n^2)^2 + r (m^2 h^2 + n^2) + \lambda \right\} C_{m,n}^2$	$\sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{16} (m^2 h^2 + n^2)^2 + \frac{r}{4} (m^2 h^2 + n^2) + \lambda \right\} C_{m,n}^2$	$\sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{m^4 h^4}{8} + \frac{r}{2} m^2 h^2 + 2\lambda \right\} C_{m,0}^2 + \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,2,3,\dots} \left\{ \left(\frac{m^2 h^2}{4} + n^2 \right)^2 + r \left(\frac{m^2 h^2}{4} + n^2 \right) + \lambda \right\} C_{m,n}^2$
$T / \frac{\rho A \omega^2}{8}$	$\sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,2,3,\dots} C_{m,n}^2$	$2 \sum_{n=1,2,3,\dots} C_{0,n}^2 + \sum_{m=1,2,3,\dots} \sum_{n=1,2,3,\dots} C_{m,n}^2$	$\sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} C_{m,n}^2$	$2 \sum_{m=1,3,5,\dots} C_{m,0}^2 + \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,2,3,\dots} C_{m,n}^2$
$V-T$ が停留値をとるための条件式	$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{4} m^2 h^2 + n^2 \right)^2 + r \left(\frac{1}{4} m^2 h^2 + n^2 \right) + \lambda - \Omega^2 \right\} d_{m,n} = Q_{m,n} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} U_n$	$\frac{1}{2} \left\{ (n^4 + n^2 r + \lambda) - \Omega^2 \right\} d_{0,n} = Q_{0,n} + U_n$ $\frac{1}{2} \left\{ (m^2 h^2 + n^2)^2 + r (m^2 h^2 + n^2) + \lambda - \Omega^2 \right\} d_{m,n} = Q_{m,n} + U_n$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{16} (m^2 h^2 + n^2)^2 + \frac{r}{4} (m^2 h^2 + n^2) + \lambda - \Omega^2 \right\} d_{m,n} = Q_{m,n} + (-1)^{\frac{m+n}{2}} (U_n + V_m)$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{m^4 h^4}{16} + \frac{m^2 h^2 r}{4} + \lambda - \Omega^2 \right\} d_{m,0} = Q_{m,0} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} U_0 + V_m$ $\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{4} m^2 h^2 + n^2 \right)^2 + r \left(\frac{1}{4} m^2 h^2 + n^2 \right) + \lambda - \Omega^2 \right\} d_{m,n} = Q_{m,n} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} U_n + V_m$
$Q_{m,n}$ の 式	$P \sin \frac{m\pi}{2} x' \sin n\pi y' \int_0^1 \int_0^1 P(x', y') \sin \frac{m\pi}{2} x' \times \sin n\pi y' dx' dy'$	$P \cos m\pi x' \sin n\pi y' \int_0^1 \int_0^1 P(x', y') \cos m\pi x' \times \sin n\pi y' dx' dy'$	$P \sin \frac{m\pi}{2} x' \sin \frac{n\pi}{2} y' \int_0^1 \int_0^1 P(x', y') \sin \frac{m\pi}{2} x' \times \sin \frac{n\pi}{2} y' dx' dy'$	$P \sin \frac{m\pi}{2} x' \cos n\pi y' \int_0^1 \int_0^1 P(x', y') \sin \frac{m\pi}{2} x' \times \cos n\pi y' dx' dy'$
別個に考察する組	n の各組に対して分ける	n の各値に対して, また m が偶数奇数のいずれであるかで分ける。	分けない	m が偶数奇数のいずれであるかで分ける。

固有振動, 強制振動, 静的たわみ, 座屈の各場合に對しては前報にのべたのと同様にして取扱うことになる。固有値問題の場合は第 1 表最下欄のように分けられた各組に対して別個に考察する。たわみや強制振動などの場合はその各組に対して得られた結果を重ね合わせる。

3. 計 算 例

[A] 一边固定三辺支持の場合 (例 A-1) 基本振動数 基本振動であるから $n=1$ の組を考察する。

(5)† において r, s および $Q_{m,n}$ を 0 とすれば

$$d_{m,1} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2u_1 / \{ (m^2 h^2 / 4 + 1)^2 - \Omega^2 \}$$

これを (1) に代入すると

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{2}{(m^2 h^2 / 4 + 1)^2 - \Omega^2} = 0$$

これより試算法により種々の辺比 h に対する Ω^2 を求めると第 2 表のようになる。この表で $\Omega^2(w)$ とあるのは Warburton⁽⁷⁾ が提案した計算式による値であるが, これは Ritz の方法であり, したがって正しい値より高く出る。

(例 A-2) 正方形板の一樣圧縮座屈荷重 (5) において $j^2=1, h=1, n=1, s=\Omega^2=Q_{m,n}=0$ とし, (1) を用いて u_1 を消去すると

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{2}{(m^2/4 + 1)^2 + r(m^2/4 + 1)} = 0$$

これより $r=-2.663$ をうる。これは八巻氏⁽⁸⁾の得られた値と一致する。

† 第 1 表の中の式の番号を示す。以下同様。

第2表 基本振動数

分類 辺比 h	A					B					C		D		
	1/2	1/1.5	1	1.5	2	1/2	1/1.5	1	1.5	2	1'	1.5'	1/1.5	1	1.5
Ω^2	1'713	2'491	5'740	18'57	49'34	1'923	3'098	8'604	32'59	93'16	7'512	20'63(I) 20'68(II)	6'821(I) 6'863(II)	10'385(I) 10'396(II)	23'80(I) 23'80(II)
$\Omega^2(W)$	1'735	2'517	5'771	18'60	49'38	1'946	3'125	8'640	32'66	93'29	7'595	20'90	6'918	10'492	24'04

注: (I), (II) は第1, 第2近似値.

 $\Omega^2(W)$ は Warburton(7) の方法による値.

第3表 一様面内力を受ける正方形板の基本振動数

分 類	A						B						
	$\begin{matrix} -2'663 \\ (-2'66) \end{matrix}$	-2	-1	0	+1	+2	-3'830	-3	-2	-1	0	+1	+2
Ω^2	0	1'440	3'597	5'740	7'870	9'991	0	1'884	4'139	6'378	8'604	10'819	13'02

分 類	C					D					
	-3'247	-3	-2	-1	0	$\begin{matrix} -4'306(\text{I}) \\ -4'310(\text{II}) \end{matrix}$	-4	-3	-2	-1	0
Ω^2	0	$\begin{matrix} 0'583(\text{I}) \\ 0'585(\text{II}) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2'927(\text{I}) \\ 2'928(\text{II}) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5'230(\text{I}) \\ 5'234(\text{II}) \end{matrix}$	7'512	0	0'765(I)	3'228(I)	5'646(I)	8'029(I)	$\begin{matrix} 10'385(\text{I}) \\ 10'396(\text{II}) \end{matrix}$

注: $\Omega^2=0$ に対する r は一様圧縮座屈荷重. $r=0$ に対する Ω^2 は第2表の $h=1$ に対する Ω^2 に同じ.

() 内の値は八巻氏(8) による値.

(例 A-3) 一様な面内力を受ける正方形板の基本振動数 (5) において $j^2=1$, $h=1$, $n=1$, $s=Q_{m,n}=0$ とし, (1) を用いて, u_1 を消去すると

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2}{(m^2/4+1)^2 + r(m^2/4+1) - \Omega^2} = 0$$

これより $r=-2, -1, +1, +2$ に対する Ω^2 を求め, 結果を第3表に示す.

(例 A-4) 一様分布荷重 p_0 が作用する正方形板の静的たわみ (9)₂ により $Q_{m,n}=4Ap_0/\pi^2 mn$. (5) において $r=s=\Omega^2=0$ として上の $Q_{m,n}$ を用いて, まず $n=1$ の組の $d_{m,n}$ を求めると

$$d_{1,1}=1'280\,00u_1+1'280\,00\times 4Ap_0/\pi^2,$$

$$d_{3,1}=-0'189\,35u_1+0'063\,12\times 4Ap_0/\pi^2,$$

(1) に代入すると

$$1'528\,55u_1+1'223\,23\times 4Ap_0/\pi^2=0$$

これより $u_1=-0'800\,25\times 4Ap_0/\pi^2$ をうる. この結果を用いて $d_{1,1}$, $d_{3,1}$, が求められる. 同様にして $n=3$, $n=5$, $n=7$ の組に対して $d_{m,n}$ を求めその表を作ることができる. この表を用いて中央点におけるたわみと曲げモーメントおよび固定辺の midpoint における曲げモーメントを求めると第4表のようになる. ただしポアソン比は 0.3 とした(以下同様). これらの値は Timoshenko⁽⁹⁾ による値と一致する.

(例 A-5) 分布荷重 $p_0 \sin \pi x \sin \pi y$ が作用する正方形板の静的たわみ (9)₂ により

第4表 一様分布荷重を受ける正方形板のたわみ

分 類	A	B	C	D
中央点のたわみ	$w/a^4 p_0 / Eh^3$	0'0304 (0'030)	0'0209 (0'0209)	0'0230 0'0171
中央点のモーメント	$M_x/a^2 p_0$	0'039 (0'039)	0'033 (0'033)	0'030 0'023
	$M_y/a^2 p_0$	0'034 (0'034)	0'024 (0'024)	0'030 0'028
固定辺の midpoint のモーメント	$M_x/a^2 p_0$	-0'084 (-0'084)	-0'070 (-0'070)	-0'067 -0'054
	$M_y/a^2 p_0$	—	—	-0'067 -0'061

注: () 内は Timoshenko⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ による値.第5表 分布荷重 $p_0 \sin \pi x \sin \pi y$ が作用する正方形板のたわみ

分 類	A	B
中央点のたわみ	$w/a^4 p_0 / Eh^3$	0'0198 0'0142
中央点のモーメント	$M_x/a^2 p_0$	0'028 0'024
	$M_y/a^2 p_0$	0'025 0'019
固定辺の midpoint のモーメント	$M_x/a^2 p_0$	-0'052 -0'043
	$M_y/a^2 p_0$	— —

$$Q_{m,n} = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \cdot 2Ap_0/\pi(m^2-4), \quad (n=1)$$

$$= 0 \quad (n \neq 1)$$

したがって $n=1$ の組のみ考慮すればよい. (例 A-4) と同様にして u_1 を求めて $d_{m,1}$ の表を作り, たわみと曲げモーメントを計算すると, 第5表の結果が得ら

れる。

(例 A-6) 基本振動数の 1/2 の周期の一樣分布振動荷重による正方形板の強制振動 $\Omega = \sqrt{5.740}/2$ すなわち $\Omega^2 = 1.435$ として (例 A-4) とまったく同様に計算する。結果は第 6 表のようになる。

第 6 表 基本振動数の 1/2 の周期の一樣分布振動荷重による正方形板の強制振動

分	類	A	B
中央点のたわみ	$w/a^4 p_0 / Eh^3$	0.0408	0.0282
中央点のモーメント	$M_x/a^2 p_0$	0.054	0.046
	$M_y/a^2 p_0$	0.047	0.034
固定辺の中点のモーメント	$M_x/a^2 p_0$	-0.109	-0.091
	$M_y/a^2 p_0$	—	—

[B] 二対辺固定他辺支持の場合 (例 B-1) 基本振動数 基本振動であるから $n=1$ かつ m が偶数の場合を考察する。(6)において r, s および $Q_{m,n}$ を 0 とし (2)₁ を用いて u_1 を消去すると

$$\frac{1}{1-\Omega^2} + \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{2}{(m^2 h^2 + 1)^2 - \Omega^2} = 0$$

これより種々の h に対して Ω^2 を求め、結果を第 2 表に示す。

(例 B-2) 正方形板の一樣圧縮座屈荷重 (6)において $j^2=1, h=1, n=1, s=\Omega^2=Q_{m,n}=0$ とし、(2)₁ を用いて u_1 を消去すると

$$\frac{1}{1+r} + \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{2}{(m^2+1)^2 + r(m^2+1)} = 0$$

これより $r = -3.830$ をうる。

(例 B-3) 一樣な面内力を受ける正方形板の基本振動数 (6)において $j^2=1, h=1, n=1, s=Q_{m,n}=0$ とし、(2)₁ を用いて u_1 を消去すると

$$\frac{1}{1+r-\Omega^2} + \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{2}{(m^2+1)^2 + r(m^2+1) - \Omega^2} = 0$$

これより $r = -3, -2, -1, +1, +2$ に対する Ω^2 を求め、結果を第 3 表に示す。

(例 B-4) 一樣分布荷重 p_0 が作用する正方形板の静的たわみ (10)₂ により

$$Q_{m,n} = 2Ap_0/\pi n, \quad (m=0) \\ = 0 \quad (m \neq 0)$$

(6)によりまず $n=1$ の組に対して $d_{m,1}$ を u_1 と Ap_0 にて表わし、これを (2)₁ に代入すると

$$1.08932u_1 + 2Ap_0/\pi = 0,$$

これより $u_1 = -0.91800 \times 2Ap_0/\pi$

これを用いて $d_{m,1}$ が求められる。同様に $n=3, n=5, n=7$ の組に対し $d_{m,n}$ を求め表を作ることができる。中央点のたわみなどの値は第 4 表のようにな

り Timoshenko⁽¹⁰⁾ の値と一致する。

(例 B-5) 分布荷重 $p_0 \sin \pi x \sin \pi y$ が作用する正方形板の静的たわみ (10)₂ により

$$Q_{m,n} = -Ap_0/\pi(m^2-1), \quad (n=1) \\ = 0 \quad (n \neq 1)$$

となるから、 $n=1$ の組のみに対して $d_{m,1}$ を求め、これにより中央点のたわみなどを計算すると第 5 表の結果が得られる。

(例 B-6) 基本振動数の 1/2 の周期の一樣分布振動荷重による正方形板の強制振動 $\Omega = \sqrt{8.604}/2$ すなわち $\Omega^2 = 2.151$ として (例 B-4) と全く同様に計算する。結果は第 6 表のようになる。

[C] 二隣辺固定他辺支持の場合 (例 C-1) 正方形板の基本振動数 第 1 近似として $u_1, v_1; u_3, v_3$ まで考慮する。試みに $\Omega^2 = 7.50$ として (7) より $m=1$ に対して $d_{m,n}$ を求めると

$$d_{1,1} = 0.27586(u_1 + v_1), \\ d_{1,3} = -1.60000(u_3 + v_1), \\ d_{1,5} = -0.05755v_1, \\ \dots\dots\dots,$$

これを (3)₂ に代入すると

$$-0.27586u_1 - 1.79470v_1 - 1.60000u_3 = 0$$

問題の対称性により

$$d_{m,n} = d_{n,m}, \quad u_1 = v_1, \quad u_3 = v_3$$

したがって $-2.07056u_1 - 1.60000u_3 = 0$

同様に $m=3$ に対して

$$-1.60000u_1 - 1.23664u_3 = 0$$

これより係数行列式を求めると

$$I \Delta_{7.50} = \begin{vmatrix} -2.07056 & -1.60000 \\ -1.60000 & -1.23664 \end{vmatrix} = 5.4 \times 10^{-4}$$

次に $\Omega^2 = 7.51$ および $\Omega^2 = 7.49$ に対して $I \Delta$ を計算すると

$$I \Delta_{7.51} = -2.8 \times 10^{-4}, \quad I \Delta_{7.49} = 34.4 \times 10^{-4}$$

これより $I \Delta = 0$ ならしめる Ω^2 を求めると

$$\Omega_{I^2} = 7.502$$

次に第 2 近似として u_5, v_5 まで考慮する。係数行列式は 3 行 3 列となるが

$$II \Delta_{7.50} = 45.2 \times 10^{-5}, \quad II \Delta_{7.51} = 7.9 \times 10^{-5}, \\ II \Delta_{7.52} = -28.9 \times 10^{-5}$$

より $II \Delta = 0$ ならしめる Ω^2 を求めると

$$\Omega_{II^2} = 7.512$$

次に第 3 近似として u_7, v_7 まで考慮すると

$$III \Delta_{7.50} = 18.6 \times 10^{-6}, \quad III \Delta_{7.51} = 3.3 \times 10^{-6}, \\ III \Delta_{7.52} = -11.8 \times 10^{-6}$$

より

$$\Omega_{III^2} = 7.512$$

したがって $\Omega^2 = 7.512$ をもって結論値とする (第 2

表)。

(例 C-2) 正方形板の一樣圧縮座屈荷重 前例と同様にして計算する。

$$\text{I } \Delta_{-3.24} = 2.88 \times 10^{-2}, \text{ I } \Delta_{-3.25} = -2.58 \times 10^{-2}, \\ \text{I } \Delta_{-3.26} = -7.93 \times 10^{-2}$$

$$\text{より } r_{\text{I}} = -3.245$$

$$\text{II } \Delta_{-3.24} = 6.8 \times 10^{-3}, \text{ II } \Delta_{-3.25} = -3.6 \times 10^{-3}, \\ \text{II } \Delta_{-3.26} = -13.8 \times 10^{-3}$$

$$\text{より } r_{\text{II}} = -3.247$$

$$\text{III } \Delta_{-3.24} = 3.71 \times 10^{-4}, \text{ III } \Delta_{-3.25} = -1.45 \times 10^{-4}, \\ \text{III } \Delta_{-3.26} = -6.55 \times 10^{-3}$$

$$\text{より } r_{\text{III}} = -3.247$$

したがって $r = -3.247$ をもって結論値とする。

(例 C-3) 一樣な面内圧縮力を受ける正方形板の基本振動数 $j^2=1$ とし, $r=-1, -2, -3$ の各場合において(例 C-1)と同様にして Q^2 の第1および第2近似値を計算し, 結果を第3表に示す。

(例 C-4) 辺比1.5の長方形板の基本振動数 $h=1.5$ として(例 C-1)と同様に計算する。この場合は $u_1=v_1$ などの関係は成立しないから第1近似で4行4列, 第2近似で6行6列の行列式の計算が必要となる。

$$\text{I } \Delta_{20.5} = 10.48 \times 10^{-6}, \text{ I } \Delta_{20.6} = 2.31 \times 10^{-6}, \\ \text{I } \Delta_{20.7} = -5.93 \times 10^{-6}$$

$$\text{より } Q_{\text{I}}^2 = 20.63$$

$$\text{II } \Delta_{20.6} = 8.06 \times 10^{-9}, \text{ II } \Delta_{20.7} = -1.80 \times 10^{-9}, \\ \text{II } \Delta_{20.8} = -11.74 \times 10^{-9}$$

$$\text{より } Q_{\text{II}}^2 = 20.68$$

(例 C-5) 一樣分布荷重 p_0 が作用する正方形板の静的たわみ (11)₂ により $Q_{m,n} = 4Ap_0/\pi^2 mn$ 。問題の対称性により $u_n=v_n$ であるから, u_1, u_3, u_5, u_7 まで考慮して(3)および(7)によりこれらの連立方程式を作りそれを解くと

$$u_1 = 0.4910 \times 4Ap_0/\pi^2, u_3 = -0.4487 \times 4Ap_0/\pi^2, \\ u_5 = -0.0204 \times 4Ap_0/\pi^2, u_7 = -0.0842 \times 4Ap_0/\pi^2$$

この結果を用いて $d_{m,n}$ の表を作ることができる。中央点のたわみなどの値は第4表のようになる。

[D] 三辺固定一辺支持の場合 (例 D-1) 正方形板の基本振動数 第1近似として $u_0, u_2; v_1, v_3$ まで考慮する。(4)および(8)により4行4列の行列式の計算が必要となるが,

$$\text{I } \Delta_{10.38} = 5.20 \times 10^{-7}, \text{ I } \Delta_{10.39} = -5.58 \times 10^{-7}, \\ \text{I } \Delta_{10.40} = -16.14 \times 10^{-7}$$

$$\text{より } Q_{\text{I}}^2 = 10.385$$

次に第2近似として u_4, v_5 まで考慮して6行6列の行列式を計算すると

$$\text{II } \Delta_{10.38} = 10.72 \times 10^{-10}, \text{ II } \Delta_{10.39} = 4.12 \times 10^{-10}, \\ \text{II } \Delta_{10.40} = -2.31 \times 10^{-10}$$

$$\text{より } Q_{\text{II}}^2 = 10.396 \text{ (第2表)}.$$

(例 D-2) 正方形板の一樣圧縮座屈荷重 前例と同様にして

$$\text{I } \Delta_{-4.30} = -2.68 \times 10^{-3}, \text{ I } \Delta_{-4.31} = 1.39 \times 10^{-3}, \\ \text{I } \Delta_{-4.32} = 4.30 \times 10^{-3}$$

$$\text{より } r_{\text{I}} = -4.306$$

$$\text{II } \Delta_{-4.30} = -4.57 \times 10^{-6}, \text{ II } \Delta_{-4.31} = 0.03 \times 10^{-6}, \\ \text{II } \Delta_{-4.32} = 3.34 \times 10^{-6}$$

$$\text{より } r_{\text{II}} = -4.310$$

(例 D-3) 一樣な面内圧縮力を受ける正方形板の基本振動数 $r=-1, -2, -3, -4$ の各場合において(例 D-1)と同様にして Q^2 の第1近似値を計算し, 結果を第3表に示した。

(例 D-4) 辺比1.5の長方形板の基本振動数 $h=1.5$ および $h=1/1.5$ の場合の第1近似値と第2近似値を計算した。結果を第2表に示す。

(例 D-5) 一樣分布荷重 p_0 が作用する正方形板の静的たわみ (12)₂ により

$$Q_{m,n} = 2Ap_0/\pi m, \quad (n=0) \\ = 0, \quad (n \neq 0)$$

そこで $u_0, u_2, u_4; v_1, v_3, v_5$ まで考慮して(4)および(8)によりこれらの連立方程式を作りそれを解くと $u_0 = -0.35164 \times 2Ap_0/\pi, v_1 = -0.64520 \times 2Ap_0/\pi, u_2 = 0.24154 \times 2Ap_0/\pi, v_3 = -0.47635 \times 2Ap_0/\pi, u_4 = 0.08560 \times 2Ap_0/\pi, v_5 = -0.02098 \times 2Ap_0/\pi$ この結果を用いて $d_{m,n}$ の表を作ることができる。中央点のたわみなどの値は第4表のようになる。

4. 結 語

以上においてある辺は固定され, 他の辺は支持された長方形板の振動・たわみ・座屈などの諸問題を統一的に取扱う計算方式を確立し, 種々の計算例によりその演算法を説明した。この解法は特に固有値の計算に便利であるが, たわみや応力を求めることも比較的容易である。級数計算については, 単調収束の場合は前に⁽¹¹⁾ 四辺固定長方形板の場合に行ったように, 収束する形を仮定して収束値を推定し, また交番収束の場合は周期変動の平均値を用いた。そしてこのような推定のための誤差が最終の結果に影響を与えないようにするため, 級数計算の際, だいたい15項まで用いて計算した。応力値の計算の際には収束が緩慢であるため特にこのような推定法が必要である。なお[C], [D]の場合境界条件をゆるくしていることになるから, 固有値は正しい値より低く出る⁽¹²⁾。

要するに本解法は個々の計算が簡単な代数計算であり、諸種の問題が類似の手續により解決できるという点にその有用性があるものと思われる。

おわりにこの研究に懇切な御指導をいただいた太田友弥教授に深く感謝の意を表する。また計算の労を煩わした井上 豊君に厚く感謝する。

文 献

- (1) 浜田, 機械学会論文集, **23**, 127(昭 32-3), 172.
(2) E. Trefftz, *ZAMM*, **15**(1935), 339.

- (3) B. Budiansky & Pai C. Hu, *NACA TR*, No. 848 (1946), 213.
(4) G. A. Thurston, *Aero. Sci., J.*, **24**(1957), 407.
(5) 浜田, 機械学会論文集, **24**, 139(昭 33-3), 148.
(6) 浜田, 機械学会論文集, **23**, 131(昭 32-7), 522.
(7) G. B. Warburton, *Instn. Mech. Engr., Proc.*, **168** (1954), 371.
(8) 八巻, 機械学会論文集, **18**, 75(昭 27), 126.
(9) S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*(1940), 213.
(10) 文献(9), 206.
(11) 文献(1), 179 ページ脚注参照.
(12) R. Courant & D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, **1**(1953), 407.

678. 743 : 539. 374 : 539. 389

硬質塩化ビニルの降伏および塑性ひずみの伝ばについて*

——軟鋼の降伏との相関性について——

中 川 有 三**, 奥 田 聡**

On the Yield Behavior of Unplasticized P. V. C.

(Analogy with the Yielding of Mild Steel)

by Yūzō NAKAGAWA and Satoshi OKUDA

We can recognize that there are two steps in the yield process of unplasticized P. V. C.. The first step of yielding is a process, during which the stress-strain curve reaches its maximum point and drops to the lower yield point; we may call it the "initial yielding". The original local contraction can be seen in a part of the specimen. When such local contraction proceeded to a limiting value corresponding to the strain ϵ_1 , a new yielding or contraction of the cross section is caused in the neighbouring part of yielded; such yielding or the second step of yield may be called the "progressive yielding".

The above two steps of yielding may be considered as analogous to the process of the upper and lower yield of the mild steel. Such phenomena of yielding are remarkably affected by the stretching speed v_{st} .

We established a relation between the stretching speed v_{st} and the yield strain ϵ_1 , the velocity of propagation of plastic strain wave c , i.e. $v_{st} = c \cdot \epsilon_1$.

1. 緒 言

硬質塩化ビニルは装置および構造用材料として最近ますますその用途を拡大しつつあるが、その機械的性質には特異な点が多く、軟鋼の降伏現象および塑性変形過程の考察に当って参考にすべき種々の特性をもっている。この材料は前報⁽¹⁾⁽²⁾に述べたように一般に第1図のような応力ひずみ曲線を描くが、その最高荷重の点①に至ると、第2図に示すように軸方向に対して

約55°の方向に明確なすべり線を表わし、炭素鋼の降伏に似た降伏現象を呈する。さらに引張負荷の継続とともに次第にすべり帯の幅を増し、局部収縮をひき起すが、ある程度まで局部収縮をおこすと、その部分の加工硬化が著しく、それ以上収縮せず、隣接の弾性部分が新たに降伏、収縮をひき起し、順次降伏を展開してゆく。いったん収縮変形した部分はその後の変形率は小さく、したがって試験片の全体の伸びの増加は主として弾性部分が順次降伏変形するためのものである。このような変形過程は塑性ひずみ波の伝ば過程とも考えられ、軟鋼の降伏における降伏域拡大のようすあるいは衝撃による塑性ひずみの伝ばのようすに似か

* 昭和 32 年 4 月 2 日 第 34 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 33 年 1 月 30 日。

** 正員、京都大学工学部(京都市左京区吉田本町)。