539.384.6 : 624.074.4 : 629.11.012.3

板輪心の強度に関する研究 (第1報)*

太田友弥**, 浜田 実**, 進藤明夫***, 前沢利成****

Researches on the Strength of Wheel Disc (1st Report)

by Tomoya ŌTA, Minoru HAMADA, Akio SHINDŌ,
and Toshinari MAEZAWA

In this paper, the strength of wheel disc of a newly devised wheel in order to lighten rolling stock was discussed basing on an approximate bending theory for a flat spherical shell, since this wheel disc consists of two discs having the form of a flat spherical shell which are made up to a wheel together with boss and rim by welding. In this theory, unbalanced traction is supported only by the stresses deduced from the membrane theory and the boundary condition is satisfied by the sum of solutions of membrane and bending theories. Some approximations were utilized in order to derive the solution of bending theory.

The stresses due to the force-fit of axle and the shrinkage fit of tyre and also those due to axle load and side thrust were considered. As the latter is non-symmetric problem, it was assumed for simplicity that the boss and rim are rigid. This assumption will entail larger error than those due to approximations made in bending theory.

1. は し が き

本論文で取扱う板輪心は車両の軽量化のために考案された第1図のようなへん平球かく状の板輪心2枚を、ボスおよびリムにそれぞれ溶接して組立てた構造のものである。この板輪心の強度計算にへん平球かくの曲げの近似理論を適用する。これは不つりあい外力は、膜理論解のみによって受け持たせ、境界条件は膜理論、曲げ理論の解の和で満足せしめる Love 流の方法である。

この板輪心はボスに車軸を力ばめし、リムとタイヤとが焼ばめされているので無荷重の状態で既に応力を受けている。これを以後初応力と呼ぶ。つぎに車両の重量による荷重 $2P$ (これを垂直荷重と呼ぶ) が2枚の板輪心にかかるが、これは均等に P ずつ配分されるものと仮定する。さらに走行時、特に曲線部およびクロスレール上ではレールとフランジとの接触による水平荷重 $2H$ を受ける。この水平荷重による応力は複雑であって第1図に示すように、これは $2P$ によるものと同一性質の P_1 なる垂直力を荷重として受ける場

合、車軸方向に $2H$ なる荷重を受ける場合 (これを横荷重と呼ぶ) およびボスとの接合部すなわち板輪心の内周をその直径のまわりに M なるモーメントを加えてリムとの接合部、すなわち板輪心の外周に対して相対的に回転せしめる場合 (これを回転変位と呼ぶ、この場合もちろん1枚の板輪心を単独に考える) の三つの場合を組合わせたものとなる。したがってこの板輪心の応力状態を求めるには

初応力、垂直荷重、横荷重および回転変位の四つの基本的問題を解けばよい。そして垂直荷重および回転変位の問題は非対称問題であるのでリムおよびボスの弾性変形を考慮に入れると、数値計算がきわめて面倒になるのでこれらの問題においてはリムおよびボスが剛体であると仮定する。

2. 基礎理論—1. 曲げ理論

この場合外力は周辺にのみ作用するから第2図に示す球かくの微小部分のつりあい条件式は微小変形理論では

$$\left. \begin{aligned} (\partial/\partial\theta)(T_1 \sin\theta) + \partial S_1/\partial\phi - T_2 \cos\theta + N_1 \sin\theta &= 0 \\ (\partial/\partial\theta)(S_1 \sin\theta) + \partial T_2/\partial\phi + N_2 \sin\theta + S_1 \cos\theta &= 0 \\ (\partial/\partial\theta)(N_1 \sin\theta) + \partial N_2/\partial\phi - T_1 \sin\theta - T_2 \sin\theta &= 0 \\ (\partial/\partial\theta)(H_1 \sin\theta) - \partial G_2/\partial\phi + H_1 \cos\theta + N_2 a \sin\theta &= 0 \\ (\partial/\partial\theta)(G_1 \sin\theta) - \partial H_1/\partial\phi - G_2 \cos\theta - N_1 a \sin 2\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

* 昭和 31 年 10 月 1 日 東京秋期講演大会において講演、
原稿受付 昭和 33 年 5 月 6 日。

** 正員、大阪大学工学部(大阪市都島区東野田町 9)。

*** 正員、神戸大学工学部。(講演当時大阪大学工学部)

**** 正員、川崎車両会社。

となる。ここで a は球面の曲率半径, θ は車軸から測った子午線方向の角座標, ϕ は第1図に示す荷重 $2P$ の作用線方向すなわち鉛直下方から測った緯度線方向の角座標であり, T_1, S_1, N_1, G_1 および H_1 はそれぞれ断面 θ —一定に作用する単位長さあたりの法線力, 面内せん断力, 面に直角なせん断力, 曲げモーメントおよびねじりモーメントであり, T_2, S_2, N_2, G_2 および H_2 はそれぞれ断面 ϕ —一定に作用する同種の量である。そして, これらの量の正の方向は第2図に示すとおりである。また肉厚 $2h$ は一定と仮定している。後報の数値例では θ は小さく $\cos \theta = 1$ とおくときの誤差は2%以下であるから(1)式は近似的に

第 1 図

第 2 図

としてよい。これを解くにあたってこの場合軸対称かくであって境界は $\theta = \text{const.}$ で与えられるので, すべての量は ϕ についてフーリエ展開が可能であると考えられることから

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} + \frac{\partial S_1}{\partial \phi} + (T_1 - T_2)/\theta + N_1 &= 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \frac{\partial T_2}{\partial \phi} + 2S_1/\theta + N_2 &= 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \theta} + \frac{\partial N_2}{\partial \phi} - (T_1 + T_2) + N_1/\theta &= 0 \\ \frac{\partial H_1}{\partial \theta} - \frac{\partial G_2}{\partial \phi} + 2H_1/\theta + N_2 a &= 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial \theta} - \frac{\partial H_1}{\partial \phi} + (G_1 - G_2)/\theta - N_1 a &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

としてよい。これを解くにあたってこの場合軸対称かくであって境界は $\theta = \text{const.}$ で与えられるので, すべての量は ϕ についてフーリエ展開が可能であると考えられることから

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{\theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - F, \quad T_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - F \\ S_1 &= \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \phi}, \quad N_1 = \frac{\partial F}{\partial \theta}, \\ N_2 &= \frac{1}{\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

なる形の応力関数 F を導入すると(2)式の第1,2式は θ^2 を1に対して無視する近似の範囲で完全に満足される。第3式については $2F$ だけが残るが後述のように一般に θ についての高次の微係数を含む項が大きい値を取るので実際上さしかねない(しかし不つりあい外力を膜理論による膜応力のみによってつりあわすこの近似理論では, むしろ第3式を完全に満足するように F を取って, 第1,2式には多少の差が残ってもよいとする方が妥当と言えるかも知れない。いずれにしても量的には差は非常に小さい)。

(2)式の第1式を ϕ で一度微分して $1/\theta$ を乗じた式から第5式に $(\partial/\partial \theta + 1/\theta)$ なる演算子を作用せしめた式を差引くと

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 F + \frac{1}{a} \left\{ - \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) G_1 + \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) G_2 + \left(\frac{2}{\theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} + \frac{2}{\theta^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) H_1 \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ただし $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$

つぎに θ, ϕ および面に直角な方向の変位成分をそれぞれ u, v および w とすると θ および ϕ 方向の伸びひずみおよび面内せん断ひずみはそれぞれ

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u}{\theta} + w \right), \quad \bar{w} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v}{\theta} \right) \quad (5)$$

で与えられる。これから

$$\left(\frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \varepsilon_1 + \frac{1}{\theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\theta \varepsilon_2) - \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} (\theta \bar{w}) - \frac{1}{a} \nabla w = 0 \quad (6)$$

が導出され、一方フックの法則からは

$$\varepsilon_1 = \frac{T_1 - \sigma T_2}{2Eh}, \quad \varepsilon_2 = \frac{T_2 - \sigma T_1}{2Eh}, \quad \bar{w} = \frac{1 + \sigma}{Eh} S_1 \quad (7)$$

であり (E はヤング率, σ はポアソン比である) これらに (3) 式を入れると

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{2Eh} \left\{ \nabla F - (1 + \sigma) \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - (1 - \sigma) F \right\} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2Eh} \left\{ (1 + \sigma) \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \sigma \nabla F - (1 - \sigma) F \right\} \\ \bar{w} &= \frac{1 + \sigma}{Eh} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{F}{\theta} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

であるから (6) 式に入れると

$$\nabla \nabla F - (1 - \sigma) \nabla F - 2Eh \nabla w / a = 0 \quad (9)$$

となる。

つぎに中央面の曲げによる曲率の変化およびねじれ率は

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{a^2} \left(\nabla - \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) w - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \kappa_2 &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{u}{\theta} \right) \\ \tau &= \frac{1}{a^2} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{\theta} \right) - \frac{1}{a^2 \theta} \left\{ \theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\theta} \right) \left(v + \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

で与えられる。(5) 式の第 1, 2 式から

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = a \varepsilon_1 - w, \quad \frac{1}{\theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u}{\theta} = a \varepsilon_2 - w \quad (5)'$$

であるがこれらに (8) 式を用いて得られる結果を (10) 式に入れてその第 1, 2 式は

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{a^2} \left(\nabla - \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 1 \right) w - \frac{1}{2Eha} \left\{ \nabla - (1 + \sigma) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (1 - \sigma) \right\} F \\ \kappa_2 &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 1 \right) w - \frac{1}{2Eha} \left\{ (1 + \sigma) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \sigma \nabla - (1 - \sigma) \right\} F \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

と書ける。そして曲げ剛性を $D = 2Eh^3 / \{3(1 - \sigma^2)\}$ とおくと、

$$G_1 = -D(\kappa_1 + \sigma \kappa_2), \quad G_2 = -D(\kappa_2 + \sigma \kappa_1), \quad H_1 = D(1 - \sigma)\tau$$

であるからこれらに (10) または (11) 式を用いると

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= -\frac{D}{a^2} \left(\nabla - \frac{1 - \sigma}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1 - \sigma}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 1 + \sigma \right) w + \frac{h^2}{3a} \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - 1 \right) F \\ G_2 &= -\frac{D}{a^2} \left\{ \sigma \nabla + \frac{1 - \sigma}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1 - \sigma}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 1 + \sigma \right\} w + \frac{h^2}{3a} \left\{ \nabla - \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - 1 \right\} F \\ H_1 &= \frac{D}{a^2} \frac{1 - \sigma}{\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{\theta} \right) + \frac{2h^2}{3a} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\theta} \right) F \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。これを (4) 式に入れて

$$\nabla F + \frac{D}{a^3} \nabla \nabla w - \frac{D}{a^3} \left[2(1 - \sigma) \frac{1}{\theta^4} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) - (1 + \sigma) \nabla \right] w + \frac{h^2}{3a^2} \nabla F = 0 \quad (13)$$

となって結局 (9), (13) 式から w, F を求めればよい。ところがこれらの式において一般に高次の微分 (θ に対する) の項は大きい値を取るのので (9) 式の左辺の第 2 項および (13) 式の左辺の第 3 項をそれぞれ無視した h^2/a^2 は 1 に比べて小さいので (後報の数値例では $h/a = 1/400$) 第 4 項をも無視すると

$$\nabla \nabla F - 2Eh \nabla w / a = 0 \quad (9)$$

$$\nabla F + D\nabla\nabla w/a^3 = 0 \quad \dots\dots\dots(13)'$$

となる。(9)' 式から

$$\nabla F = 2Ehw/a \quad \dots\dots\dots(9)''$$

であるから(2個の積分定数を含む一般解の項は膜理論による解で代用することにして0とおく)(13)' 式に用いて

$$(\nabla\nabla + k^2)w = 0, \quad k = \sqrt{3(1-\sigma^2)} \cdot a/h \quad \dots\dots(14)$$

となる。ここでは境界が軸対称な場合($\theta = \text{const.}$)を考えているので $w = W \cos n\phi$ ($n=0, 1, \dots$) とおくと境界条件は n のおのおのの値に対して別々に満足せしめればよい。そこで(14)式は

$$(L^2 + k^2)W = 0, \quad L(\quad) = \frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} - \frac{n^2}{\theta^2} \quad \dots\dots\dots(15)$$

となってこの一般解は $(L \pm ki)W = 0$ なる二つの方程式の一般解の一次結合で与えられる。すなわち

$$W = A_n' I_n(i\sqrt{ki}\theta) + B_n' K_n(i\sqrt{ki}\theta) + C_n' I_n(\sqrt{ki}\theta) + D_n' K_n(\sqrt{ki}\theta)$$

となる。これは

$$W = A_n \text{ber}_n + B_n \text{bei}_n + C_n \text{ker}_n + D_n \text{kei}_n \quad \dots(16)$$

と書くことができる。ただしこのベッセル関数の引数は $\sqrt{k}\theta$ である。(以下同様の略記をする)

また $F = \{2Eh/(1-\sigma^2)\} f \cos n\phi$ とおくと(9)' 式は

$$L(f) = (1-\sigma^2)W/a \quad \dots\dots\dots(17)$$

となる。さらに公式

$$\left. \begin{aligned} \text{ber}_n'' z &= -\frac{1}{z} \text{ber}_n' z + \frac{n^2}{z^2} \text{ber}_n z - \text{bei}_n z, \\ \text{bei}_n'' z &= -\frac{1}{z} \text{bei}_n' z + \frac{n^2}{z^2} \text{bei}_n z + \text{ber}_n z \end{aligned} \right\}$$

および ker_n'' , kei_n'' に対する同形の式

が成り立ちこの場合 $z = \sqrt{k}\theta$ であるから

$$L(\text{ber}_n) = -k \text{bei}_n, \quad L(\text{bei}_n) = k \text{ber}_n \text{ 等}$$

となる。したがって

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} &= B_n \text{ber}_n - A_n \text{bei}_n + D_n \text{ker}_n - C_n \text{kei}_n \\ \text{とすると} \\ L(W) &= k\bar{W}, \quad L(\bar{W}) = -kW \end{aligned} \right\} \dots\dots(18)$$

なる関係が成り立つので

$$f = -\{(1-\sigma^2)/ak\} \bar{W} \quad \dots\dots\dots(19)$$

とおけば(17)式はたしかに満足され(19)式はその特別解であることがわかる。さらに(17)式の一般解も容易に求められるが、ここではそれは膜理論による解で代用させるので求めない。

つぎに変位 u , v については

$$u = U \cos n\phi, \quad v = V \sin n\phi$$

とおけば(5)' 式に(8), (9)'' 式を用いて

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} \sim -\frac{a(1+\sigma)}{2Eh} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2},$$

したがって

$$\frac{dU}{d\theta} = -\frac{a}{1-\sigma} \frac{d^2 f}{d\theta^2}$$

となりこれを積分して(19)式を用いると

$$U = \{(1+\sigma)/k\} d\bar{W}/d\theta \quad \dots\dots\dots(20)$$

となる。また(5)' 式の第2式に(8)式を用いてさらに変数 ϕ を分離すると

$$\begin{aligned} nV &= -W\theta - U + \frac{a\theta}{1-\sigma^2} \left\{ L(f) \right. \\ &\quad \left. - (1+\sigma) \left(\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} - \frac{n^2}{\theta^2} \right) f - (1-\sigma)f \right\} \end{aligned}$$

となりこれに(17), (19), (20)式を用いて

$$V = -\frac{1+\sigma}{k\theta} \left(n - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \frac{1}{n} \theta^2 \right) \bar{W} \quad \dots\dots\dots(21)$$

が得られる。

応力は $T_1 = \{2Eh/(1-\sigma^2)\} t_1 \cos n\phi$, (T_2 , N_1 , G_1 , G_2 も同じ) および $N_2 = \{2Eh/(1-\sigma^2)\} n_2 \sin n\phi$, (S_1 , H_1 , S_2 も同じ) とおけば(3), (12)式から(18), (19)式を入れて

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= -\frac{1-\sigma^2}{ak} \left(\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} - \frac{n^2}{\theta^2} - 1 \right) \bar{W}, \\ n_1 &= -\frac{1-\sigma^2}{ak} \frac{d\bar{W}}{d\theta}, \\ t_2 &= \frac{1-\sigma^2}{a} W - t_1 + \frac{2(1-\sigma^2)}{ak} \bar{W} \\ n_2 &= \frac{1-\sigma^2}{ak} n \frac{\bar{W}}{\theta} \\ s_1 &= -\frac{1-\sigma^2}{ak} n \left(\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\theta^2} \right) \bar{W} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)'$$

および

$$\left. \begin{aligned} g_1 &\sim -\frac{h^2}{3a^2} \left[k\bar{W} - \left\{ \frac{1-\sigma}{\theta} \frac{d}{d\theta} - \frac{1-\sigma}{\theta^2} n^2 \right\} W \right] \\ g_2 &\sim -\frac{h^2}{3a^2} (1+\sigma) k\bar{W} - g_1, \\ h_1 &= -\frac{h^2}{3a^2} \frac{(1-\sigma)n}{\theta} \left(\frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\theta} \right) W \\ &\quad - \frac{2h^2}{3a} \frac{n}{\theta} \left(\frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\theta} \right) f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)'$$

が得られる。

3. 対称問題における解

以上は一般の非対称問題に通用するへん平球かくの曲げの近似理論の一つの解法を示したものであるが、基礎式を解くに当たって(9)'', (19)式のように特別解だけを取って一般解の項には膜理論による解を代用し

た. しかし対称問題においてはこのような近似をおこなわず直接 (9)'' 式, (19)式に代る一般解を簡単に求めることができるのでこれを利用すれば膜理論は不必要となる.

$$\nabla^2 F = \frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\theta \frac{d}{d\theta} \right)$$

であるから (9)' 式を簡単に積分できて (9)'' 式の代りに

$$\nabla F = 2Ehw/a + k_1\theta^2/2 + k_2 \dots \dots \dots (9)'''$$

となりこれを (13)' 式に用いると $\nabla \nabla w + k^2 w = (k_1\theta^2/2 + k_2)a^3/D$

となるので (16) 式の代りに

$$W = A_0 \text{ber} + B_0 \text{bei} + C_0 \text{ker} + D_0 \text{kei} + \left(\frac{1}{2} k_1 \theta^2 + c_2 \right) a^3 / k^2 D \dots \dots \dots (16)''$$

となる. そして (18), (20)'' 式の代りに

$$L(f) = (1 - \sigma^2) W / a + (1 - \sigma^2) \left(\frac{1}{2} k_1 \theta^2 + k_2 \right) / 2Eh \dots \dots \dots (18)''$$

$$f = -\frac{1 - \sigma^2}{ak} \bar{W} + \frac{1 - \sigma^2}{8Eh} \left(\frac{1}{8} k_1 \theta^4 + k_2 \theta^2 \right) + k_3 \ln \theta + k_4 \dots \dots \dots (20)''$$

となりこれを (11) 式に用いて (21) 式に代って

$$U = \frac{1 + \sigma}{k} \frac{d\bar{W}}{d\theta} + \frac{a}{8Eh} \left\{ \frac{1 - 3\sigma}{6} k_1 \theta^3 + 2(1 - \sigma) k_2 \theta \right\} \\ - \frac{ak_3}{1 - \sigma^2} \left\{ \frac{1 + \sigma}{\theta} + (1 - \sigma) \theta (\ln \theta - 1) \right\} - \frac{a}{1 + \sigma} c_4 \theta \dots \dots \dots (21)'$$

が得られる. ゆえに軸対称問題では (23) 式と上記の応力, 変位成分との和を取らずに変位はここに求めたものを, 応力は (20)'', (16)' で与えられる f, W を (4)', (12)' 式に用いてもよい. しかしこのようにした方が特に精度がよくなるということではないので, 後の計算においては軸対称問題でもこの解は用いなかった.

4. 基礎理論—2. 膜理論

これは Love⁽⁴⁾ が示したものをそのまま用いる. この場合境界上にしか外力はないので $n=0$ のとき

$$\left. \begin{aligned} U &= b_1 \sin \theta - \frac{a_1}{2} \left(\cot \theta - \sin \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \right), \\ -W &= \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{d\theta} + U \cot \theta \right) = b_1 \cos \theta + \frac{a_1}{2} \left(1 + \cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \right), \\ \frac{dW}{d\theta} &= U \\ t_1 = -t_2 &= \frac{1 - \sigma}{2a} \left(\frac{dU}{d\theta} - U \cot \theta \right) = \frac{1 - \sigma}{2a \sin^2 \theta} a_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)'$$

$n=1$ のとき

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{b_1 + b_2}{2} - \frac{b_1 - b_2}{2} \cos \theta + \frac{a_1 + a_2}{8} \left(\ln \tan \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) - \frac{a_1 - a_2}{8} \left(\operatorname{cosec}^2 \theta + 1 + \cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) \\ V &= \frac{b_1 - b_2}{2} - \frac{b_1 + b_2}{2} \cos \theta + \frac{a_1 - a_2}{8} \left(\ln \tan \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) - \frac{a_1 + a_2}{8} \left(\operatorname{cosec}^2 \theta + 1 + \cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) \\ -W &= \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{d\theta} + U \cot \theta + \frac{V}{\sin \theta} \right) = \frac{b_1 - b_2}{2} \sin \theta - \frac{a_1 - a_2}{8} \left(\cot \theta - \sin \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) \\ -\frac{dW}{d\theta} &= \frac{b_1 - b_2}{2} \cos \theta + \frac{a_1 - a_2}{8} \left(1 + \operatorname{cosec}^2 \theta + \cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)'$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 = -t_2 &= \frac{1 - \sigma}{2a} \left\{ \frac{dU}{d\theta} - U \cot \theta - V \operatorname{cosec} \theta \right\} = \frac{1 - \sigma}{4a \sin^3 \theta} \{ a_1 + a_2 + (a_1 - a_2) \cos \theta \} \\ s_1 &= \frac{1 - \sigma}{4a \sin^3 \theta} \{ a_1 - a_2 + (a_1 + a_2) \cos \theta \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)'$$

となる。ただし a_1, a_2, b_1, b_2 は積分定数である。 $n > 1$ のときも同様に求められるが、ここでは用いないので省略する。

5. 初 応 力

これは対称問題で $n=0$ の場合だけで解が与えられる。2, 4 で求めた変位および応力の和が実際に生ずる。すなわち車軸の半径方向および軸方向の変位を求めると (20), (22) 式を用いてそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \delta &= -\frac{a_1}{2} \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1+\sigma}{k} \frac{d\bar{W}}{d\theta} + W\theta \\ \delta_H &= b_1 + \frac{a_1}{2} \ln \tan \frac{\theta}{2} - W \\ \xi &= b_1 \theta - \frac{a_1}{2} \left(\frac{1}{\theta} - \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) + \frac{dW}{d\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots (25)$$

であり傾き角は

となるが (ただし (25) 式の右辺の $W, \bar{W}$ は (16), (18) 式で $n=0$ とおいたものである) ボスおよびリムは車軸方向には剛体であると見てよいので (25) 式の δ_H および ξ は板輪心の内外境界 $\theta = \theta_i, \theta_0$ (第1図) で 0 である。 δ はそれぞれ δ_i, δ_0 であるとする。これらの六つの条件は

$$\left. \begin{aligned} W_i \theta_i + \frac{1+\sigma}{k} \frac{d\bar{W}_i}{d\theta_i} &= \frac{a_1}{2} \frac{1}{\sin \theta_i} + \delta_i \\ W_i &= b_1 + \frac{a_1}{2} \ln \tan \frac{\theta_i}{2} \\ \frac{dW_i}{d\theta_i} + b_1 \theta_i - \frac{a_1}{2} \left(\frac{1}{\theta_i} - \theta_i \ln \tan \frac{\theta_i}{2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (26)$$

となる。ただし簡単のために $W|_{\theta=\theta_i} = W_i, dW/d\theta|_{\theta=\theta_i} = dW_i/d\theta_i$ 等と書いた。(26) 式の六つの式から W_i 等に含まれる 4 定数 $A_0 \sim D_0$ および定数 a_1, b_1 の 6 定

$$\delta_i = MK_i - r_0 \Delta_0 / r_1, \quad \delta_0 = N \Delta_3 / r_3 + Q K_0$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{4hr_1}{ah_1}, \quad N = \frac{2r_2r_3^2}{(r_3^2-r_2^2)L}, \\ L &= \frac{(1-\sigma)r_3^2 + (1+\sigma)r_2^2}{r_3^2-r_2^2} + \frac{(1-\sigma)r_3^2 + (1+\sigma)r_4^2}{r_4^2-r_3^2} \frac{h_3}{h_4}, \\ Q &= \frac{4r_2h[2r_2N - \{(1-\sigma)r_2^2 + (1+\sigma)r_3^2\}]}{(r_3^2-r_2^2)(1+\sigma)ah_3}, \end{aligned} \right\} \dots\dots (29)$$

であり K_i, K_0 はそれぞれ

$$\frac{a_1 \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{1+\sigma}{k\theta} \left(\frac{d}{d\theta} - 1 \right) \bar{W} \text{ の } \theta = \theta_i, \theta_0 \text{ における値}$$

となり a_1 は (26) 式の第 2, 5 式から

$$\frac{a_1}{2} = -\frac{1}{\rho} (W_i - W_0), \quad \rho = \ln \tan \frac{\theta_0}{2} - \ln \tan \frac{\theta_i}{2} \dots\dots (30)$$

数が決定されるが、 δ_i, δ_0 および (3)', (22) 式の和から導出される半径方向の応力

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h} (T_i \cos \theta + N_i \sin \theta) \\ &= \frac{E}{(1+\sigma)a} \left\{ \frac{a_1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{1+\sigma}{k\theta} \left(\frac{d\bar{W}}{d\theta} - \bar{W} \right) \right\} \dots\dots (27) \end{aligned}$$

はボスおよびリムのこれらの値と適合するように定める。これについては次に示すような便宜的な考え方を示す。

車輪の諸寸法を第1図に示すように取り、車軸とボスとの力ばめしろおよびリムとタイヤとの焼ばめしろをそれぞれ $-A_0, -A_3$ とする。簡単のために車軸はボスと同じ長さだけが存在するものと仮定し、ボス、リム、タイヤの幅 h_1, h_3, h_4 および板輪心の肉厚 $2h$ はそれぞれ皆異なった値になっているが、そのための影響は全く考慮せずに車軸、ボス、リムおよびタイヤ内ではすべて平面応力状態にあるものと仮定する。したがって半径方向および円周方向の応力成分および半径方向の変位はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= c_n + d_n/r^2, \quad \sigma_\phi = c_n - d_n/r^2 \\ e &= \frac{1}{E} \{ c_n(1-\sigma)r - d_n(1+\sigma)/r \} \end{aligned} \right\} \dots\dots (28)$$

で与えられる。ここで添字 n は車軸、ボス、リムおよびタイヤに対してそれぞれ $n=0, 1, 3, 4$ と取るものとする。そしてこれらの境界においてはそれぞれの σ_r と幅の積 (板輪心においては (27) 式と $4h$ との積) が一致し、半径方向変位は Δ_0, Δ_3 を考慮して適合せしめるものとする。これらの条件から (28) 式中の c_n, d_n ($n=0, 1, 3, 4$) および δ_i, δ_0 はすべて定まる。その結果

となるのでこれらを (26) 式に入れると第 1, 4 式から

$$\left. \begin{aligned} W_i \theta_i + \left(1 + \frac{M}{\theta_i}\right) \left\{ \frac{1+\sigma}{k} \frac{d\bar{W}_i}{d\theta_i} + \frac{1}{\rho \theta_i} (W_i - W_0) \right\} - M \frac{1+\sigma}{k} \frac{\bar{W}_i}{\theta_i} &= -\frac{r_0}{r_1} \Delta_0 \\ W_0 \theta_0 + \left(1 + \frac{Q}{\theta_0}\right) \left\{ \frac{1+\sigma}{k} \frac{d\bar{W}_0}{d\theta_0} + \frac{1}{\rho \theta_0} (W_i - W_0) \right\} - Q \frac{1+\sigma}{k} \frac{\bar{W}_0}{\theta_0} &= N \frac{\Delta_3}{r_3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

第 3, 6 式から

$$\begin{aligned} W_i \theta_i + \frac{1}{\rho \theta_i} (W_i - W_0) + \frac{dW_i}{d\theta_i} &= 0, \\ W_0 \theta_0 + \frac{1}{\rho \theta_0} (W_i - W_0) + \frac{dW_0}{d\theta_0} &= 0 \end{aligned}$$

となるので (31) 式を解いて $A_0 \sim D_0$ を定めれば (29), (30) 式から $\delta_i, \delta_0, \frac{a_1}{2}$ が得られこれらを用いて応力は (3)', (12)' 式と (22) 式との和から得られる. すなわち

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1}{2h} &= \frac{E}{1-\sigma^2} t_1 \sim \frac{E}{(1+\sigma)a} \left\{ \frac{a_1}{2} \frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\sigma}{k} \left(\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} - 1 \right) \bar{W} \right\} \\ \frac{T_2}{2h} &= \frac{E}{1-\sigma^2} t_2 \sim -\frac{T_1}{2h} + \frac{E}{a} W + 2 \frac{E}{ak} \bar{W} \\ \frac{N_1}{2h} &= \frac{E}{1-\sigma^2} n_1 = -\frac{E}{ak} \frac{d\bar{W}}{d\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

および曲げ応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{3E}{(1-\sigma^2)h} g_1 \sim -\frac{Eh}{(1-\sigma^2)a^2} \left\{ k\bar{W} - \frac{1-\sigma}{\theta} \left(\frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\theta} \right) W \right\} \\ \sigma_2 &= \frac{3E}{(1-\sigma^2)h} g_2 \sim -\frac{Eh}{(1-\sigma)a^2} \bar{W} - \sigma_1 \end{aligned} \right\}$$

となる.

6. 横 荷 重

1 枚の板輪心を外周固定で内周を荷重 H によって軸方向に δ_H だけ変位せしめるものとする. この場合分布荷重はないが内外周での外力はそれ自体ではつりあわないのでこれは膜理論の解によってつりあわせることにする. すなわち

$$H = -2\pi a \sin \theta (T_1 \sin \theta - N_1 \cos \theta)$$

であるが膜理論では $N_1 = 0$ としていて T_1 は (22) 式で与えられる. したがって

$$\frac{a_1}{2} = -H', \quad H' = \frac{1+\sigma}{4\pi Eh} H \dots\dots\dots (33)$$

となる. δ_H は $\theta = \theta_i, \theta_0$ でそれぞれ $\delta_H = \delta_{H_i}, 0$ であるから (33) 式を用いて (26) 式の第 2, 5 式の代りに

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= W_i + H' \ln \tan \frac{\theta_i}{2} + \delta_H = W_0 + H' \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \\ \delta_{H_i} &= -(W_i - W_0) + \rho H' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

が得られる. δ および ξ に対する条件は 5 と全く同じであるから (33), (34) 式を用いて (26) 式の残りの 4 式の代りに

$$\left. \begin{aligned} W_i \theta_i + \frac{1+\sigma}{k} \frac{d\bar{W}_i}{d\theta_i} &= -\frac{H'}{\theta_i} + \delta_i, \\ \frac{dW_0}{d\theta_i} + W_0 \theta_i &= -\left(\rho \theta_i + \frac{1}{\theta_i} \right) H', \\ W_0 \theta_0 + \frac{1+\sigma}{k} \frac{d\bar{W}_0}{d\theta_0} &= -\frac{H'}{\theta_0} + \delta_0, \\ \frac{dW_0}{d\theta_0} + W_0 \theta_0 &= -\frac{H'}{\theta_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

となる. δ_i, δ_0 は 5 と同様にして定められるが, この場合 $\Delta_0 = \Delta_3 = 0$ であるから

$$\left. \begin{aligned} \delta_i &= -\frac{M}{\theta_i} \left\{ \frac{H'}{\theta_i} + \frac{1+\sigma}{k} \left(\frac{d}{d\theta_i} - 1 \right) \bar{W}_i \right\}, \\ \delta_0 &= -\frac{Q}{\theta_0} \left\{ \frac{H'}{\theta_0} + \frac{1+\sigma}{k} \left(\frac{d}{d\theta_0} - 1 \right) \bar{W}_0 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

となる. (36) 式を (35) 式に用いれば $A_0 \sim D_0$ が決定されるが, ここではボスおよびリムを弾性体とするときと剛体とするときの差を知りたいので (35) 式をそのまま解いて $A_0 \sim D_0$ を H', δ_i, δ_0 の一次関数の形で求めることにする. しかる後弾性体とするときは得られた $A_0 \sim D_0$ を (36) 式に用いて δ_i, δ_0 を決定すればよく, 剛体であればそのまま 0 とすればよい.

7. 垂 直 荷 重

外周固定で内周が変形せずに垂直荷重 P を受けて

δ_p だけ $\phi=0$ の方向に平行移動すると考えると変位成分は

$$u_i = \delta_p \cos \theta_i \cos \phi, \quad v_i = -\delta_p \sin \theta_i \cos \phi, \quad w_i = \delta_p \sin \theta_i \sin \phi$$

となる。したがって 2, 4 において $n=1$ の場合のみで解が与えられる。そこでこの問題の膜理論に対する境界条件としては、外力 P が加わってしかもボスはリムに対して回転しないとするので、 P 以外に M_p なるモーメントをボスに加えねばならない。これらは

$$\left. \begin{aligned} P &= -2 \int_0^\pi \{ (T_1 \cos \theta + N_1 \sin \theta) \cos \phi - S_1 \sin \phi \} a \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{2\pi Eah}{1-\sigma^2} (t_1 \sin \theta \cos \theta + n_1 \sin^2 \theta - s_1 \sin \theta), \\ M_p &= -2 \int_0^\pi \{ (T_1 \sin \theta - N_1 \cos \theta) a \sin \theta \cos \phi + G_1 \cos \phi + H_1 \cos \theta \sin \phi \} a \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{2\pi Eah}{1-\sigma^2} \{ (t_1 \sin^3 \theta - n_1 \sin^2 \theta \cos \theta) a + g_1 \sin \theta + h_1 \sin \theta \cos \theta \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

で与えられる。これらの不つりあい量は膜理論の解によってささえられるものとして (37) 式に (24) 式の t_1, s_1 を用い $n_1 = g_1 = h_1 = 0$ とすると

$$\left. \begin{aligned} (a_1 - a_2)/8 &= p, & (a_1 + a_2)/8 &= -p \cos \theta_i - m, \\ \text{ただし } (1+\sigma)P/4\pi Eah &= p, & (1+\sigma)M_p/4\pi Eha &= m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

となる。 m は変位を考えれば定まらない。 $\phi=0$ の半径方向の変位 δ , 軸方向の変位 δ_H および θ 方向の傾き ξ はそれぞれ

$$\delta = (U \cos \theta + W \sin \theta) \cos^2 \phi - V \sin^2 \phi = (U \cos \theta + W \sin \theta) - (U \cos \theta + W \sin \theta + V) \sin^2 \phi,$$

$$\delta_H = (U \sin \theta - W \cos \theta) \cos \phi, \quad \xi = dW/d\theta$$

であるから (23) 式と (20), (21) 式との和を上式に入れると (38) 式を用いて

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{b_1 + b_2}{2} \cos \theta - \frac{b_1 - b_2}{2} - p \left(\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} + \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) \\ &\quad + (p \cos \theta_i + m) \left(\cot^2 \theta - \cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1+\sigma}{k} \cos \theta \frac{d\bar{W}}{d\theta} + W \sin \theta - \left[\frac{2}{\sin^2 \theta} \{ p(\cos \theta_i - \cos \theta) + m \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+\sigma}{k} \left(\frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\theta} + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \theta \right) \bar{W} + W \sin \theta \right] \sin^2 \phi \\ \delta_H &= \left[\frac{b_1 + b_2}{2} \sin \theta + (p \cos \theta_i + m) \left(\cot \theta - \sin \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\sin \theta} p + \frac{1+\sigma}{k} \sin \theta \frac{d\bar{W}}{d\theta} - W \cos \theta \right] \cos \phi \\ \xi &= -\frac{b_1 - b_2}{2} \cos \theta - p \left(1 + \operatorname{cosec}^2 \theta + \cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) + dW/d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

となる。ボスおよびリムを剛体としているのでこの場合の境界条件は

$$\theta = \theta_i \quad \text{で} \quad \delta = \delta_p = \text{const.}, \quad \delta_H = 0, \quad \xi = 0$$

$$\theta = \theta_0 \quad \text{で} \quad \delta = \delta_H = \xi = 0$$

であるからこれらに (39) 式を適用して 8 個の条件式が得られる。これから b_1, b_2 を消去し m, δ_p を分離すると

$$m = -\frac{\sin \theta_i}{2} \left\{ \frac{1+\sigma}{k} \left(\frac{d}{d\theta_i} - \frac{1}{\theta_i} + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \theta_i \right) \bar{W}_i + W_i \sin \theta_i \right\} \dots\dots\dots (40)$$

$$\delta_p = \frac{2p}{\cos \theta_i \sin^2 \theta_i} - \frac{1}{\cos \theta_i} \left(\frac{d}{d\theta_i} - \frac{1}{\theta_i} \right) W_i \dots\dots\dots (41)$$

および残りの四つの条件式は

$$\frac{1}{\cos \theta_0} \left(\frac{d}{d\theta_0} - \frac{1}{\theta_0} \right) W_0 = \left\{ \frac{2}{\cos \theta_0 \sin \theta_0} + \frac{\cos \theta_0 \sin^2 \theta_0}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_0} \right) \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right\} p, \quad \left| \right.$$

$$\begin{aligned}
& \sin^2 \theta_i \left\{ \frac{1+\sigma}{k} \left(\frac{d}{d\theta_i} - \frac{1}{\theta_i} \right) \bar{W}_i + W_i \sin \theta_i \right\} \\
& - \sin^2 \theta_0 \left\{ \frac{1+\sigma}{k} \left(\frac{d}{d\theta_0} - \frac{1}{\theta_0} \right) \bar{W}_0 + W_0 \sin \theta_0 \right\} = (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_i) p, \\
& - \frac{1+\sigma}{k} \left[\left\{ (\beta_i - 1) \frac{d}{d\theta_i} - \frac{\beta_i}{\theta_i} + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \theta_i \beta_i \right\} \bar{W}_i \right. \\
& \quad \left. - \left\{ (\beta_0 - 1) \frac{d}{d\theta_0} - \frac{\beta_0}{\theta_0} + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \theta_0 \beta_0 \right\} \bar{W}_0 \right] - \frac{W_i}{\theta_i} + \frac{W_0}{\theta_0} \\
& = \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{1}{\sin^2 \theta_0} + \cos \theta_i \ln \tan \frac{\theta_i}{2} - \cos \theta_0 \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right\} p, \\
& \frac{1}{\cos \theta_i} \frac{dW_i}{d\theta_i} - \frac{1}{\cos \theta_0} \frac{dW_0}{d\theta_0} = \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta_i \cos \theta_i} - \frac{1}{\sin^2 \theta_0 \cos \theta_0} - \rho \right\} p
\end{aligned} \tag{42}$$

ただし $\beta = \frac{1}{2} \left(\cos \theta - \sin^2 \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \right)$, $\beta_i = \beta|_{\theta=\theta_i}$, $\beta_0 = \beta|_{\theta=\theta_0}$

であり以上の諸式に用いた W , $\bar{W}$ は (16), (18) 式において $n=1$ としたものである。(42) 式から $A_1 \sim D_1$ が決定されるので (40), (41) 式から m , δ_p が求められるが, 計算においては (41) 式をそのまま用いずにこれを (42) 式を用いて変形して

$$\begin{aligned}
\delta_p = & \left\{ -(1 + \cos \theta_i) \ln \tan \frac{\theta_i}{2} + (1 + \cos \theta_0) \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right. \\
& - \frac{1}{4} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_i) \left(\frac{1}{\cos \theta_i \cos \theta_0} + 2 \cos \theta_0 \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right) \Big\} p - \frac{1+\sigma}{k} \left[\left\{ (\beta_i - 1) \frac{d}{d\theta_i} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\beta_i}{\theta_i} + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \theta_i \beta_i \right\} \bar{W}_i - \left\{ (\beta_0 - 1) \frac{d}{d\theta_0} - \frac{\beta_0}{\theta_0} + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \theta_0 \beta_0 \right\} \bar{W}_0 \right] \tag{41}'
\end{aligned}$$

としてこれを用いた方がよい。

応力の値は (3)', (12)' 式と (24) 式との和に $E/(1-\sigma^2)$ を乗じて与えられる。曲げ応力は

$$\sigma_1 = G_1/Z, \quad \sigma_2 = G_2/Z, \quad Z = 2h^2/3$$

で与えられる。せん断応力は有効せん断応力を用いねばならない。(37)式を用いてこれらは次式となる。断面 $\theta = \text{const.}$ では

面内引張応力:

$$\frac{T_1}{2h} = -\frac{E}{(1+\sigma)a} \left[\frac{2}{\sin^3 \theta} \left\{ \frac{p}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_i) + m \right\} + \frac{1+\sigma}{k\theta} \left(\frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\theta} \right) \bar{W} \right] \cos \phi,$$

面内せん断応力:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2h} \left(S_1 + \frac{H_1}{a} \right) = & -\frac{E}{(1+\sigma)a} \left[\frac{2}{\sin^3 \theta} \left\{ m \cos \theta - \frac{p}{2} (\sin^2 \theta + \sin^2 \theta_i) \right\} \right. \\
& \left. + \frac{1+\sigma}{k\theta} \left(\frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\theta} \right) \bar{W} + \frac{(1-\sigma)^2}{k^2 \theta^2} \left(\frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\theta} \right) W \right] \sin \phi
\end{aligned}$$

面に直角なせん断応力:

$$\frac{1}{2h} \left(N_1 - \frac{\partial H_1}{\partial s} \right) = -\frac{E}{ak} \left[\frac{d\bar{W}}{d\theta} - \frac{1-\sigma}{k\theta^2} \left(\frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\theta} \right) W \right] \cos \phi, \tag{43}$$

曲げ応力:

$$\sigma_1 = -\frac{Eh}{(1-\sigma^2)a^2} \left\{ k\bar{W} - \frac{1-\sigma}{\theta} \left(\frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\theta} \right) W \right\} \cos \phi,$$

断面 $\phi = \text{const.}$ ではそれぞれ

$$\begin{aligned}
\frac{T_2}{2h} = & -\frac{T_1}{2h} + \frac{E}{a} \left(W + \frac{2}{k} \bar{W} \right) \cos \phi, & \frac{1}{2h} \left(S_2 + \frac{H_2}{a} \right) = & -\frac{1}{2h} \left(S_1 + \frac{H_1}{a} \right), \\
\frac{1}{2h} \left(N_2 - \frac{\partial H_2}{\partial s} \right) = & \frac{E}{ak} \frac{1}{\theta} \left\{ \sigma \bar{W} + \frac{3(1-\sigma)}{k\theta} \left(\frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\theta} \right) W \right\} \sin \phi, \\
\sigma_2 = & -\sigma_1 - \frac{Ehk}{(1-\sigma)a^2} \bar{W} \cos \phi
\end{aligned}$$

8. 回 転 変 位

リムが固定されてボスとの接合部をその一つの直径のまわりに δ_M だけの最大変位を与えるようにモーメント M を加えて回転せしめたときを考えると内周の車軸方向の変位は $\delta_M \cos \phi$ で与えられる。これを 3 変位成分にわけて考えれば

$$u_i = \delta_M \sin \theta_i \cos \phi, \quad v_i = 0, \quad w_i = -\delta_M \cos \theta_i \cos \phi$$

であり、7 と同じく 2, 4 において $n=1$ の場合だけで解が与えられる。外力の状態は 7 と全く同様であって車軸自体が固定されたリムに対して変位しないためにはボスに M 以外に P に相当する P_M を加えねばならない。ゆえにここでは $P \rightarrow P_M$, $p \rightarrow p_m$, $M_p \rightarrow M$ と書くことにすると (38) 式の代りに

$$\left. \begin{aligned} (a_1 - a_2)/8 = p_m, \quad (a_1 + a_2)/8 = -p_m \cos \theta_i - m \\ \text{ただし} \quad m = (1 + \sigma)M/4\pi Eha, \quad p_m = (1 + \sigma)P_M/4\pi Eh \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)'$$

となる。そしてこの場合の境界条件は

$$\theta = \theta_i \text{ で } \delta = 0, \quad \delta_H = \delta_M \cos \phi, \quad \xi_i = -\delta_M / \sin \theta_i, \quad \theta = \theta_0 \text{ で } \delta = \delta_H = \xi_0 = 0$$

であるから 7 と同様八つの条件式が得られる。これらを変形して

$$p_m = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_i) \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right\} \sin^2 \theta_0 \left(\frac{dW_0}{d\theta_0} - W_0 \cot \theta_0 \right) \dots\dots\dots (44)$$

$$\delta_M = \frac{2p_m}{\sin^2 \theta_i} - \frac{1}{\theta_i} \left(\frac{d}{d\theta_i} - \frac{1}{\theta_i} \right) W_i \dots\dots\dots (45)$$

および残りの四つの条件式

$$\left. \begin{aligned} & W_i \sin \theta_i + \frac{1 + \sigma}{k} \left(\frac{d}{d\theta_i} - \frac{1}{\theta_i} + \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \theta_i \right) \bar{W}_i = -\frac{2}{\sin^2 \theta_i} m, \\ & -\cot^2 \theta_i \left(\frac{dW_i}{d\theta_i} - \frac{W_i}{\cos \theta_i \sin \theta_i} \right) - \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_0} \frac{dW_0}{d\theta_0} \\ & + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \left(\frac{dW_0}{d\theta_0} - W_0 \cot \theta_0 \right) \left(\frac{2}{\sin^4 \theta_i} - \alpha_i + \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_0} \alpha_0 \right) \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_i) \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right\} = 0, \\ & -W_i \tan \theta_i + \frac{1}{\cos \theta_i \cos \theta_0} \frac{dW_0}{d\theta_0} - W_0 \cot \theta_0 \\ & + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_i) \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right\} \\ & \times \left\{ (2 - \tan^2 \theta_0) (\alpha_i - \alpha_0) - \frac{1}{2} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_i) \left(\frac{3}{2 \cos \theta_0} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right) \right\} \left(\frac{dW_0}{d\theta_0} - W_0 \cot \theta_0 \right) - \frac{1 + \sigma}{k} \left(\frac{d\bar{W}_i}{d\theta_i} - \frac{d\bar{W}_0}{d\theta_0} \right) \\ & = 2m \left(\frac{\beta_i}{\sin^2 \theta_i} - \frac{\beta_0}{\sin^2 \theta_0} \right), \\ & W_0 \sin \theta_0 + \frac{1 + \sigma}{k} \left(\frac{d}{d\theta_0} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \theta_0 \right) \bar{W}_0 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_0} \right) \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_i) \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right\} \\ & \times \left(\frac{dW_0}{d\theta_0} - W_0 \cot \theta_0 \right) = -\frac{2}{\sin^2 \theta_0} m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

ただし $\alpha = 1 + \operatorname{cosec}^2 \theta + \cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2}$, $\alpha_i = \alpha|_{\theta=\theta_i}$, $\alpha_0 = \alpha|_{\theta=\theta_0}$

が得られる。これらの式の導出に当っては数値計算の際に支障をきたさないように十分注意する必要がある。

(46) 式はこの点に注意を払ってあるので 1 に対して θ_i^2 または θ_0^2 を無視する近似を置いて簡単化して

い. 以上によって $A_1 \sim D_1$, δM , p_m が決定されれば応力は (43) 式によって与えられる. ただし式中の p の代りに p_m とおく.

9. 水平荷重

1 で述べたようにこの場合は 6, 7, 8 の解の和で与えられる. 6 は独立しているのでそのままよいが, 第 1 図に示すようにボスに加わる曲げモーメントは, 大部分 2 枚の板輪心にかかる力 P_1 によってささえられる. したがって 7 で P の代りに P_1 としそれに応じて δp , M_p の代りに δp_1 , M_{p1} と書くことにするとボスは剛体としているので第 1 図に示すように 2 枚の板輪心の中央面間の距離が内周で $2l$, 外周で $2l_1$ であるとすると

$$\delta M = \delta p_1 r_1 / l \dots \dots \dots (47)$$

であり, 一方車輪全体としてのモーメントのつりあいから

$$Hr_4 = l(P_1 + P_M) + M + M_{p1} \dots \dots \dots (48)$$

となる. δp_1 は (41)' 式で P の代りに P_1 とおけばよく δM は (45) 式で与えられる. これらの結果を (47) 式に入れて P_1 と M との関係を求めそれを (48) 式に入れると結局 P_1 , M と H との関係が得られるのでこのような P_1 , M を 7, 8 の P および M の代りに用いて応力を計算しこれらと 6 の結果との和を求めればよい.

10. む す び

へん平球かく状の板輪心を有する新考案の車輪の強度計算に適用するために曲げの近似理論による解法を

示した. これは非対称問題でも適用しうるが, につりあい外力は膜理論解のみによって受持たせ境界条件は膜理論, 曲げ理論解の和で満足せしめるものである. 球かくがへん平であるので θ が小さい範囲に限られるとして θ^2 を 1 に対して無視する近似を置いて面内応力および面に直角なせん断応力を与える応力関数 F を導入した. この過程については省略したが, F の定義はこの近似の範囲では唯一ではない. 基礎式はこの F とたわみ w とで与え, $\partial^2 F / \partial \theta^2$ 等 θ について次数の高い微係数は大きい値を取ること, h/a が小さいことを利用して簡単化して解いた. 対称問題ではこの基礎式の一般解が容易に求められるので, この近似理論のように膜理論を用いなくてもすむ.

このような近似理論に基づくへん平球かく状の板輪心の強度計算式によって板輪心内の応力分布をだいたい見積ることができようが, 2 で述べた境界において半径方向の応力と幅との積が等しいとする仮定やボス, リム内で平面応力状態を仮定することはボスやリムの幅と板輪心の厚さとが著しく異なる場合には相当に無理であろう. また水平荷重に対してはともかく, 垂直荷重においては変形は主として車輪面内で生ずるのであるから, ボスはともかくリムおよびタイヤを剛体と仮定することには相当な無理があるものと予想される.

文 献

- (1) A.E.H. Love, *The mathematical theory of elasticity* (1920), p. 575.

論 文 集 24 巻 143 号 (昭 33-7) 正 誤 表

執 筆 者 名	ペ ー ジ	欄	行	誤	正
欧 文 目 次			1	Kaneo YOSHIMINE	Kanae YOSHIMINE
西原 利夫, 他	452	文 献	(12)	J. C. Lery	J. C. Levy
西原 利夫, 他	454	右	29, 30	転移	転位
〃	456	左	11	(1) 式と組合わせ……	(1) 式とを組合わせ……
大田 友弥, 他	488	右	(6) 式	$Q = -(M' - MtPH'')/L''$	$Q = -(M' - M + PH'')/L''$
〃	489	右	2	λ が一定値を	λ が一定値に
〃	〃	右	9	} 第 11 図 a	第 11 図
〃	490	左	7		
〃	491		22	(5) 式を用いて	(7) 式を用いて
〃	〃		下から 10	また領域に $SLMT$	また領域 $SLMT$
〃	493	左	2	上下限は	上下限の差は
榎木 義一, 他	528	$F_+(jz)$	4	$\frac{1}{(jz)^2} \{ \exp(-jza_1) - 1 \}$	$\frac{1}{(jz)^2} \{ 1 - \exp(-jza_1) \}$
〃	〃	κ_{s0}	1~5 中	係数, $2a_1/\sqrt{2\psi}$ または $2a_1/\sqrt{\psi/2}$	係数, $2a_1/\sqrt{\psi}$
〃	530	第 4 図中		$a_1/\sqrt{2\psi}$	$a_1/\sqrt{\psi}$
桜井 忠一, 他	535	右	27	繰返し荷重中の時効応力によって	繰返し荷重中の時効は応力によって