集中荷重によるだ円板の曲げ*

斎藤 渥**, 島崎 忠良***, 木村 成一****

Bending of Elliptic Plates under a Concentrated Load

by Atsushi SAITŌ, Tadayoshi SHIMAZAKI, and Seichi KIMURA

We treat the problems of the bending of clamped or simply supported elliptic plates subjected to a concentrated load at an arbitrary point. The rigorous solutions in a form of infinite series in these cases are obtained by means of elliptic coordinates and by expanding the particular solution into Fourier series.

Moreover, a clamped elliptic plate under a concentrated load in the center is treated as a numerical example.

1. 緒 言

周辺が固定端または回転端である無孔だ円板, あるいはだ円孔だ円板の任意の位置に集中荷重が作用する場合の曲げの解を級数形による厳密解として求めた。さきに著者の 1 人によって発表した論文⁽¹⁾と同様な方法でだ円座標を使用することによって解を導出した。数値計算例としては固定端を有する無孔だ円板について行い, たわみ曲面および固定周辺上曲げモーメントを求めた。

2. 一 般 解

薄い平板の微小たわみ w は次記の偏微分方程式を満足する。

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad \text{ただし} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad q = \text{荷重の圧力度}, \quad D = \text{板の曲げ剛性} \quad (1)$$

$$(1) \text{ 式の一般解 } w \text{ は } w = w_c + w_p \quad (2)$$

として与えられる。ここに w_c は平面重調和関数, w_p は (1) 式の特解である。

本問題においては次記のだ円座標を使用する。

$$x + iy = c \cosh(\xi + i\eta) \quad (3)$$

$$\text{すなわち} \quad x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad y = c \sinh \xi \sin \eta, \quad (0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq 2\pi) \quad (4)$$

この場合の転換の拡大率 $1/h$ は

$$h^2 = 2/c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \quad (5)$$

にて与えられる。

このような座標をとるとき w_c は一般に次記で与えることができる。

$$w_c = R_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \{R_n(\xi) \cos n\eta + Q_n(\xi) \sin n\eta\}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} R_0(\xi) &= K_0 + L_0 \xi + E_0 \cosh 2\xi + F_0 \sinh 2\xi \\ R_1(\xi) &= A_1 \cosh \xi + C_1 \sinh \xi + E_1 \cosh 3\xi + G_1 \sinh 3\xi \\ Q_1(\xi) &= B_1 \sinh \xi + D_1 \cosh \xi + F_1 \sinh 3\xi + H_1 \cosh 3\xi \\ R_2(\xi) &= A_2 \cosh 2\xi + C_2 \sinh 2\xi + E_2 \cosh 4\xi + G_2 \sinh 4\xi \\ Q_2(\xi) &= B_2 \sinh 2\xi + D_2 \cosh 2\xi + F_2 \sinh 4\xi + H_2 \cosh 4\xi \\ R_n(\xi) &= A_n \cosh n\xi + C_n \sinh n\xi + E_{n-2} \cosh(n-2)\xi + E_n \cosh(n+2)\xi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

* 昭和 33 年 4 月 1 日 第 35 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 33 年 4 月 28 日。

** 正員, 近畿大学理工学部(大阪府布施市小若江)。

*** 准員, 帝国産業会社。

**** 准員, 有隣電機精機会社。

$$\begin{aligned}
 &+G_{n-2} \sinh(n-2)\xi + G_n \sinh(n+2)\xi \\
 Q_n(\xi) = &B_n \sinh n\xi + D_n \cosh n\xi + F_{n-2} \sinh(n-2)\xi + F_n \sinh(n+2)\xi \\
 &+ H_{n-2} \cosh(n-2)\xi + H_n \cosh(n+2)\xi
 \end{aligned}
 \quad (n \geq 3)$$

ここに $K_0, L_0, \dots, H_n$ 等は境界条件より決定される未定定数である。

次に集中荷重 P が $(x=x_p, y=y_p)$ あるいは $(\xi=\xi_p, \eta=\eta_p)$ なる点に作用している場合に (2) 式中の特解 w_p は一般に次記で与えることができる⁽²⁾。

$$w_p = \frac{P}{16\pi D} \{ (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 \} \log \{ (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 \} \dots\dots\dots (7)$$

3. 特解のフーリエ展開

(7) 式で与えられた特解 w_p をフーリエ級数に展開する。まず 円座標 (4) 式を用いると

$$\begin{aligned}
 (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 = &\frac{c^2}{2} (\cosh 2\xi + \cos 2\eta + \cosh 2\xi_p + \cos 2\eta_p \\
 &- 4 \cosh \xi_p \cos \eta_p \cosh \xi \cos \eta - 4 \sinh \xi_p \sin \eta_p \sinh \xi \sin \eta) \dots\dots\dots (8)
 \end{aligned}$$

あるいは

$$(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 = c^2 \{ \cosh(\xi+i\eta) - \cosh(\xi_p+i\eta_p) \} \{ \cosh(\xi-i\eta) - \cosh(\xi_p-i\eta_p) \} \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここで $\xi > \xi_p$ なる場合には

$$\begin{aligned}
 &\log \{ \cosh(\xi \pm i\eta) - \cosh(\xi_p \pm i\eta_p) \} \\
 &= \log \frac{e^{-(\xi \pm i\eta)}}{2} \{ e^{\xi \pm i\eta} - e^{\xi_p \pm i\eta_p} \} \{ e^{\xi \pm i\eta} - e^{-(\xi_p \pm i\eta_p)} \} \\
 &= \log \frac{e^{\xi \pm i\eta}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} e^{-n(\xi \pm i\eta)} (\cosh n\xi_p \cos n\eta_p \pm i \sinh n\xi_p \sin n\eta_p) \dots\dots\dots (10)
 \end{aligned}$$

したがって (9) 式より

$$\begin{aligned}
 &\log \{ (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 \} \\
 &= 2 \left[\xi + \log \frac{c}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\xi}}{n} (\cosh n\xi_p \cos n\eta_p \cos n\eta + \sinh n\xi_p \sin n\eta_p \sin n\eta) \right] \dots\dots\dots (11)
 \end{aligned}$$

ゆえに (8) 式と (11) 式の積を計算し $\cos n\eta$ および $\sin n\eta$ につき整理すれば特解 w_p は次記のごとくフーリエ級数に展開することができる。

$\xi > \xi_p$ に対して

$$w_p = \frac{Pc^2}{16\pi D} \left[\alpha_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_n(\xi) \cos n\eta + \beta_n(\xi) \sin n\eta \} \right]$$

ただし

$$\begin{aligned}
 \alpha_0(\xi) &= \rho\varphi_1 - e^{-\xi} (\varphi_2 \cosh \xi_p \cos \eta_p + \varphi_3 \sinh \xi_p \sin \eta_p) - \frac{1}{2} e^{-2\xi} \cosh 2\xi_p \cos 2\eta_p \\
 \alpha_1(\xi) &= \rho\varphi_2 - (2\varphi_1 + 1) e^{-\xi} \cosh \xi_p \cos \eta_p \\
 &\quad - \frac{1}{2} e^{-2\xi} (\varphi_2 \cosh 2\xi_p \cos 2\eta_p + \varphi_3 \sinh 2\xi_p \sin 2\eta_p) - \frac{1}{3} e^{-3\xi} \cosh 3\xi_p \cos 3\eta_p \\
 \beta_1(\xi) &= \rho\varphi_3 - (2\varphi_1 - 1) e^{-\xi} \sinh \xi_p \sin \eta_p \\
 &\quad + \frac{1}{2} e^{-2\xi} (\varphi_3 \cosh 2\xi_p \cos 2\eta_p - \varphi_2 \sinh 2\xi_p \sin 2\eta_p) - \frac{1}{3} e^{-3\xi} \sinh 3\xi_p \sin 3\eta_p \\
 \alpha_2(\xi) &= \rho - e^{-\xi} (\varphi_2 \cosh \xi_p \cos \eta_p - \varphi_3 \sinh \xi_p \sin \eta_p) - \varphi_1 e^{-2\xi} \cosh 2\xi_p \cos 2\eta_p \\
 &\quad - \frac{1}{3} e^{-3\xi} (\varphi_2 \cosh 3\xi_p \cos 3\eta_p + \varphi_3 \sinh 3\xi_p \sin 3\eta_p) - \frac{1}{4} e^{-4\xi} \cosh 4\xi_p \cos 4\eta_p \\
 \beta_2(\xi) &= -e^{-\xi} (\varphi_3 \cosh \xi_p \cos \eta_p + \varphi_2 \sinh \xi_p \sin \eta_p) - \varphi_1 e^{-2\xi} \sinh 2\xi_p \sin 2\eta_p \\
 &\quad + \frac{1}{3} e^{-3\xi} (\varphi_3 \cosh 3\xi_p \cos 3\eta_p - \varphi_2 \sinh 3\xi_p \sin 3\eta_p) - \frac{1}{4} e^{-4\xi} \sinh 4\xi_p \sin 4\eta_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_n(\xi) = & -\frac{2}{n}\varphi_1 e^{-n\xi} \cosh n\xi_p \cos n\eta_p \\
& -\frac{e^{-(n+1)\xi}}{n+1} \{\varphi_2 \cosh(n+1)\xi_p \cos(n+1)\eta_p + \varphi_3 \sinh(n+1)\xi_p \sin(n+1)\eta_p\} \\
& -\frac{e^{-(n-1)\xi}}{n-1} \{\varphi_2 \cosh(n-1)\xi_p \cos(n-1)\eta_p - \varphi_3 \sinh(n-1)\xi_p \sin(n-1)\eta_p\} \\
& -\frac{e^{-(n+2)\xi}}{n+2} \cosh(n+2)\xi_p \cos(n+2)\eta_p - \frac{e^{-(n-2)\xi}}{n-2} \cosh(n-2)\xi_p \cos(n-2)\eta_p \\
\beta_n(\xi) = & -\frac{2}{n}\varphi_1 e^{-n\xi} \sinh n\xi_p \sin n\eta_p \\
& +\frac{e^{-(n+1)\xi}}{n+1} \{\varphi_3 \cosh(n+1)\xi_p \cos(n+1)\eta_p - \varphi_2 \sinh(n+1)\xi_p \sin(n+1)\eta_p\} \\
& -\frac{e^{-(n-1)\xi}}{n-1} \{\varphi_3 \cosh(n-1)\xi_p \cos(n-1)\eta_p + \varphi_2 \sinh(n-1)\xi_p \sin(n-1)\eta_p\} \\
& -\frac{e^{-(n+2)\xi}}{n+2} \sinh(n+2)\xi_p \sin(n+2)\eta_p - \frac{e^{-(n-2)\xi}}{n-2} \sinh(n-2)\xi_p \sin(n-2)\eta_p
\end{aligned} \tag{12}$$

(n ≥ 3)

$$\rho = \xi + \log \frac{c}{2}, \quad \varphi_1 = \cosh 2\xi + \cosh 2\xi_p + \cos 2\eta_p$$

$$\varphi_2 = -4 \cosh \xi \cosh \xi_p \cos \eta_p, \quad \varphi_3 = -4 \sinh \xi \sinh \xi_p \sin \eta_p$$

同様にして $\xi < \xi_p$ なる場合に対しては (10) 式の展開をかえることによって次記のごとく展開することができる。

$\xi < \xi_p$ に対して

$$w_p = \frac{Pc^2}{16\pi D} \left[\alpha_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n(\xi) \cos n\eta + \beta_n(\xi) \sin n\eta\} \right]$$

ただし

$$\begin{aligned}
\alpha_0(\xi) = & \rho\varphi_1 - e^{-\xi_p}(\varphi_2 \cosh \xi \cos \eta_p + \varphi_3 \sinh \xi \sin \eta_p) - \frac{1}{2}e^{-2\xi_p} \cosh 2\xi \cos 2\eta_p \\
\alpha_1(\xi) = & \rho\varphi_2 - (2\varphi_1 + 1)e^{-\xi_p} \cosh \xi \cos \eta_p \\
& -\frac{1}{2}e^{-2\xi_p}(\varphi_2 \cosh 2\xi \cos 2\eta_p + \varphi_3 \sinh 2\xi \sin 2\eta_p) - \frac{1}{3}e^{-3\xi_p} \cosh 3\xi \cos 3\eta_p \\
\beta_1(\xi) = & \rho\varphi_3 - (2\varphi_1 - 1)e^{-\xi_p} \sinh \xi \sin \eta_p \\
& +\frac{1}{2}e^{-2\xi_p}(\varphi_3 \cosh 2\xi \cos 2\eta_p - \varphi_2 \sinh 2\xi \sin 2\eta_p) - \frac{1}{3}e^{-3\xi_p} \sinh 3\xi \sin 3\eta_p \\
\alpha_2(\xi) = & \rho - e^{-\xi_p}(\varphi_2 \cosh \xi \cos \eta_p - \varphi_3 \sinh \xi \sin \eta_p) - \varphi_1 e^{-2\xi_p} \cosh 2\xi \cos 2\eta_p \\
& -\frac{1}{3}e^{-3\xi_p}(\varphi_2 \cosh 3\xi \cos 3\eta_p + \varphi_3 \sinh 3\xi \sin 3\eta_p) - \frac{1}{4}e^{-4\xi_p} \cosh 4\xi \cos 4\eta_p \\
\beta_2(\xi) = & -e^{-\xi_p}(\varphi_3 \cosh \xi \cos \eta_p + \varphi_2 \sinh \xi \sin \eta_p) - \varphi_1 e^{-2\xi_p} \sinh 2\xi \sin 2\eta_p \\
& +\frac{1}{3}e^{-3\xi_p}(\varphi_3 \cosh 3\xi \cos 3\eta_p - \varphi_2 \sinh 3\xi \sin 3\eta_p) - \frac{1}{4}e^{-4\xi_p} \sinh 4\xi \sin 4\eta_p \\
\alpha_n(\xi) = & -\frac{2}{n}\varphi_1 e^{-n\xi_p} \cosh n\xi \cos n\eta_p \\
& -\frac{e^{-(n+1)\xi_p}}{n+1} \{\varphi_2 \cosh(n+1)\xi \cos(n+1)\eta_p + \varphi_3 \sinh(n+1)\xi \sin(n+1)\eta_p\} \\
& -\frac{e^{-(n-1)\xi_p}}{n-1} \{\varphi_2 \cosh(n-1)\xi \cos(n-1)\eta_p - \varphi_3 \sinh(n-1)\xi \sin(n-1)\eta_p\} \\
& -\frac{e^{-(n+2)\xi_p}}{n+2} \cosh(n+2)\xi \cos(n+2)\eta_p - \frac{e^{-(n-2)\xi_p}}{n-2} \cosh(n-2)\xi \cos(n-2)\eta_p \\
\beta_n(\xi) = & -\frac{2}{n}\varphi_1 e^{-n\xi_p} \sinh n\xi \sin n\eta_p
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{-(n+1)\xi_p}}{n+1} \{ \varphi_3 \cosh(n+1)\xi \cos(n+1)\eta_p - \varphi_2 \sinh(n+1)\xi \sin(n+1)\eta_p \} \\
& - \frac{e^{-(n-1)\xi_p}}{n-1} \{ \varphi_3 \cosh(n-1)\xi \cos(n-1)\eta_p + \varphi_2 \sinh(n-1)\xi \sin(n-1)\eta_p \} \\
& - \frac{e^{-(n+2)\xi_p}}{n+2} \sinh(n+2)\xi \sin(n+2)\eta_p - \frac{e^{-(n-2)\xi_p}}{n-2} \sinh(n-2)\xi \sin(n-2)\eta_p \\
& \qquad \qquad \qquad (n \geq 3)
\end{aligned}$$

$$\rho = \xi_p + \log \frac{c}{2}.$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 = (12)$ 式と同じ

4. 曲げモーメント

曲線の接線方向, 法線方向および曲率半径をそれぞれ s, n および ρ とすると曲げモーメント M_n は一般に次式で与えられる⁽³⁾.

$$M_n = -D \left[4w - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] \quad (14)$$

したがってこれを だ円座標 (3) 式によって表わせば曲げモーメント M_ξ, M_η は次記で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= -Dh^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{c^2 h^2}{2} (1-\nu) \left(\sinh 2\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} - \sin 2\eta \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \right] \\ M_\eta &= -Dh^2 \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{c^2 h^2}{2} (1-\nu) \left(\sinh 2\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} - \sin 2\eta \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

5. 境界条件

(A) 周辺固定端 だ円板の周辺が固定されている場合には周辺における たわみ および法線方向 n のこう配が消えることより境界条件は

$$\text{周辺において } w=0, \quad \partial w / \partial n = 0 \quad (16)$$

したがって (2) 式より

$$\text{周辺において } w_c = -w_p, \quad \frac{\partial w_c}{\partial \xi} = -\frac{\partial w_p}{\partial \xi} \quad (17)$$

(B) 周辺回転端 だ円板の周辺が回転端である場合には周辺において たわみ および曲げモーメント M_ξ が消えることより (15) 式を用いると

$$\left. \begin{aligned} \text{周辺において } w &= 0 \\ (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - (1-\nu) \sinh 2\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

したがって (2) 式より境界条件は次記となる.

$$\left. \begin{aligned} \text{周辺において } w_c &= -w_p \\ (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \frac{\partial^2 w_c}{\partial \xi^2} - (1-\nu) \sinh 2\xi \frac{\partial w_c}{\partial \xi} &= \\ = - \left[(\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \frac{\partial^2 w_p}{\partial \xi^2} - (1-\nu) \sinh 2\xi \frac{\partial w_p}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

6. 集中荷重を受けた だ円板

だ円板の周辺を $\xi = \xi_1$ とし, 集中荷重 P が点 (x_p, y_p) すなわち (ξ_p, η_p) に作用している場合の たわみ を求める.

(A) 周辺固定端 この場合には w_c として (6) 式より次の形をえらぶ.

$$\begin{aligned} w_c &= K_0 + E_0 \cosh 2\xi + (A_1 \cosh \xi + E_1 \cosh 3\xi) \cos \eta + (B_1 \sinh \xi + F_1 \sinh 3\xi) \sin \eta \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} [\{ A_n \cosh n\xi + E_{n-2} \cosh(n-2)\xi + E_n \cosh(n+2)\xi \} \cos n\eta \\ &+ \{ B_n \sinh n\xi + F_{n-2} \sinh(n-2)\xi + F_n \sinh(n+2)\xi \} \sin n\eta] \quad (20) \end{aligned}$$

境界条件式 (17) に (12), (20) 式を代入し $\cos n\gamma$, $\sin n\gamma$ の係数を比較し

$$W = -\frac{Pc^2}{16\pi D} \dots\dots\dots (21)$$

とおくとき (20) 式中の未定定数は次記のごとく決定できる.

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= W \left\{ \alpha_0(\xi_1) - \frac{1}{2} \alpha_0'(\xi_1) \coth 2\xi_1 \right\} \\ E_0 &= \frac{W}{2} \alpha_0'(\xi_1) \operatorname{cosech} 2\xi_1 \\ A_1 &= W \frac{\alpha_1(\xi_1) \cdot 3 \sinh 3\xi_1 - \alpha_1'(\xi_1) \cosh 3\xi_1}{\sinh 4\xi_1 + 2 \sinh 2\xi_1} \\ E_1 &= W \frac{\alpha_1'(\xi_1) \cosh \xi_1 - \alpha_1(\xi_1) \sinh \xi_1}{\sinh 4\xi_1 + 2 \sinh 2\xi_1} \\ B_1 &= W \frac{\beta_1(\xi_1) \cdot 3 \cosh 3\xi_1 - \beta_1'(\xi_1) \sinh 3\xi_1}{\sinh 4\xi_1 - 2 \sinh 2\xi_1} \\ F_1 &= W \frac{\beta_1'(\xi_1) \sinh \xi_1 - \beta_1(\xi_1) \cosh \xi_1}{\sinh 4\xi_1 - 2 \sinh 2\xi_1} \\ A_n &= \frac{W \{ (n+2) \alpha_n(\xi_1) \sinh(n+2)\xi_1 - \alpha_n'(\xi_1) \cosh(n+2)\xi_1 \} - E_{n-2} (2 \sinh 2n\xi_1 + n \sinh 4\xi_1)}{\sinh 2(n+1)\xi_1 + (n+1) \sinh 2\xi_1} \\ E_n &= \frac{W \{ \alpha_n'(\xi_1) \cosh n\xi_1 - n \alpha_n(\xi_1) \sinh n\xi_1 \} + E_{n-2} \{ \sinh 2(n-1)\xi_1 + (n-1) \sinh 2\xi_1 \}}{\sinh 2(n+1)\xi_1 + (n+1) \sinh 2\xi_1} \\ B_n &= \frac{W \{ \beta_n'(\xi_1) \sinh(n+2)\xi_1 - (n+2) \beta_n(\xi_1) \cosh(n+2)\xi_1 \} + F_{n-2} (2 \sinh 2n\xi_1 - n \sinh 4\xi_1)}{\sinh 2(n+1)\xi_1 - (n+1) \sinh 2\xi_1} \\ F_n &= \frac{W \{ n \beta_n(\xi_1) \cosh n\xi_1 - \beta_n'(\xi_1) \sinh n\xi_1 \} + F_{n-2} \{ (n-1) \sinh 2\xi_1 - \sinh 2(n-1)\xi_1 \}}{(n+1) \sinh 2\xi_1 - \sinh 2(n+1)\xi_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (n \geq 2) \dots\dots\dots (22)$$

ここで $\alpha_n'(\xi_1)$, $\beta_n'(\xi_1)$ は $\alpha_n(\xi)$, $\beta_n(\xi)$ の $\xi = \xi_1$ における第一次微係数である. 以下この記号に準ずる.

(B) 周辺回転端 この場合には w_0 として固定端の場合の (20) 式にとれば未知数とする未定定数が式数よりも多くあらわれ境界条件より生じた連立方程式を解くことができない. したがってこのことを考慮して w_0 を次記にとる.

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= R_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} [R_n(\xi) \cos n\gamma + Q_n(\xi) \sin n\gamma] \\ \text{ただし} \quad R_0(\xi) &= E_0 \cosh 2\xi \\ R_1(\xi) &= E_1 \cosh 3\xi, & Q_1(\xi) &= F_1 \sinh 3\xi \\ R_2(\xi) &= A_2 \cosh 2\xi + E_2 \cosh 4\xi + E_0, & Q_2(\xi) &= F_2 \sinh 4\xi \\ R_n(\xi) &= A_n \cosh n\xi + E_{n-2} \cosh(n-2)\xi + E_n \cosh(n+2)\xi \\ Q_n(\xi) &= B_n \sinh n\xi + F_{n-2} \sinh(n-2)\xi + F_n \sinh(n+2)\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (n \geq 3) \dots\dots\dots (23)$$

境界条件式 (19) に (12), (23) 式を代入すれば次記の連立方程式を作ることができる.

$$E_0 \cosh 2\xi_1 = W \cdot \alpha_0(\xi_1) \dots\dots\dots (24)$$

$$E_1 \cosh 3\xi_1 = W \cdot \alpha_1(\xi_1) \dots\dots\dots (25)$$

$n \geq 2$ に対し

$$\left\{ \begin{aligned} R_n(\xi_1) &= W \cdot \alpha_n(\xi_1) \\ R_{n-2}(\xi_1) &= W \cdot \alpha_{n-2}(\xi_1) \end{aligned} \right.$$

ただし

$$\begin{aligned}
R_{s0}(\xi_1) &= -A_2 \cdot 2 \cosh 2\xi_1 - E_2 \cdot 8 \cosh 4\xi_1 + E_0 \cdot 2 \{2 + (1+\nu) \sinh^2 2\xi_1\} \\
R_{s1}(\xi_1) &= -A_3 \cdot \frac{9}{2} \cosh 3\xi_1 - E_3 \cdot \frac{25}{2} \cosh 5\xi_1 \\
&\quad + E_1 \left\{ 9 \left(\cosh 2\xi_1 - \frac{1}{2} \right) \cosh 3\xi_1 - 3(1-\nu) \sinh 2\xi_1 \sinh 3\xi_1 - \frac{1}{2} \cosh \xi_1 \right\} \\
R_{s2}(\xi_1) &= -A_4 \cdot 8 \cosh 4\xi_1 - E_4 \cdot 18 \cosh 6\xi_1 + A_2 \cdot 2 \{2 + (1+\nu) \sinh^2 2\xi_1\} \\
&\quad + E_2 \cdot 2 \{8 \cosh 2\xi_1 \cosh 4\xi_1 - 2(1-\nu) \sinh 2\xi_1 \sinh 4\xi_1 - \cosh 2\xi_1\} \\
&\quad - E_0 \cdot 4 \cosh 2\xi_1 \\
R_{s, n-2}(\xi_1) &= -A_n \frac{n^2}{2} \cosh n\xi_1 - E_n \frac{(n+2)^2}{2} \cosh(n+2)\xi_1 \\
&\quad + A_{n-2} \{ (n-2)^2 \cosh 2\xi_1 \cosh(n-2)\xi_1 - (n-2)(1-\nu) \sinh 2\xi_1 \sinh(n-2)\xi_1 \} \\
&\quad + E_{n-2} \left\{ n^2 \cosh 2\xi_1 \cosh n\xi_1 - n(1-\nu) \sinh 2\xi_1 \sinh n\xi_1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(n-2)^2}{2} \cosh(n-2)\xi_1 \right\} - A_{n-4} \frac{(n-4)^2}{2} \cosh(n-4)\xi_1 \\
&\quad + E_{n-4} \left\{ (n-4)^2 \cosh 2\xi_1 \cosh(n-4)\xi_1 - (n-4)(1-\nu) \sinh 2\xi_1 \sinh(n-4)\xi_1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(n-2)^2}{2} \cosh(n-2)\xi_1 \right\} - E_{n-6} \frac{(n-6)^2}{2} \cosh(n-6)\xi_1
\end{aligned} \tag{26}$$

(n ≥ 5)

$$F_1 \sinh 3\xi_1 = W \cdot \beta_1(\xi_1) \tag{27}$$

$$F_2 \sinh 4\xi_1 = W \cdot \beta_2(\xi_1) \tag{28}$$

n ≥ 3 に対し

$$\begin{cases} Q_n(\xi_1) = W \cdot \beta_n(\xi_1) \\ Q_{s, n-2}(\xi_1) = W \cdot \beta_{s, n-2}(\xi_1) \end{cases}$$

ただし

$$\begin{aligned}
Q_{s1}(\xi_1) &= -B_3 \cdot \frac{9}{2} \sinh 3\xi_1 - F_3 \cdot \frac{25}{2} \sinh 5\xi_1 \\
&\quad + F_1 \left\{ 9 \left(\cosh 2\xi_1 + \frac{1}{2} \right) \sinh 3\xi_1 - 3(1-\nu) \sinh 2\xi_1 \cosh 3\xi_1 - \frac{1}{2} \sinh \xi_1 \right\} \\
Q_{s, n-2}(\xi_1) &= -B_n \frac{n^2}{2} \sinh n\xi_1 - F_n \frac{(n+2)^2}{2} \sinh(n+2)\xi_1 \\
&\quad + B_{n-2} \{ (n-2)^2 \cosh 2\xi_1 \sinh(n-2)\xi_1 - (n-2)(1-\nu) \sinh 2\xi_1 \cosh(n-2)\xi_1 \} \\
&\quad + F_{n-2} \left\{ n^2 \cosh 2\xi_1 \sinh n\xi_1 - n(1-\nu) \sinh 2\xi_1 \cosh n\xi_1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(n-2)^2}{2} \sinh(n-2)\xi_1 \right\} - B_{n-4} \frac{(n-4)^2}{2} \sinh(n-4)\xi_1 \\
&\quad + F_{n-4} \left\{ (n-4)^2 \cosh 2\xi_1 \sinh(n-4)\xi_1 - (n-4)(1-\nu) \sinh 2\xi_1 \cosh(n-4)\xi_1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(n-2)^2}{2} \sinh(n-2)\xi_1 \right\} - F_{n-6} \frac{(n-6)^2}{2} \sinh(n-6)\xi_1
\end{aligned} \tag{29}$$

(n ≥ 4)

またこれらの連立方程式の右辺の $\alpha_{s, n}(\xi_1)$, $\beta_{s, n}(\xi_1)$ 等は次記で与えられる.

$$\begin{aligned}
\alpha_{s0}(\xi_1) &= \cosh 2\xi_1 \cdot \alpha_0''(\xi_1) - (1-\nu) \sinh 2\xi_1 \cdot \alpha_0'(\xi_1) - \frac{1}{2} \alpha_2''(\xi_1) \\
\alpha_{s1}(\xi_1) &= \left(\cosh 2\xi_1 - \frac{1}{2} \right) \alpha_1''(\xi_1) - (1-\nu) \sinh 2\xi_1 \cdot \alpha_1'(\xi_1) - \frac{1}{2} \alpha_3''(\xi_1) \\
\beta_{s1}(\xi_1) &= \left(\cosh 2\xi_1 + \frac{1}{2} \right) \beta_1''(\xi_1) - (1-\nu) \sinh 2\xi_1 \cdot \beta_1'(\xi_1) - \frac{1}{2} \beta_3''(\xi_1)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{s2}(\xi_1) &= \cosh 2\xi_1 \cdot \alpha_2''(\xi_1) - (1-\nu) \sinh 2\xi_1 \cdot \alpha_2'(\xi_1) - \frac{1}{2} \alpha_4''(\xi_1) - \alpha_0''(\xi_1) \\
 \beta_{s2}(\xi_1) &= \cosh 2\xi_1 \cdot \beta_2''(\xi_1) - (1-\nu) \sinh 2\xi_1 \cdot \beta_2'(\xi_1) - \frac{1}{2} \beta_4''(\xi_1) \\
 \alpha_{sn}(\xi_1) &= \cosh 2\xi_1 \cdot \alpha_n''(\xi_1) - (1-\nu) \sinh 2\xi_1 \cdot \alpha_n'(\xi_1) - \frac{1}{2} \alpha_{n-2}''(\xi_1) - \frac{1}{2} \alpha_{n+2}''(\xi_1) \\
 \beta_{sn}(\xi_1) &= \cosh 2\xi_1 \cdot \beta_n''(\xi_1) - (1-\nu) \sinh 2\xi_1 \cdot \beta_n'(\xi_1) - \frac{1}{2} \beta_{n-2}''(\xi_1) - \frac{1}{2} \beta_{n+2}''(\xi_1)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

($n \geq 3$)

7. 集中荷重を受けた だ円孔だ円板

外周が $\xi = \xi_1$, 内周が $\xi = \xi_2$ なる共焦だ円に限られた だ円板に集中荷重 P が作用している場合の たわみ は 前節の無孔だ円板と同様に求めることができる。

(A) 周辺固定端 内外両周辺とも固定されている場合には w_c として一般形 (6) 式をとる。この時未定数を決定する連立方程式として $\xi = \xi_1$ および $\xi = \xi_2$ に対して次記のごとくもつことができる。

$$\left. \begin{aligned}
 R_n(\xi) &= W \cdot \alpha_n(\xi) \\
 R_n'(\xi) &= W \cdot \alpha_n'(\xi) \quad (n \geq 0)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q_n(\xi) &= W \cdot \beta_n(\xi) \\
 Q_n'(\xi) &= W \cdot \beta_n'(\xi) \quad (n \geq 1)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ここで右辺の $\alpha_n(\xi)$, $\alpha_n'(\xi)$, $\beta_n(\xi)$, $\beta_n'(\xi)$ は外周 $\xi = \xi_1$ に対しては (12) 式, 内周 $\xi = \xi_2$ に対しては (13) 式を使用する。

(B) 周辺回転端 この場合にも無孔だ円板の時と同じ理由で w_c の一般形をとることができないので次記の形をとる。

$$w_c = R_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} [R_n(\xi) \cos n\eta + Q_n(\xi) \sin n\eta]$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 R_0(\xi) &= E_0 \cosh 2\xi + F_0 \sinh 2\xi \\
 R_1(\xi) &= E_1 \cosh 3\xi + G_1 \sinh 3\xi \\
 Q_1(\xi) &= F_1 \sinh 3\xi + H_1 \cosh 3\xi \\
 R_2(\xi) &= A_2 \cosh 2\xi + C_2 \sinh 2\xi + E_0 + E_2 \cosh 4\xi + G_2 \sinh 4\xi \\
 Q_2(\xi) &= F_0 + F_2 \sinh 4\xi + H_2 \cosh 4\xi \\
 R_n(\xi) &= A_n \cosh n\xi + C_n \sinh n\xi + E_{n-2} \cosh(n-2)\xi + E_n \cosh(n+2)\xi \\
 &\quad + G_{n-2} \sinh(n-2)\xi + G_n \sinh(n+2)\xi \\
 Q_n(\xi) &= B_n \sinh n\xi + D_n \cosh n\xi + F_{n-2} \sinh(n-2)\xi + F_n \sinh(n+2)\xi \\
 &\quad + H_{n-2} \cosh(n-2)\xi + H_n \cosh(n+2)\xi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

($n \geq 3$)

この時未定数に関する連立方程式は境界条件式 (19) より $\xi = \xi_1$ および $\xi = \xi_2$ に対して次記となる。

$$E_0 \cosh 2\xi + F_0 \sinh 2\xi = W \cdot \alpha_0(\xi) \dots\dots\dots (34)$$

$$E_1 \cosh 3\xi + G_1 \sinh 3\xi = W \cdot \alpha_1(\xi) \dots\dots\dots (35)$$

$n \geq 2$ に対して

$$\left\{ \begin{aligned}
 R_n(\xi) &= W \cdot \alpha_n(\xi) \\
 R_{s, n-2}(\xi) &= W \cdot \alpha_{s, n-2}(\xi)
 \end{aligned} \right.$$

ただし

$$\begin{aligned}
 R_{s0}(\xi) &= -A_2 \cdot 2 \cosh 2\xi - C_2 \cdot 2 \sinh 2\xi - E_2 \cdot 8 \cosh 4\xi - G_2 \cdot 8 \sinh 4\xi \\
 &\quad + E_0 \cdot 2 \{2 + (1+\nu) \sinh^2 2\xi\} + F_0 \cdot (1+\nu) \sinh 4\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{s1}(\xi) &= -A_3 \cdot \frac{9}{2} \cosh 3\xi - C_3 \cdot \frac{9}{2} \sinh 3\xi - E_3 \cdot \frac{25}{2} \cosh 5\xi - G_3 \cdot \frac{25}{2} \sinh 5\xi \\
&\quad + E_1 \left\{ 9 \left(\cosh 2\xi - \frac{1}{2} \right) \cosh 3\xi - 3(1-\nu) \sinh 2\xi \sinh 3\xi - \frac{1}{2} \cosh \xi \right\} \\
&\quad + G_1 \left\{ 9 \left(\cosh 2\xi - \frac{1}{2} \right) \sinh 3\xi - 3(1-\nu) \sinh 2\xi \cosh 3\xi - \frac{1}{2} \sinh \xi \right\} \\
R_{s2}(\xi) &= -A_4 \cdot 8 \cosh 4\xi - C_4 \cdot 8 \sinh 4\xi - E_4 \cdot 18 \cosh 6\xi - G_4 \cdot 18 \sinh 6\xi \\
&\quad + A_2 \cdot 2 \{ 2 + (1+\nu) \sinh^2 2\xi \} + C_2 (1+\nu) \sinh 4\xi \\
&\quad + E_2 \cdot 2 \{ 8 \cosh 2\xi \cosh 4\xi - 2(1-\nu) \sinh 2\xi \sinh 4\xi - \cosh 2\xi \} \\
&\quad + G_2 \cdot 2 \{ 8 \cosh 2\xi \sinh 4\xi - 2(1-\nu) \sinh 2\xi \cosh 4\xi - \sinh 2\xi \} \\
&\quad - E_0 \cdot 4 \cosh 2\xi - F_0 \cdot 4 \sinh 2\xi \\
R_{s, n-2}(\xi) &= -A_n \cdot \frac{n^2}{2} \cosh n\xi - C_n \cdot \frac{n^2}{2} \sinh n\xi - E_n \cdot \frac{(n+2)^2}{2} \cosh(n+2)\xi - G_n \cdot \frac{(n+2)^2}{2} \sinh(n+2)\xi \\
&\quad + A_{n-2} \{ (n-2)^2 \cosh 2\xi \cosh(n-2)\xi - (n-2)(1-\nu) \sinh 2\xi \sinh(n-2)\xi \} \\
&\quad + C_{n-2} \{ (n-2)^2 \cosh 2\xi \sinh(n-2)\xi - (n-2)(1-\nu) \sinh 2\xi \cosh(n-2)\xi \} \\
&\quad + E_{n-2} \left\{ n^2 \cosh 2\xi \cosh n\xi - n(1-\nu) \sinh 2\xi \sinh n\xi - \frac{(n-2)^2}{2} \cosh(n-2)\xi \right\} \\
&\quad + G_{n-2} \left\{ n^2 \cosh 2\xi \sinh n\xi - n(1-\nu) \sinh 2\xi \cosh n\xi - \frac{(n-2)^2}{2} \sinh(n-2)\xi \right\} \\
&\quad - A_{n-4} \cdot \frac{(n-4)^2}{2} \cosh(n-4)\xi - C_{n-4} \cdot \frac{(n-4)^2}{2} \sinh(n-4)\xi \\
&\quad + E_{n-4} \left\{ (n-4)^2 \cosh 2\xi \cosh(n-4)\xi - (n-4)(1-\nu) \sinh 2\xi \sinh(n-4)\xi - \frac{(n-2)^2}{2} \cosh(n-2)\xi \right\} \\
&\quad + G_{n-4} \left\{ (n-4)^2 \cosh 2\xi \sinh(n-4)\xi - (n-4)(1-\nu) \sinh 2\xi \cosh(n-4)\xi - \frac{(n-2)^2}{2} \sinh(n-2)\xi \right\} \\
&\quad - E_{n-6} \cdot \frac{(n-6)^2}{2} \cosh(n-6)\xi - G_{n-6} \cdot \frac{(n-6)^2}{2} \sinh(n-6)\xi \\
&\hspace{25em} (n \geq 5) \dots\dots\dots (36)
\end{aligned}$$

$$F_1 \sinh 3\xi + H_1 \cosh 3\xi = W \cdot \beta_1(\xi) \dots\dots\dots (37)$$

$$F_2 \sinh 4\xi + H_2 \cosh 4\xi + F_0 = W \cdot \beta_2(\xi) \dots\dots\dots (38)$$

$n \geq 3$ に対して

$$\begin{cases} Q_n(\xi) = W \cdot \beta_n(\xi) \\ Q_{s, n-2}(\xi) = W \cdot \beta_{s, n-2}(\xi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{ただし } Q_{s1}(\xi) &= -B_3 \cdot \frac{9}{2} \sinh 3\xi - D_3 \cdot \frac{9}{2} \cosh 3\xi - F_3 \cdot \frac{25}{2} \sinh 5\xi - H_3 \cdot \frac{25}{2} \cosh 5\xi \\
&\quad + F_1 \left\{ 9 \left(\cosh 2\xi + \frac{1}{2} \right) \sinh 3\xi - 3(1-\nu) \sinh 2\xi \cosh 3\xi - \frac{1}{2} \sinh \xi \right\} \\
&\quad + H_1 \left\{ 9 \left(\cosh 2\xi + \frac{1}{2} \right) \cosh 3\xi - 3(1-\nu) \sinh 2\xi \sinh 3\xi - \frac{1}{2} \cosh \xi \right\} \\
Q_{s, n-2}(\xi) &= -B_n \cdot \frac{n^2}{2} \sinh n\xi - D_n \cdot \frac{n^2}{2} \cosh n\xi - F_n \cdot \frac{(n+2)^2}{2} \sinh(n+2)\xi - H_n \cdot \frac{(n+2)^2}{2} \cosh(n+2)\xi \\
&\quad + B_{n-2} \{ (n-2)^2 \cosh 2\xi \sinh(n-2)\xi - (n-2)(1-\nu) \sinh 2\xi \cosh(n-2)\xi \} \\
&\quad + D_{n-2} \{ (n-2)^2 \cosh 2\xi \cosh(n-2)\xi - (n-2)(1-\nu) \sinh 2\xi \sinh(n-2)\xi \} \\
&\quad + F_{n-2} \left\{ n^2 \cosh 2\xi \sinh n\xi - n(1-\nu) \sinh 2\xi \cosh n\xi - \frac{(n-2)^2}{2} \sinh(n-2)\xi \right\} \\
&\quad + H_{n-2} \left\{ n^2 \cosh 2\xi \cosh n\xi - n(1-\nu) \sinh 2\xi \sinh n\xi - \frac{(n-2)^2}{2} \cosh(n-2)\xi \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -B_{n-4} \frac{(n-4)^2}{2} \sinh(n-4)\xi - D_{n-4} \frac{(n-4)^2}{2} \cosh(n-4)\xi \\
& + F_{n-4} \left\{ (n-4)^2 \cosh 2\xi \sinh(n-4)\xi - (n-4)(1-\nu) \sinh 2\xi \cosh(n-4)\xi - \frac{(n-2)^2}{2} \sinh(n-2)\xi \right\} \\
& + H_{n-4} \left\{ (n-4)^2 \cosh 2\xi \cosh(n-4)\xi - (n-4)(1-\nu) \sinh 2\xi \sinh(n-4)\xi - \frac{(n-2)^2}{2} \cosh(n-2)\xi \right\} \\
& - F_{n-6} \frac{(n-6)^2}{2} \sinh(n-6)\xi - H_{n-6} \frac{(n-6)^2}{2} \cosh(n-6)\xi
\end{aligned}$$

(n ≥ 4)

..... (39)

これらの連立方程式の右辺の $\alpha_{s,n}(\xi)$, $\beta_{s,n}(\xi)$ は (30) 式で与えられるが外周 $\xi=\xi_1$ および内周 $\xi=\xi_2$ に対してはそれぞれ (12) 式および (13) 式を使用する。

第 1 表 たわみ $w \times D/P$

ξ η	0	ξ_A	ξ_B	ξ_C
90°	0.027 393 17	0.021 843 64	0.012 373 61	0.003 804 19
75°	0.017 418 67	0.014 817 62	0.008 773 67	0.002 722 59
60°	0.007 488 71	0.006 427 72	0.003 844 90	0.001 118 03
30°	0.000 770 30	0.000 549 01	0.000 379 40	0.000 109 18
0°	0.000 156 37	—	—	—

第 1 図

第 2 図

第 2 表 固定周
辺上曲げモー
メント M_ξ

η	$-M_\xi/P$
90°	0.147 80
75°	0.109 18
60°	0.052 76
30°	0.008 20
0°	0.002 54

8. 数 値 計 算 例

本解法における数値計算例として

$$(x^2/4) + y^2 = 1$$

なる周辺固定の無孔だ円板の中央に集中荷重 P が作用している場合を取扱う。この時

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_p = \pi/2$$

$$\xi_1 = 0.549\ 306\ 144\ 4, \quad c = \sqrt{3}$$

となり、点 $(0, 1/4)$, $(0, 1/2)$, $(0, 3/4)$ を通る各だ円の ξ をそれぞれ ξ_A , ξ_B , ξ_C とすればたわみの数値は第 1 表で与えられ、これによってたわみ曲面を描けば第 1 図となる。

次に固定周辺上の曲げモーメント M_ξ を求めると第 2 表となる。これを図示すれば第 2 図となる。

9. 結 語

固定端または回転端の無孔だ円板および だ円孔だ円板に集中荷重が作用する場合の曲げの厳密解を だ円座標の使用と特解の展開によって導出し最後に数値計算例を行った。

本研究にあたり御助言を賜った大阪府立大学 関谷壮教授に厚く感謝の意を表します。

文 献

- (1) 斎藤, 機械学会論文集, 23, 135(昭 32), 778.
- (2) 文献 (1) の p. 779.
- (3) L. Fox and R.V. Southwell, *Phil. Trans. Roy. Soc., A239*(1945), 422.