クーロン摩擦を有する2自由度系の強制振動について*

榎木 義一**, 藤井 太一***, 岡田 幸雄****

Forced Vibrations of the System with Two Degrees of Freedom with Coulomb Damping

by Yoshikazu SAWARAGI, Taichi FUJII, and Yukio OKADA

In this paper, we analysed the motion affected by harmonic disturbing displacement of the system which has two masses suspended by two springs and a constant friction between masses or between the mass and the supporting ceiling, and obtained an analytical solution in the domain of vibrations with or without stops.

Some experiments were carried out, showing close agreements with the theoretical analysis. By these studies, the following results were obtained,

- (1) In the resonance (at the natural frequencies of two degrees system), when the friction is smaller than a certain definite value, the amplitudes of masses become infinitely large, and the friction which is larger than this value causes the motion with stops or the motion without the relative displacement of masses.
- (2) At $1/3$, $1/5$, $1/7$, ... of natural frequencies, any smallest friction causes the motion with stops.
- (3) At infinitely high frequency, in the case that the friction between two masses is larger than a certain definite value, the motion with stops or the motion without relative displacement will exist, and in the case that the friction exists between the mass and the supporting ceiling, any friction does not cause the stop motion.

1. 緒 言

非線形振動に関する一問題として1自由度の振動系にクーロン摩擦を有する場合についてはすでに Den Hartog⁽¹⁾ により計算されているが、ここで取扱うものはさらに2自由度の振動系にクーロン摩擦が存在する場合である。すなわち第1図(a)および(b)に示すように2個の質量を2個のばねで支持した振動系に、クーロン摩擦 F または f が存在する場合で、かかる振動系は実際上の問題として、たとえば鉄道車両台車において見られるもので、 M および m はそれぞれ車体および台車の重量、 K および k はそれぞれまくらばね および軸ばね、 F または f はまくらばね またはスナッパ (固体摩擦装置) に含まれる固体摩擦、 $a \cos(\omega t + \varphi)$ はレールのたわみなどから発生する周

期的変位に相当する。

本報告ではかかる振動系について理論的取扱いを行い、クーロン摩擦に特有な停滯振動および一体振動の発生する範囲、および停滯のない範囲について振動波形を解析したものである。

2. 運動方程式とその解

まず第1図(a)に示すときクーロン摩擦 F が存在する場合につき考察を進める。

運動方程式は

$$M\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) \pm F = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

$$m\ddot{x}_2 - K(x_1 - x_2) + kx_2 \mp F = ak \cos(\omega t + \varphi) \quad \cdots \cdots (2)$$

ただし $x_1 = x_2 - x_1$ とし複号はつぎのようにとる。

$\dot{x}_1 < 0$ の時負号

第 1 図

* 昭和 30 年 3 月 22 日 関西支部第 30 期定時総会、昭和 30 年 9 月 7 日 第 5 回応用力学連合講演会および昭和 31 年 3 月 20 日 関西支部第 31 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 33 年 3 月 24 日。

** 正員、京都大学工学部(京都市左京区吉田本町)。

*** 正員、大阪市立大学理工学部。

**** 正員、汽車製造会社。

(1) J.P. DenHartog, *Phil. Mag.*, 9, 59(1930), 801.

$\dot{x}_{r1} > 0$ の時正号

今つぎのごとくおくと

$$\frac{M+m}{Mm}K = n_1^2, \quad \frac{k}{m} = n_2^2, \quad \frac{K}{m} = n_3^2, \quad x_{r1} = x_{R1} + \frac{F}{K} \quad \dots\dots\dots (3)$$

(1), (2) 式は $\dot{x}_{r1} < 0$ に対してつぎのとおりになる.

$$\ddot{x}_{R1} + n_1^2 x_{R1} + n_2^2 x_2 = a n_2^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad \dots\dots (4)$$

$$\ddot{x}_2 + n_3^2 x_{R1} + n_2^2 x_2 = a n_2^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad \dots\dots (5)$$

上記運動方程式について強制変位と同一周期を有する定常解を得るためにつぎの条件を考える.

$$t=0 \text{ において } \left. \begin{array}{l} x_2 = x_{20}, \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_{20} \\ x_{r1} = x_{r1\max}, \quad \dot{x}_{r1} = 0 \end{array} \right\} \dots\dots (6)$$

$$t = \frac{\pi}{\omega} \text{ において } \left. \begin{array}{l} x_2 = -x_{20}, \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_{20} \\ x_{r1} = -x_{r1\max}, \quad \dot{x}_{r1} = 0 \end{array} \right\} \dots\dots (7)$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \text{ において } \dot{x}_{r1} \leq 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

上記の条件は M と m との間隔が $x_{r1\max}$ から

$$x_{R1} = E_1 n_2^2 \cos \alpha_+ t + E_2 n_2^2 \sin \alpha_+ t + E_3 n_2^2 \cos \alpha_- t + E_4 n_2^2 \sin \alpha_- t \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$x_2 = E_1 (\alpha_+^2 - n_1^2) \cos \alpha_+ t + E_2 (\alpha_+^2 - n_1^2) \sin \alpha_+ t + E_3 (\alpha_-^2 - n_1^2) \cos \alpha_- t + E_4 (\alpha_-^2 - n_1^2) \sin \alpha_- t \quad \dots\dots (16)$$

$$\text{ただし } \alpha_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \{ (n_1^2 + n_2^2) \pm \sqrt{(n_1^2 + n_2^2)^2 - 4(n_1^2 - n_3^2)n_2^2} \} \quad \dots\dots\dots (17)$$

E_1, E_2, E_3, E_4 は定数

結局 (4) および (5) 式の一般解として次式を得る.

$$x_{R1} = -a P_{r1} \cos(\omega t + \varphi) + E_1 n_2^2 \cos \alpha_+ t + E_2 n_2^2 \sin \alpha_+ t + E_3 n_2^2 \cos \alpha_- t + E_4 n_2^2 \sin \alpha_- t$$

したがって

$$x_{r1} = \frac{F}{K} - a P_{r1} \cos(\omega t + \varphi) + E_1 n_2^2 \cos \alpha_+ t + E_2 n_2^2 \sin \alpha_+ t + E_3 n_2^2 \cos \alpha_- t + E_4 n_2^2 \sin \alpha_- t \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$x_2 = a P_2 \cos(\omega t + \varphi) + E_1 (\alpha_+^2 - n_1^2) \cos \alpha_+ t + E_2 (\alpha_+^2 - n_1^2) \sin \alpha_+ t + E_3 (\alpha_-^2 - n_1^2) \cos \alpha_- t + E_4 (\alpha_-^2 - n_1^2) \sin \alpha_- t \quad \dots\dots\dots (19)$$

つぎに (6) 式の条件より

$$x_{20} = a P_2 \cos \varphi + E_1 (\alpha_+^2 - n_1^2) + E_3 (\alpha_-^2 - n_1^2) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\dot{x}_{20} = -a P_2 \omega \sin \varphi + E_2 \alpha_+ (\alpha_+^2 - n_1^2) + E_4 \alpha_- (\alpha_-^2 - n_1^2) \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$x_{r1\max} = \frac{F}{K} - a P_{r1} \cos \varphi + E_1 n_2^2 + E_3 n_2^2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$0 = a P_{r1} \omega \sin \varphi + E_2 \alpha_+ n_2^2 + E_4 \alpha_- n_2^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

(20)~(23) より E_1, E_2, E_3, E_4 を求めると

$$E_1 = \left\{ (x_{20} - a P_2 \cos \varphi) n_2^2 - \left(x_{r1\max} - \frac{F}{K} + a P_{r1} \cos \varphi \right) (\alpha_-^2 - n_1^2) \right\} / n_2^2 (\alpha_+^2 - \alpha_-^2) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$E_3 = \left\{ \left(x_{r1\max} - \frac{F}{K} + a P_{r1} \cos \varphi \right) (\alpha_+^2 - n_1^2) - (x_{20} - a P_2 \cos \varphi) n_2^2 \right\} / n_2^2 (\alpha_+^2 - \alpha_-^2) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$E_2 = \{ (\dot{x}_{20} + a P_2 \omega \sin \varphi) n_2^2 + a P_{r1} \omega \sin \varphi (\alpha_-^2 - n_1^2) \} / n_2^2 (\alpha_+^2 - \alpha_-^2) \alpha_+ \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$E_4 = \{ -a P_{r1} \omega \sin \varphi (\alpha_+^2 - n_1^2) - (\dot{x}_{20} + a P_2 \omega \sin \varphi) n_2^2 \} / n_2^2 (\alpha_+^2 - \alpha_-^2) \alpha_- \quad \dots\dots\dots (27)$$

つぎに (7) 式の条件より

$$\begin{aligned} -x_{20} = & -a P_2 \cos \varphi + E_1 (\alpha_+^2 - n_1^2) \cos \frac{\alpha_+}{\omega} \pi + E_2 (\alpha_+^2 - n_1^2) \sin \frac{\alpha_+}{\omega} \pi + E_3 (\alpha_-^2 - n_1^2) \cos \frac{\alpha_-}{\omega} \pi \\ & + E_4 (\alpha_-^2 - n_1^2) \sin \frac{\alpha_-}{\omega} \pi \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

$-x_{r1\max}$ へと接近する半サイクルにおける条件であるが, 逆に M と m が遠く半サイクルにおいても全く同一の条件を考えることができる.

(4) および (5) 式の一般解はその強制振動の解と自己振動の解を加えて得られる.

まず強制振動は

$$x_{R1} = -a P_{r1} \cos(\omega t + \varphi) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$x_2 = a P_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし

$$P_{r1} = \frac{n_2 \omega^2}{(n_1^2 - \omega^2)(n_2^2 - \omega^2) - n_2^2 n_3^2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$P_2 = \frac{n_2^2 (n_1^2 - n_3^2 - \omega^2)}{(n_1^2 - \omega^2)(n_2^2 - \omega^2) - n_2^2 n_3^2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

つぎに自己振動は

$$\ddot{x}_{R1} + n_1^2 x_{R1} + n_2^2 x_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\ddot{x}_2 + n_3^2 x_{R1} + n_2^2 x_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

の解として求められる. すなわち

$$\begin{aligned}
 -\dot{x}_{20} = & aP_2\omega \sin \varphi - E_1\alpha_+(\alpha_+^2 - n_1^2) \sin \frac{\alpha_+}{\omega} \pi + E_2\alpha_+(\alpha_+^2 - n_1^2) \cos \frac{\alpha_+}{\omega} \pi \\
 & - E_3\alpha_-(\alpha_-^2 - n_1^2) \sin \frac{\alpha_-}{\omega} \pi + E_4\alpha_-(\alpha_-^2 - n_1^2) \cos \frac{\alpha_-}{\omega} \pi \dots\dots\dots (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -x_{r1\max} = & \frac{F}{K} + aP_{r1} \cos \varphi + E_1n_2^2 \cos \frac{\alpha_+}{\omega} \pi + E_2n_2^2 \sin \frac{\alpha_+}{\omega} \pi + E_3n_2^2 \cos \frac{\alpha_-}{\omega} \pi \\
 & + E_4n_2^2 \sin \frac{\alpha_-}{\omega} \pi \dots\dots\dots (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & -aP_{r1}\omega \sin \varphi - E_1\alpha_+n_2^2 \sin \frac{\alpha_+}{\omega} \pi + E_2\alpha_+n_2^2 \cos \frac{\alpha_+}{\omega} \pi - E_3\alpha_-n_2^2 \sin \frac{\alpha_-}{\omega} \pi \\
 & + E_4\alpha_-n_2^2 \cos \frac{\alpha_-}{\omega} \pi \dots\dots\dots (31)
 \end{aligned}$$

(27), (29) および (31) 式より

$$E_4 = E_3 \sin \frac{\alpha_-}{\omega} \pi - E_4 \cos \frac{\alpha_-}{\omega} \pi \dots\dots\dots (32)$$

(26), (29) および (31) 式より

$$E_2 = E_1 \sin \frac{\alpha_+}{\omega} \pi - E_2 \cos \frac{\alpha_+}{\omega} \pi \dots\dots\dots (33)$$

(25), (28) および (30) 式より

$$-E_3 - 2 \frac{F}{K} \frac{(\alpha_+^2 - n_1^2)}{n_2^2(\alpha_+^2 - \alpha_-^2)} = E_3 \cos \frac{\alpha_-}{\omega} \pi + E_4 \sin \frac{\alpha_-}{\omega} \pi \dots\dots\dots (34)$$

(24), (28) および (30) 式より

$$-E_1 + 2 \frac{F}{K} \frac{(\alpha_-^2 - n_1^2)}{n_2^2(\alpha_+^2 - \alpha_-^2)} = E_1 \cos \frac{\alpha_+}{\omega} \pi + E_2 \sin \frac{\alpha_+}{\omega} \pi \dots\dots\dots (35)$$

(32), (33), (34), (35) 式より E_1, E_2, E_3, E_4 を求めると

$$E_1 = \frac{F}{K} \frac{1}{n_2^2} G_-, \quad E_2 = \frac{F}{K} \frac{1}{n_2^2} G_- U_+, \quad E_3 = \frac{-F}{K} \frac{1}{n_2^2} G_+, \quad E_4 = \frac{-F}{K} \frac{1}{n_2^2} G_+ U_- \dots\dots\dots (36)$$

$$\text{ただし } G_+ = \frac{\alpha_+^2 - n_1^2}{\alpha_+^2 - \alpha_-^2}, \quad G_- = \frac{\alpha_-^2 - n_1^2}{\alpha_+^2 - \alpha_-^2}, \quad U_+ = \frac{\sin \frac{\alpha_+}{\omega} \pi}{1 + \cos \frac{\alpha_+}{\omega} \pi}, \quad U_- = \frac{\sin \frac{\alpha_-}{\omega} \pi}{1 + \cos \frac{\alpha_-}{\omega} \pi}$$

つぎに位相角 φ を求める。(22) 式, (23) 式に (36) 式を代入すると

$$\sin \varphi = -\frac{F}{aKP_{r1}\omega} (\alpha_+ G_- U_+ - \alpha_- G_+ U_-) \dots\dots\dots (37)$$

$$\cos \varphi = -\frac{x_{r1\max}}{aP_{r1}} \dots\dots\dots (38)$$

(37) および (38) 式より φ を消去すると

$$x_{r1\max} = \sqrt{(aP_{r1})^2 - \left(\frac{F}{K}\right)^2 \left(\frac{\alpha_+}{\omega} G_- U_+ - \frac{\alpha_-}{\omega} G_+ U_-\right)^2} \dots\dots\dots (39)$$

以上の計算により x_1 および x_2 を求めることができた。

3. 解の存在する範囲

上記の解が存在するためには (39) 式の根号内が正でなければならぬ。すなわち,

$$F/aK \leq \left| P_{r1} / \left(\frac{\alpha_+}{\omega} G_- U_+ - \frac{\alpha_-}{\omega} G_+ U_- \right) \right| \dots\dots\dots (40)$$

さらに (8) 式の条件を満足しなければならない, (18) および (36) 式より

$$\dot{x}_{r1} = aP_{r1}\omega \sin (\omega t + \varphi) - \frac{F}{K} (\alpha_+ G_- \sin \alpha_+ t - \alpha_+ G_- U_+ \cos \alpha_+ t - \alpha_- G_+ \sin \alpha_- t + \alpha_- G_+ U_- \cos \alpha_- t)$$

上式に (37) および (38) 式を代入し (8) 式の条件と組合わせると

$$x_{r1\max}/\frac{F}{K} \geq \frac{1}{\sin \omega t} \left\{ \frac{\alpha_-}{\omega} G_+ \sin \alpha_- t - \frac{\alpha_+}{\omega} G_- \sin \alpha_+ t + \frac{\alpha_-}{\omega} G_+ U_- (\cos \omega t - \cos \alpha_- t) - \frac{\alpha_+}{\omega} G_- U_+ (\cos \omega t - \cos \alpha_+ t) \right\} \quad (41)$$

上式の左辺の $t=0$ における極限值は n_1^2/ω^2 , $t=\pi/\omega$ における極限值は $-n_1^2/\omega^2$ となり数値計算の結果, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$ における最大値は n_1^2/ω^2 であることがわかる. したがって (41) 式はつぎのごとく表わされる.

$$x_{r1\max}/\frac{F}{K} \leq n_1^2/\omega^2 \quad (42)$$

(39) 式を代入すると

$$\frac{F}{aK} \leq \frac{\left| P_{r1} / \left(\frac{\alpha_+}{\omega} G_- U_+ - \frac{\alpha_-}{\omega} G_+ U_- \right) \right|}{\sqrt{\left\{ \frac{n_1^2}{\omega^2} / \left(\frac{\alpha_+}{\omega} G_- U_+ - \frac{\alpha_-}{\omega} G_+ U_- \right) \right\}^2 + 1}} \quad (43)$$

第2図に (40) 式および (43) 式を図示する. (43) 式の範囲内では上記の解が成立するが, その範囲外では (8) 式の条件が成立せず停滯を伴った振動を行う. さもなければ M と m が一体となって振動する.

一体振動の限界は

$$F \geq |M\omega^2 x_n| \quad (44)$$

ただし x_n は一体振動の振幅, すなわち

$$x_n = \frac{a\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (45)$$

ただし ω_n は一体振動の固有振動数, すなわち

$$\omega_n^2 = \frac{k}{M+m} \quad (46)$$

(44), (45), (46) 式より

$$F/aK \geq \left| \frac{M}{K} \cdot \omega^2 \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \right| \quad (47)$$

第 2 図

(47) 式を第2図に示す.

第2図より各振動様式の発生範囲に関してつぎの事項が明らかとなった.

(1) $\omega = \alpha_-$, $\omega = \alpha_+$ においては (40) 式および (43) 式の極限值はいずれも

$$\left. \begin{aligned} F/aK &\leq \frac{\pi}{4} \frac{n_2^2}{\alpha_+^2 - n_1^2} \\ F/aK &\leq \frac{\pi}{4} \frac{n_2^2}{\alpha_-^2 - n_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

となり, その範囲内にて $x_{r1\max}$ が存在したその振幅は ∞ となる.

(2) $\omega = \frac{\alpha_+}{3}, \frac{\alpha_+}{5}, \dots, \frac{\alpha_-}{3}, \frac{\alpha_-}{5}, \dots$ においては F/aK の値のいかんにかかわらず停滯のない振動は発生しない.

(3) $\omega = \infty$ においては (47) 式は

$$F/aK \geq \frac{k/K}{1+m/M} \quad (49)$$

となり, この範囲では一体振動を行う. また (43) 式の $\omega = \infty$ における極限值は

$$F/aK \leq \frac{2}{\sqrt{2^2 + \pi^2}} \frac{n_2^2}{n_1^2} \quad (50)$$

となりこの範囲では停滯のない振動を行う.

4. クーロン摩擦 f を含む場合

第1図(b)に示すごとく振動変位が与えられる支持台と一つの質量との間に f なる摩擦が有る場合について計算を行う.

運動方程式は

$$M\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) = 0 \quad (51)$$

$$m\ddot{x}_2 - K(x_1 - x_2) + kx_2 \mp f = ak \cos(\omega t + \varphi) \quad (52)$$

ただし $x_{r2} = x_2 - a \cos(\omega t + \varphi)$ とし複号はつぎのようになる.

$\dot{x}_{r2} < 0$ の時負号

$\dot{x}_{r2} > 0$ の時正号

$\dot{x}_{r2} < 0$ の区間における (51) および (52) 式の一般解は2項における計算と同様にして

$$x_1 = \frac{f}{k} + aP_1 \cos(\omega t + \varphi) + E_1'(n_2^2 + n_3^2 - \alpha_+^2) \cos \alpha_+ t + E_2'(n_2^2 + n_3^2 - \alpha_+^2) \sin \alpha_+ t + E_3'(n_2^2 + n_3^2 - \alpha_-^2) \cos \alpha_- t + E_4'(n_2^2 + n_3^2 - \alpha_-^2) \sin \alpha_- t \quad (53)$$

$$x_{r2} = \frac{f}{k} + a(P_2 - 1) \cos(\omega t + \varphi) + E_1'n_3^2 \cos \alpha_+ t + E_2'n_3^2 \sin \alpha_+ t + E_3'n_3^2 \cos \alpha_- t + E_4'n_3^2 \sin \alpha_- t \quad (54)$$

$$\text{ただし } P_1 = \frac{n_2^2(n_1^2 - n_3^2)}{(n_1^2 - \omega^2)(n_2^2 - \omega^2) - n_2^2 n_3^2} \quad (55)$$

上記の解はつぎの条件を満足しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} t=0 \text{ において } x_1 &= x_{10}, & \dot{x}_1 &= \dot{x}_{10} \\ x_{r2} &= x_{r2\max}, & \dot{x}_{r2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} t = \frac{\pi}{\omega} \text{ において } x_1 &= -x_{10}, & \dot{x}_1 &= -\dot{x}_{10} \\ x_{r2} &= -x_{r2\max}, & \dot{x}_{r2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \text{ において } \dot{x}_{r2} \leq 0 \quad (58)$$

(53) および (54) 式を (56) および (57) の条件に代入して計算を行うと

$$\left. \begin{aligned} E_1' &= \frac{f}{k} \frac{G_-'}{n_3^2}, & E_2' &= \frac{f}{k} \frac{G_-'}{n_3^2} U_+ \\ E_3' &= -\frac{f}{k} \frac{G_+'}{n_3^2}, & E_4' &= -\frac{f}{k} \frac{G_+'}{n_3^2} U_- \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$\text{ただし } G_+' = \frac{\alpha_+^2 - n_2^2}{\alpha_+^2 - \alpha_-^2}, \quad G_-' = \frac{\alpha_-^2 - n_2^2}{\alpha_+^2 - \alpha_-^2}$$

$$\sin \varphi = \frac{f}{ak(P_2 - 1)\omega} (\alpha_+ G_-' U_+ - \alpha_- G_+' U_-) \quad (60)$$

$$\cos \varphi = \frac{x_{r2\max}}{a(P_2 - 1)} \quad (61)$$

$$x_{r2\max} = \sqrt{a^2(P_1 - 1)^2 - \left(\frac{f}{k}\right)^2 \left(\frac{\alpha_+}{\omega} G_-' U_+ - \frac{\alpha_-}{\omega} G_+' U_-\right)^2} \quad (62)$$

上記の解が存在するためには (62) 式の根号内が正でなければならぬ。すなわち、

$$f/ak \leq (P_1 - 1) / \left| \left(\frac{\alpha_+}{\omega} G_-' U_+ - \frac{\alpha_-}{\omega} G_+' U_- \right) \right| \quad (63)$$

さらに (58) 式の条件を満足しなければならない。2 項における計算と同様にしてつぎの式をうる。

$$f/ak \leq \frac{(P_1 - 1) / \left| \left(\frac{\alpha_+}{\omega} G_-' U_+ - \frac{\alpha_-}{\omega} G_+' U_- \right) \right|}{\sqrt{\left\{ \frac{n_2^2}{\omega^2} / \left(\frac{\alpha_+}{\omega} G_-' U_+ - \frac{\alpha_-}{\omega} G_+' U_- \right) \right\}^2 + 1}} \quad (64)$$

第 3 図に (63) 式および (64) 式を図示する。すなわち (64) 式の範囲で停滯のない振動を行う。(64) 式は

$$\omega = \alpha_- \text{ および } \omega = \alpha_+ \text{ においては } f/ak \leq \frac{\pi}{4} \quad (65)$$

$$\omega = \frac{\alpha_+}{3}, \frac{\alpha_+}{5}, \dots, \frac{\alpha_-}{3}, \frac{\alpha_-}{5} \dots \text{においては } f/ak \leq 0$$

$$\omega = \infty \text{ においては } f/ak \leq \infty$$

第 3 図

第 4 図

つぎに m と支持台が一体となって振動する限界は

$$f \geq |-ma\omega^2 - K(x_n' - a)| \quad \dots\dots\dots (66)$$

ただし

$$x_n' = \frac{a}{1 - (\omega/\omega_n')^2}, \quad \omega_n'^2 = \frac{K}{M} \quad \dots\dots\dots (67)$$

(66), (67) 式より

$$f/ak \geq \frac{1}{k} \left| m\omega^2 + \frac{K\omega^2}{\omega_n'^2 - \omega^2} \right| \quad \dots\dots\dots (68)$$

(68) 式を第3図に示す。

5. 実験結果および計算結果

実験に用いた装置の概要を第4図および第5図に示す。すなわち可変速モータにより減速プーリを経て偏心軸を回し連結棒により上下変位を発生せしめる。振り子は摩擦 F を有する場合と摩擦 f を有する場合と2種類あるが、いずれも2個の質量 M および m が2個のばね K および k によりつり下げられている。摩擦としてはりん青銅の平板を平滑にみがき互にしゅう動せしめて摩擦力を発生せしめる。摩擦力の調節はしゅう動板の接触圧力をばね力により加減して行った。実験を行った装置の諸数値はつぎのとおりである。

装置全体

振り子 (a) 振り子 (b)

第5図

摩擦 F の有る場合

$$M = 0.374 \times 10^{-3} \text{ kg/cm/s}^2$$

$$m = 0.324 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$K = 0.175 \text{ kg/cm}$$

$$k = 0.252 \text{ kg/cm}$$

$$F = 0.17, 0.1, 0.06 \text{ kg}$$

$$a = 0.9, 0.675, 0.475 \text{ cm}$$

摩擦 f の有る場合

$$M = 0.337 \times 10^{-3} \text{ kg/cm/s}^2$$

$$m = 0.306 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$K = 0.1065 \text{ kg/cm}$$

$$k = 0.118 \text{ kg/cm}$$

$$f = 0.005, 0.009 \text{ kg}$$

$$a = 1.0 \text{ cm}$$

第6図

第7図

第8図

上記の実験より得られた結果の一例を第 6 図および第 7 図に示す。すなわち振幅 x_1 および x_2 の最大値 $x_{1\max}$ および $x_{2\max}$ の実測値を●印により示す。また計算による値として一体振動の範囲と停滯のない範囲の振幅を実線で示す。実験値と計算値はよく一致しているのが認められる。同図に $F=0$ の場合および $F=\infty$ の場合を参考に示す。摩擦 F が存在することにより共振点の位置が変化することがわかる。この実験の場合について計算により得られた位相角を第 8 図に示す。

6. 結 論

以上述べた諸考察によりクーロン摩擦を有する 2 自由度系に関する強制振動について、停滯のない振動範囲における振幅および一体振動の範囲の振幅を解析

し、また一体振動および停滯振動の発生する摩擦力の限界を明らかにすることができた。またそれらは実験結果ともよく一致することを確認した。

その結果つぎのことが明らかになった。

- (1) 共振時摩擦力がある限度以下では振幅は無限大となるが、その限度以上の摩擦力では一体振動または停滯振動を行う。
- (2) 共振曲線の山の頂点（共振点）は摩擦力の量により変化する。
- (3) 固有振動数の奇数分の一においてはいかに小さい摩擦も停滯振動を発生せしめる。
- (4) 振動数の非常に高い範囲では摩擦 F の大きさにより無停滯振動または停滯振動または一体振動を行う。また摩擦 f が有る時はその量いかにかわらず無停滯振動を行う。

621.824-185.7:534.1

装荷段軸を有し弾性支持された機械系の固有振動特性*

木 内 石**

On the Vibration Characteristics of an Elastically Supported Mechanical System with a Non-Uniform Shaft having Masses on It

by Atsushi KIUCHI

This paper deals with problems of a vibration characteristics of an elastically supported mechanical system with a non-uniform shaft which has masses on it. The shaft is elastically connected with the system. The result dealt with here includes very many special cases.

1. 緒 言

筆者は前に弾性支持された有軸機械系の種々なる場合の固有振動特性に関して報告⁽¹⁾⁽²⁾を行ったのであるが、その報告においてはすべて軸が一樣断面を有する場合についてであった。しかし実際問題においては軸は断面の異なる段付軸で、かつ軸上に装荷を有するとみなされる場合がある(第 1 図参照)。本報告はこのような一般的な場合の振動特性を論究したものである。軸はわく組に弾性支持されているが、これは軸受部等の弾性を考慮したものである。装荷としては一般的に軸に対しそれと直角方向の運動に対する慣性 m_i と、回転運動に対する回転慣性能率 J_i とを有するものと

第 1 図

第 2 図

* 昭和 32 年 10 月 14 日 創立 60 周年記念東京講演会において講演。原稿受付 昭和 33 年 4 月 7 日。

** 正員、静岡大学工学部(静岡県浜松市追分町)。