不安定化の傾向が現われて来る。このことは実際の経験と矛盾するように見えるが、結局上述の仮定にその原因があると思われる。現在人間の伝達関数についての実験研究を進めているが、これがわかればさらに良い自動車の操縦安定性についての解析ができると思う。

終りにこの研究を進めるに当って有益な助言および援助を与えられた中央大学 野本明教授、東大生産技術

研究所 平尾収教授、および東京機器工業会社 久田丈夫氏に厚く謝意を表する。なお本研究は文部省科学試験研究費の補助を受けて行われたものである。

文 献

- (1) 近藤, 自動車技術, 7 (昭 28).
- (2) W. E. McCarthy, & W. A. Van Wicklin, *Control Engineering*, 4 (1957-2).
- (3) 久田, 自動制御, 5, 3 (昭 33).
- (4) 菊地, 自動制御, 3, 3 (昭 31).

621.181.632-52:621.565.94-52

多 管 路 熱 交 換 器 の 自 動 制 御

(第2報, 3 管路以上の場合の動特性)*

増 淵 正 美**

Control of Multi-Pass Heat Exchangers

(Part 2, Dynamic Characteristics of Multi-Pass Heat Exchangers)

by Masami MASUBUCHI

Heat exchangers having three, four and more number of tube-passes in one shell-pass, are analysed exactly. These heat exchangers contain complicated counter and parallel-flow heat exchange processes. The author analysed them in dimensionless forms following the same procedures as before, and obtained frequency response formulas.

The results are extended to infinite number of tube-passes, and their static and dynamic characteristics in equal flow conditions are compared by numerical examples.

1. は し が き

多管路熱交換器については温度分布など静特性に関して詳細な体系的研究⁽¹⁾がなされているが、更に動特性を求めるため、筆者は前報⁽²⁾に引続き一つのシェル内に3個以上の管路を含み、向流と並流の熱交換作用が複雑に行われる場合について解析を行った。解析は管路が3個、4個の場合について厳密に行い基礎式を誘導して伝達関数を求めたが、更に管路が $2n$ 個および $2n+1$ 個の場合にも言及し、最後に管路数が無限に増加した場合をも検討した。

2. 記 号

大半の記号は前報と同一(第1報の2を参照)であるから省略するが、管路数がふえるため便宜上添字を

次のように多少変更することにした。

添字; 前には1, 2を管側, 3をシェル側としてあったものを, 1, 2, 3, ..., $2n$ (あるいは $2n+1$)を管側とし, シェル側には添字をつけないことにした。

なお, 以下の研究では次のような仮定を行ってある。

- i) 流速, 熱伝達率など諸定数は一定, かつ均等である。
- ii) 管長に直角方向の各断面内では混合は完全に行われ各温度は均一とする。
- iii) 断面は一様である。
- iv) 外部への熱損失はない。

また, 伝達関数は一流体の入口温度に対する他流体の出口温度と定義する。

3. 3 管 路 の 場 合

3.1 P-C-P 型 シェル流体は左方から流入する。

* 昭和 33 年 1 月 27 日 第 645 回講演会において講演, 原稿受付 昭和 33 年 4 月 30 日。

** 正員, 横浜国立大学工学部 (横浜市区南区大岡町)。

ものとする。管路を流れる流体の入口側からみて、並流-向流-並流の順に、並流熱交換が 2 回、向流熱交換が 1 回行われる場合である。これを P-C-P 型と略記することにする。この場合の無次元化した基礎式は次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_1}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_1) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_2}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_2) \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_3}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_3) \\ r \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial l} &= a(\theta_1 - \theta) + a(\theta_2 - \theta) + a(\theta_3 - \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

入力温度を正弦波状 (e^{st}) に変化させたとき各温度も正弦波状に変化していることを念頭におき上式を解くと

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= (A_1 e^{p_1 l} + A_2 e^{p_2 l} + A_3 e^{p_3 l} + A_4 e^{p_4 l}) e^{st} \\ \theta_2 &= (B_1 e^{p_1 l} + B_2 e^{p_2 l} + B_3 e^{p_3 l} + B_4 e^{p_4 l}) e^{st} \\ \theta_3 &= (C_1 e^{p_1 l} + C_2 e^{p_2 l} + C_3 e^{p_3 l} + C_4 e^{p_4 l}) e^{st} \\ \theta &= (D_1 e^{p_1 l} + D_2 e^{p_2 l} + D_3 e^{p_3 l} + D_4 e^{p_4 l}) e^{st} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 A_i, B_i, C_i, D_i ($i=1\sim 4$) は積分定数、 p_1, p_2, p_3 は次式の根 (3 根ともに複素根)

$$p^3 + p^2(3a + rs) - p\{(a_1 + s)^2 + aa_1\} - s(a_1 + s)\{r(a_1 + s) + 3a\} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

p_4 は

$$p_4 = -(a_1 + s) \dots\dots\dots (4)$$

である。

(2) 式を (1) 式に代入して整理すると

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= (\beta_1 D_1 e^{p_1 l} + \beta_2 D_2 e^{p_2 l} + \beta_3 D_3 e^{p_3 l} + A_4 e^{p_4 l}) e^{st} \\ \theta_2 &= (\alpha_1 D_1 e^{p_1 l} + \alpha_2 D_2 e^{p_2 l} + \alpha_3 D_3 e^{p_3 l}) e^{st} \\ \theta_3 &= (\beta_1 D_1 e^{p_1 l} + \beta_2 D_2 e^{p_2 l} + \beta_3 D_3 e^{p_3 l} - A_4 e^{p_4 l}) e^{st} \\ \theta &= (D_1 e^{p_1 l} + D_2 e^{p_2 l} + D_3 e^{p_3 l}) e^{st} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_1}{-p_1 + s + a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{a_1}{-p_2 + s + a_1}, \quad \alpha_3 = \frac{a_1}{-p_3 + s + a_1} \\ \beta_1 &= \frac{a_1}{p_1 + s + a_1}, \quad \beta_2 = \frac{a_1}{p_2 + s + a_1}, \quad \beta_3 = \frac{a_1}{p_3 + s + a_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

a) シェル側が入力の場合 第 1 管路入口温度変化を 0 とし、シェル入口に正弦波状温度変化を加えたときの第 3 管路の出口温度変化に着目した場合で伝達関数は

第 2 図

$$G_{pepl}(s) = \frac{\theta_{30}}{\theta_i} \text{ で表わす。}$$

第 2 図で境界条件、 $l=0$ で $\theta_{1i}=0$

$$\theta_2 = \theta_3$$

$$l=1 \text{ で } \theta_1 = \theta_2$$

を与えて積分定数を決定すると

$$D_1 = [e^{p_2}(\alpha_2 - \beta_2)(2\beta_3 - \alpha_3) + e^{p_3}(\alpha_3 - \beta_3)(\alpha_2 - 2\beta_2) + e^{p_4}(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)]/\Delta_3$$

$$D_2 = [e^{p_1}(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_3 - 2\beta_3) + e^{p_3}(\alpha_3 - \beta_3)(2\beta_1 - \alpha_1) + e^{p_4}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)]/\Delta_3$$

$$D_3 = [e^{p_1}(\alpha_1 - \beta_1)(2\beta_2 - \alpha_2) + e^{p_2}(\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_1 - 2\beta_1) + e^{p_4}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)]/\Delta_3$$

$$A_4 = [e^{p_1}(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + e^{p_2}(\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + e^{p_3}(\alpha_3 - \beta_3)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)]/\Delta_3$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= e^{p_1}(\alpha_1 - \beta_1)[2(\beta_2 - \beta_3) - (\alpha_2 - \alpha_3)] + e^{p_2}(\alpha_2 - \beta_2)[2(\beta_3 - \beta_1) - (\alpha_3 - \alpha_1)] \\ &\quad + e^{p_3}(\alpha_3 - \beta_3)[2(\beta_1 - \beta_2) - (\alpha_1 - \alpha_2)] + e^{p_4}[\alpha_1(\beta_2 - \beta_3) + \alpha_2(\beta_3 - \beta_1) + \alpha_3(\beta_1 - \beta_2)] \end{aligned}$$

よって伝達関数

$$G_{\text{pcp1}}(s) = [(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)(2\beta_3 - \alpha_3)(e^{p_1+p_2} - e^{p_3+p_4}) + (\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)(2\beta_1 - \alpha_1)(e^{p_2+p_3} - e^{p_4+p_1}) + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)(2\beta_2 - \alpha_2)(e^{p_3+p_1} - e^{p_2+p_4})] / \Delta_3 \quad (7)$$

を求めることができる。

b) 管側が入力の場合 第2図の入力と出力を入れ換えた場合で第3図のようになる。

第3図

境界条件,

$$l=0 \text{ で } \theta_2 = \theta_3, \quad \theta_i = 0$$

$$l=1 \text{ で } \theta_1 = \theta_2$$

を与え, 入力 θ_{1i} に対する出力 θ_0 を求めると a) と同様の手法を繰返すことによって伝達関数

$$G_{\text{pcp2}}(s) = [\{\alpha_1 - \beta_1 - (\alpha_2 - \beta_2)\}(e^{p_1+p_2} - e^{p_3+p_4}) + \{\alpha_2 - \beta_2 - (\alpha_3 - \beta_3)\}(e^{p_2+p_3} - e^{p_1+p_4}) + \{\alpha_3 - \beta_3 - (\alpha_1 - \beta_1)\}(e^{p_3+p_1} - e^{p_2+p_4})] / \Delta_3 \quad (8)$$

を得る。

3.2 C-P-C 型 管路の入口側から考えて C-P-C の順に熱交換が行われる場合で向流熱交換が2回, 並流熱交換が1回行われる。

基礎式は

第4図 C-P-C 型

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_1}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_1) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_2}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_2) \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_3}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_3) \\ r \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial l} &= a(\theta_1 - \theta) + a(\theta_2 - \theta) + a(\theta_3 - \theta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

前と同一手法で上式を解くと

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= (\alpha_1 D_1 e^{p_1 l} + \alpha_2 D_2 e^{p_2 l} + \alpha_3 D_3 e^{p_3 l} + A_4 e^{p_4 l}) e^{s\tau} \\ \theta_2 &= (\beta_1 D_1 e^{p_1 l} + \beta_2 D_2 e^{p_2 l} + \beta_3 D_3 e^{p_3 l}) e^{s\tau} \\ \theta_3 &= (\alpha_1 D_1 e^{p_1 l} + \alpha_2 D_2 e^{p_2 l} + \alpha_3 D_3 e^{p_3 l} - A_4 e^{p_4 l}) e^{s\tau} \\ \theta &= (D_1 e^{p_1 l} + D_2 e^{p_2 l} + D_3 e^{p_3 l}) e^{s\tau} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし, $D_i (i=1 \sim 4)$, A_4 は積分定数, $\alpha_i, \beta_i (i=1, 2, 3)$ は(6)と同一. p_1, p_2, p_3 は次式の3根(3根ともに複素根)である。

$$p^3 + p^2(3a + rs) - p\{(a_1 + s)^2 - aa_1\} - s(a_1 + s)\{r(a_1 + s) + 3a\} = 0 \quad (11)$$

$$p_4 \text{ は } p_4 = a_1 + s \quad (12)$$

である。

第5図

a) シェル側が入力の場合 境界条件,

$$l=0 \text{ で } \theta_1 = \theta_2$$

$$l=1 \text{ で } \theta_{1i} = 0, \quad \theta_2 = \theta_3$$

を与え同様に伝達関数が求められる。

$$G_{\text{pcp1}}(s) = [(2\alpha_3 - \beta_3)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(e^{p_1+p_2} - e^{p_3+p_4}) + (2\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)(e^{p_2+p_3} - e^{p_4+p_1}) + (2\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)(e^{p_3+p_1} - e^{p_2+p_4})] / \Delta_3' \quad (13)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Delta_3' = & e^{p_1+p_2}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)+e^{p_2+p_3}(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)+e^{p_3+p_1}(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3) \\ & +e^{p_4}[e^{p_1}(2\alpha_1-\beta_1)(\alpha_3-\beta_3-\alpha_2+\beta_2)+e^{p_2}(2\alpha_2-\beta_2)(\alpha_1-\beta_1-\alpha_3+\beta_3) \\ & +e^{p_3}(2\alpha_3-\beta_3)(\alpha_2-\beta_2-\alpha_1+\beta_1)] \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

第 6 図

b) 管側が入力の場合 境界条件は

$$l=0 \text{ で } \theta_1=\theta_2, \quad \theta_i=0$$

$$l=1 \text{ で } \theta_2=\theta_3$$

伝達関数は

$$\begin{aligned} G_{\text{cpel}}(s) = & [\{\alpha_1-\beta_1-(\alpha_2-\beta_2)\}(e^{p_1+p_2}-e^{p_3+p_4}) \\ & +\{\alpha_2-\beta_2-(\alpha_3-\beta_3)\}(e^{p_2+p_3}-e^{p_4+p_1}) \\ & +\{\alpha_3-\beta_3-(\alpha_1-\beta_1)\}(e^{p_3+p_1}-e^{p_2+p_4})]/\Delta_3' \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

4. 4 管路の場合

4.1 P-C-P-C 型

基礎式は

第 7 図 P-C-P-C 型

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_1}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_1) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_2}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_2) \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_3}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_3) \\ \frac{\partial \theta_4}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_4}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_4) \\ r \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial l} &= a(\theta_1 - \theta) + a(\theta_2 - \theta) + a(\theta_3 - \theta) + a(\theta_4 - \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

前と同様の手法で解くと

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= (\beta_1 E_1 e^{p_1 l} + \beta_2 E_2 e^{p_2 l} + \beta_3 E_3 e^{p_3 l} + A_5 e^{p_5 l}) e^{s\tau} \\ \theta_2 &= (\alpha_1 E_1 e^{p_1 l} + \alpha_2 E_2 e^{p_2 l} + \alpha_3 E_3 e^{p_3 l} + B_4 e^{p_4 l}) e^{s\tau} \\ \theta_3 &= (\beta_1 E_1 e^{p_1 l} + \beta_2 E_2 e^{p_2 l} + \beta_3 E_3 e^{p_3 l} - A_5 e^{p_5 l}) e^{s\tau} \\ \theta_4 &= (\alpha_1 E_1 e^{p_1 l} + \alpha_2 E_2 e^{p_2 l} + \alpha_3 E_3 e^{p_3 l} - B_4 e^{p_4 l}) e^{s\tau} \\ \theta &= (E_1 e^{p_1 l} + E_2 e^{p_2 l} + E_3 e^{p_3 l}) e^{s\tau} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ただし, α_i, β_i ($i=1, 2, 3$) は (6) 式と同一. E_i ($i=1, 2, 3$), B_4, A_5 は積分定数, また, p_1, p_2, p_3 は $p^3 + p^2(4a + rs) - p(a_1 + s)^2 - s(a_1 + s)\{r(a_1 + s) + 4a\} = 0 \dots\dots\dots (18)$

の三つの複素根,

$$p_4 = a_1 + s, \quad p_5 = -(a_1 + s) \dots\dots\dots (19)$$

第 8 図

a) シェル側が入力の場合 境界条件,

$$l=0 \text{ で } \theta_{1i}=0, \quad \theta_2=\theta_3$$

$$l=1 \text{ で } \theta_1=\theta_2, \quad \theta_3=\theta_4$$

を与えて積分定数を決定し伝達関数を求めると

$$\begin{aligned} G_{\text{pepel}}(s) = & 2(e^{p_4} + e^{p_5})[(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e^{p_1} + (\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e^{p_2} \\ & + (\alpha_3 - \beta_3)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e^{p_3}]/\Delta_4 \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Delta_4 = & e^{p_4} [(\alpha_1 - \beta_1) \{ \alpha_2 - \alpha_3 - 2(\beta_2 - \beta_3) \} e^{p_1} + (\alpha_2 - \beta_2) \{ \alpha_3 - \alpha_1 - 2(\beta_3 - \beta_1) \} e^{p_2} \\ & + (\alpha_3 - \beta_3) \{ \alpha_1 - \alpha_2 - 2(\beta_1 - \beta_2) \} e^{p_3}] + e^{p_5} [(\alpha_1 - \beta_1) (\beta_3 - \beta_2) e^{p_1} \\ & + (\alpha_2 - \beta_2) (\beta_1 - \beta_3) e^{p_2} + (\alpha_3 - \beta_3) (\beta_2 - \beta_1) e^{p_3}] \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

第 9 図

4.2 C-P-C-P 型

第10図 C-P-C-P 型

b) 管路側が入力の場合 同様に

$$\begin{aligned} G_{\text{pcpc2}}(s) = & (e^{p_4} + e^{p_5}) [\{ \alpha_2 - \beta_2 - (\alpha_1 - \beta_1) \} e^{p_1 + p_2} \\ & + \{ \alpha_3 - \beta_3 - (\alpha_2 - \beta_2) \} e^{p_2 + p_3} \\ & + \{ \alpha_1 - \beta_1 - (\alpha_3 - \beta_3) \} e^{p_3 + p_1}] / \Delta_4 \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

基礎式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_1}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_1) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_2}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_2) \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_3}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_3) \\ \frac{\partial \theta_4}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_4}{\partial l} &= a_1(\theta - \theta_4) \\ r \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial l} &= a(\theta_1 - \theta) + a(\theta_2 - \theta) + a(\theta_3 - \theta) + a(\theta_4 - \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

前と同様に上式を解くと

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= (\alpha_1 E_1 e^{p_1 l} + \alpha_2 E_2 e^{p_2 l} + \alpha_3 E_3 e^{p_3 l} + A_4 e^{p_4 l}) e^{s\tau} \\ \theta_2 &= (\beta_1 E_1 e^{p_1 l} + \beta_2 E_2 e^{p_2 l} + \beta_3 E_3 e^{p_3 l} + B_5 e^{p_5 l}) e^{s\tau} \\ \theta_3 &= (\alpha_1 E_1 e^{p_1 l} + \alpha_2 E_2 e^{p_2 l} + \alpha_3 E_3 e^{p_3 l} - A_4 e^{p_4 l}) e^{s\tau} \\ \theta_4 &= (\beta_1 E_1 e^{p_1 l} + \beta_2 E_2 e^{p_2 l} + \beta_3 E_3 e^{p_3 l} - B_5 e^{p_5 l}) e^{s\tau} \\ \theta &= (E_1 e^{p_1 l} + E_2 e^{p_2 l} + E_3 e^{p_3 l}) e^{s\tau} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ただし, α_i, β_i ($i=1, 2, 3$) は (6) 式と同一. E_i ($i=1, 2, 3$), A_4, B_5 は積分定数, また p_1, p_2, p_3 は (18) 式の三つの複素根, p_4, p_5 は (19) 式と同一. したがって前と同様に境界条件を与えると積分定数が決まり伝達関数を求めることができる.

第 11 図

a) シェル側が入力の場合 伝達関数は

$$\begin{aligned} G_{\text{cpcp1}}(s) = & 2(e^{p_4} + e^{p_5}) [(\alpha_3 - \beta_3) (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e^{p_1 + p_2} \\ & + (\alpha_1 - \beta_1) (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) e^{p_2 + p_3} \\ & + (\alpha_2 - \beta_2) (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) e^{p_3 + p_1}] / \Delta_4' \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

第 12 図

b) 管路側が入力の場合 伝達関数は

$$\begin{aligned} G_{\text{cpcp2}}(s) = & (e^{p_4} + e^{p_5}) [\{ \alpha_3 - \beta_3 - (\alpha_2 - \beta_2) \} e^{p_1} \\ & + \{ \alpha_1 - \beta_1 - (\alpha_3 - \beta_3) \} e^{p_2} \\ & + \{ \alpha_2 - \beta_2 - (\alpha_1 - \beta_1) \} e^{p_3}] / \Delta_4' \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Delta_4' = & e^{p_4} [\{ (\alpha_3 - \beta_3) - (\alpha_2 - \beta_2) \} (2\alpha_1 - \beta_1) e^{p_1} + \{ (\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_3 - \beta_3) \} (2\alpha_2 - \beta_2) e^{p_2} \\ & + \{ (\alpha_2 - \beta_2) - (\alpha_1 - \beta_1) \} (2\alpha_3 - \beta_3) e^{p_3}] + e^{p_5} [\alpha_1 \{ (\alpha_3 - \beta_3) - (\alpha_2 - \beta_2) \} e^{p_1} \\ & + \alpha_2 \{ (\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_3 - \beta_3) \} e^{p_2} + \alpha_3 \{ (\alpha_2 - \beta_2) - (\alpha_1 - \beta_1) \} e^{p_3}] \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

5. 4 管路以上の場合

まず, 以上の結果をしらべてみると管路数が奇数個の3管路の時には, p_1, p_2, p_3 を求めるには P-C-P かあるいは C-P-C かに応じて別々の複素係数三次方程式(3), あるいは(11)を解かねばならないし, p_4 の値も異なってくる.

管路数が偶数個の4管路では P-C-P-C でも C-P-C-P でも p_1, p_2, p_3 はただ一つの複素係数三次方程式(18)を解いて求めればよい(このことは前報の2管路の場合でもいえることである). また, p_4, p_5 はそれぞれ P-C-P, C-P-C の時の p_4 に等しいことがわかる. したがって管路数が奇数個の方が複雑になる.

以上の推論に従えば管路数が更に 5, 6, 7, ……と増加して行った場合でも同一の手法を組織的に適用することができよう.

まず, 奇数個管路の方から考えると一般に $(2n+1)$ 管路では P-C-P-… で並流 P が一つ多い場合には(3)に相当する式は

$$p^3 + p^2 \{(2n+1)a + rs\} - p \{(a_1 + s)^2 + aa_1\} - s(s+a_1) \{r(a_1+s) + (2n+1)a\} = 0 \dots\dots(28)$$

C-P-C-… で向流 C が一つ多い場合には(11)に相当する式は

$$p^3 + p^2 \{(2n+1)a + rs\} - p \{(a_1 + s)^2 - aa_1\} - s(s+a_1) \{r(a_1+s) + (2n+1)a\} = 0 \dots\dots(29)$$

また, p_4, p_5 に相当する根はそれぞれ n 重根, $(n-1)$ 重根, あるいはその逆になる.

次に偶数管路の場合で一般に $2n$ 管路とすると P-C-P-C-… でも C-P-C-P-… でも(18)式に相当する式はともに

$$p^3 + p^2 \{2na + rs\} - p(a_1 + s)^2 - s(s+a_1) \{r(s+a_1) + 2na\} = 0 \dots\dots(30)$$

でよく, p_4, p_5 に相当する根はともに(19)で表わされる根の $(n-1)$ 重根になる.

なお, これらの複素係数三次方程式は前報中の8で述べた方法によって近似根を求めることができる.

したがって管路が更に増加しても以上の手法を用いて伝達関数を求めることができる.

また, 管路長が各管路で異なった場合でも, その境界条件を与えればよいから上記の手法を適用することができる. しかし, 管路数の多い場合は一般にきわめて複雑になるので次に $n \rightarrow \infty$ の極限の場合を検討してみよう.

6. 管路数が無限個の場合

管路数が無限に増加した場合には1管路内の温度こ

第 13 図 (a)

第 13 図 (b)

う配は無いと考えてよい. したがって第13図のように両流体混合の直交流型と考えることができる. この静特性は既に求められているが⁽³⁾更に動特性を表わす基礎式を求めると

$$\left. \begin{aligned} k dy \int_0^x (\theta_1 - \theta_2) dx &= -(w_1 dy) \frac{d\theta_1}{dt} \\ k dx \int_0^y (\theta_1 - \theta_2) dy &= (w_2 dx) \frac{d\theta_2}{dt} \end{aligned} \right\} \dots\dots(31)$$

ただし, θ_1 は y のみの関数, θ_2 は x のみの関数.

(31)を整理して無次元化すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_1}{\partial l_1} &= a_1 \left(\int_0^1 \theta_2 dl_2 - \theta_1 \right) \\ r \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_2}{\partial l_2} &= a_2 \left(\int_0^1 \theta_1 dl_1 - \theta_2 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(32)$$

ただし,

$$a_1 = kXY/(w_1 v_1), \quad a_2 = kXY/(w_2 v_2)$$

$$Y/v_1 = L_1, \quad t/L_1 = \tau, \quad y/Y = l_1, \quad x/X = l_2$$

をうる. この式より伝達関数を求めると

$$G_{n=\infty}(s) = a_2 \left/ \left[\frac{s(rs + ra_1 + a_2)}{(1 - e^{-(s+a_1)})(1 - e^{-(rs+a_2)})} + \frac{a_1 a_2}{(rs + a_2)(1 - e^{-(s+a_1)})} + \frac{a_1 a_2}{(s + a_1)(1 - e^{-(rs+a_2)})} - \frac{a_1 a_2}{(s + a_1)(rs + a_2)} \right] \right. \dots\dots(33)$$

$s=0$ の時は次の静特性をうる⁽⁴⁾.

第 14 図 静特性の比較

$$G_{n=\infty}(0) = \frac{a_2}{\frac{a_1}{1-e^{-a_1}} + \frac{a_2}{1-e^{-a_2}} - 1} \quad \dots\dots(34)$$

ただし、管路が無数個の場合は第2流体のむだ時間が無限大になるので(33)はこのままでは ω の有限の値に対しては適用することが難しい。したがって $\omega \rightarrow 0$ の場合のゲインの比較のみに(34)式を使うことにしよう。

7. 数値計算例一周波数特性の比較

以上の伝達関数は一般式であり、非常に複雑な形をしているためそのままでは比較することはきわめて困難である。そこで一例として前報と同一の熱交換状態、すなわち $r=1$ 、(シェルの a)=(管路全体の a)=2のものについて数値計算によって比較してみた。

a) 静特性(第14図参照) 集中系と考えた場合、向流、並流、2管路、3管路、4管路および(34)式による管路無限個の極限などを示す。これによると

- i) 集中系 M を例外とすれば管路数が2以上の場合はすべて C と P の中間にはいる。
- ii) 管路数が偶数、すなわち C と P の数が等しい場合は管路数の増大に伴い次第にゲインが低下し管路数無限大の極限に接近する。 C と P の作用が平均化すると考えられる。
- iii) 管路数が奇数の場合はゲインが上下から管路数無限大の極限に接近する。この場合、 C の数の多い時は(向流に近い特性)ゲインの低下する方向から、また、 P の多い時は(並流に近い特性)ゲインの上昇する方向から接近する。
- iv) 静特性は流体の入口、出口の相対関係には無関係である。動特性との著しい差異の一つ。
- v) 以上の静特性は各伝達関数において $\omega \rightarrow 0$ として求めたものであるが、過去の静特性に関する諸研究^{(1),(4)}によって求められた値と一致すること

第 15 図 3, 4 管路の場合の周波数特性

が認められる。

b) 周波数特性 複雑になるので3管路、4管路の場合でシェル側を入力とした場合のみを示すことにする(第1報第12図の向流、並流、2管路の特性を参照のこと)。第15図参照。

これによってわかることは

- i) 管路数が増加すると位相おくれが次第に増す。
- ii) ゲインは $\omega \rightarrow 0$ の時は静特性のところで示すようになるが、 ω の大きいところで更に大きな変化を示す。
- iii) シェル側が入力の時で考えると特定は出口側管路の性質によって支配されるようである。すなわち図のように $\omega < 1$ くらいの範囲では出口側管路が C の時の方が位相おくれが少いことがわかる。
- iv) 位相もゲインも $\omega > 1.5$ くらいから振動的になるがこれは管路とシェルの相互干渉によるものと思われる。この傾向はゲインの方が著しい。
- v) 結局、低い周波数領域では各管路での差が流れてゆくうちに平均化されて出口側管路の性質によって示される特性が出るが、次第に周波数が高くなると平均され難くなってシェルの複雑な相互干渉の結果が出るものと推定される。

8. 結 言

以上の研究にあたり種々御指導をいただいた東京大学 高橋安人教授、また有益な御指摘をいただいた横浜国立大学 野手悌士教授に厚く御礼申上げる。また周波数特性の計算に御助力して下さった横浜国立大学工学部学生 野口隆君に深謝する。

文 献

- (1) 野手, 機械学会論文集, 6, 22 (昭 15-2), II-19,
- (2) 増淵, 機械学会論文集, 24, 139 (昭 33), 209.
- (3) D. M. Smith, *Engg.*, 138 (1934-11-2), 479.
- (4) F. Bošnjaković, M. Viličić u. B. Slipčević, *VDI-Forschungsheft* 432, Ausgabe b, 17 (1951).