接着型円柱状防振ゴムのばね定数および応力分布*

榎木 義一**, 得丸 英勝**, 藤原 恒昭***

On the Stress Distribution and the Spring Constant of Cylindrical Rubber Stock with the Ends Cemented to Metals

by Yoshikazu SAWARAGI, Hidekatsu TOKUMARU, and Tsuneaki FUJIWARA

In this paper, the tension or compression problem of cylindrical rubber stock of finite length with ends cemented to metal plates is treated theoretically under the following assumptions: (i) the deformation is infinitesimal, (ii) Poisson number m of rubber is 2. We found stress and displacement by using the Michell's function, and we performed numerical calculations with some shapes of stock. Further, we numerically found the relation between the apparent modulus of elasticity and the shape factor $r_0/4z_0$, where $2r_0$ is the diameter and $2z_0$ is the height of stock.

は し が き

両端が金属に接着されている円柱状防振ゴムが引張り・圧縮をうけるときのばね定数および応力分布を計算した。一般に防振ゴムが使用されるときその変位は相当大きな値をとるが、ここでは微小変位の場合を取扱った。したがって、問題は弾性基礎方程式の境界値問題に帰着する。さて、従来からこのような問題は数多く解かれているが、これらは主として金属を対象として解かれているため、ゴムの場合にその結果をそのまま利用することはできない⁽¹⁾。すなわち、金属の場合は境界において応力が与えられていることが多いのに対し、ゴムの場合は変位が与えられていることが多いのである。金属の場合とゴムの場合との相異なる第2の点はゴムのポアソン数がほとんど2に等しいことである。このことは Ritz の方法や Galerkin の方法によって近似解を求めることを困難ならしめるようである。そこで本報告では、Michell の応力関数⁽²⁾を用いる方法によって解析することにする。

1. 境界条件と Michell の関数

第1図に示すように円柱座標をとる。 r, z 方向の

変位をそれぞれ u, w , 応力成分を $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{zr}$ とするとき、境界条件は

- (i) $z = \pm z_0$
において $u = 0$
- (ii) $z = \pm z_0$
において $w = \pm w_0$
- (iii) $r = r_0$
において $\sigma_r = 0$
- (iv) $r = r_0$
において $\tau_{zr} = 0$

である。第1図からわかるように、 $z = \pm z_0$ は接着端であり、 $r = r_0$ は防振ゴムの側面である。上記の境界条件からわかるように、この問題は軸対称問題である。

第 1 図

さて Michell によれば、変位・応力成分は

$$\Delta'' \Delta'' \Phi = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Delta'' = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

によって与えられる関数 Φ によって次式のごとくあらわされる。

* 昭和 32 年 10 月 18 日 創立 60 周年記念地方第 3 区 (名古屋) 講演会において講演, 原稿受付 昭和 33 年 4 月 28 日。

** 正員, 京都大学工学部 (京都市左京区吉田本町)。

*** 京都大学大学院学生。

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, & w &= \Delta'' \Phi + \frac{m}{m-2} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\}, \\ \sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Delta'' \Phi - m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right\}, & \sigma_\varphi &= \frac{2G}{m-2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Delta'' \Phi - \frac{m}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\}, \\ \sigma_z &= \frac{2(2m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Delta'' \Phi - \frac{m}{2m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\}, \\ \tau_{zr} &= \frac{2(m-1)}{m-2} G \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \Delta'' \Phi - \frac{m}{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで m , G はそれぞれポアソン数, せん断弾性係数である.

さて, $z=0$ なる平面に関する対称性 (u は z に関して偶関数, w は z に関して奇関数である) を考慮して, (1) を満足する関数として

$$\begin{aligned} \Phi &= (m-2) \left[A_0 \frac{z^3}{6} + B_0 \left\{ \left(\frac{1}{3} \frac{z^2}{z_0^2} - 1 \right) \frac{zr^2}{2} - \frac{1}{15} \frac{z^5}{z_0^2} \right\} \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^3} \{ A_n I_0(k_n r) + B_n k_n r I_1(k_n r) \} \sin k_n z \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^3} \{ C_n \sinh \beta_n z + D_n \beta_n z \cosh \beta_n z \} J_0(\beta_n r) \right] \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

を選ぼう. ただし $J_0(\beta_n r)$, $J_1(\beta_n r)$, $I_0(k_n r)$, $I_1(k_n r)$ はベッセルの関数であり, A_0 , B_0 , A_n , B_n , C_n , D_n は未定定数であり, k_n , β_n は任意定数である. (4) 式における多項式の項の選び方は十分な吟味を行っていない. このような形に選べば問題を解くことができるから, こう選んだままである. この多項式の項を考慮しなかった場合, あるいは考慮してもその選び方が悪い場合には解を求めることができない.

さて, (4) 式を (3) 式に代入し, 変位成分および応力成分を書下すと

$$\begin{aligned} \frac{u}{2} &= -B_0 \left(\frac{z^2}{z_0^2} - 1 \right) - \sum \frac{1}{k_n} \{ A_n I_1(k_n r) + B_n k_n r I_0(k_n r) \} \cos k_n z \\ &\quad + \sum \frac{1}{\beta_n} \{ C_n \cosh \beta_n z + D_n (\cosh \beta_n z + \beta_n z \sinh \beta_n z) \} J_1(\beta_n r) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{2} &= 2B_0 \left(\frac{z^3}{3z_0^2} - z \right) + \sum \frac{1}{k_n} \{ (A_n + 2B_n) I_0(k_n r) + B_n k_n r I_1(k_n r) \} \sin k_n z \\ &\quad - \sum \frac{1}{\beta_n} \{ C_n \sinh \beta_n z + D_n \beta_n z \cosh \beta_n z \} J_0(\beta_n r) \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{4G} &= \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2} \left(\frac{r^2}{z_0^2} - 4 \frac{z^2}{z_0^2} \right) \\ &\quad + \sum \left\{ -A_n I_0(k_n r) + A_n \frac{1}{k_n r} I_1(k_n r) + B_n k_n r I_1(k_n r) \right\} \cos k_n z \\ &\quad + \sum \{ (C_n + D_n) \cosh \beta_n z + D_n \beta_n z \sinh \beta_n z \} \left\{ J_0(\beta_n r) - \frac{J_1(\beta_n r)}{\beta_n r} \right\} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z}{4G} &= \frac{A_0}{2} + B_0 \left(\frac{z^2}{z_0^2} + \frac{r^2}{2z_0^2} - 3 \right) \\ &\quad + \sum \{ A_n I_0(k_n r) + 3B_n I_0(k_n r) + B_n k_n r I_1(k_n r) \} \cos k_n z \\ &\quad - \sum \{ C_n \cosh \beta_n z + D_n \beta_n z \sinh \beta_n z \} J_0(\beta_n r) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{zr}}{4G} &= -B_0 \frac{rz}{z_0^2} + \sum \{ A_n I_1(k_n r) + B_n I_1(k_n r) + B_n k_n r I_0(k_n r) \} \sin k_n z \\ &\quad + \sum \{ C_n \sinh \beta_n z + D_n (\sinh \beta_n z + \beta_n z \cosh \beta_n z) \} J_1(\beta_n r) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となる.

2. Φ の決定

任意定数 k_n , β_n を

$$\cos k_n z_0 = 0 \quad \therefore k_n = (2n-1)\pi/2z_0 \dots\dots\dots (10)$$

$$J_1(\beta_n r_0) = 0 \quad \therefore \beta_n = \lambda_n/r_0 \dots\dots\dots (11)$$

と選ぼう。ただし λ_n は $J_1(\lambda)$ の n 番目の零点である。

さて、境界条件 (i) より

$$C_n = -(1 + \beta_n z_0 \tanh \beta_n z_0) D_n \quad \dots\dots\dots (12)$$

をうる。つぎに、境界条件 (iv) より A_n と B_n との関係を見出すために、

$$z = \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{k_n^2} \sin k_n z, \quad (-z_0 \leq z \leq z_0) \quad \dots\dots\dots (13)$$

なる関係と (11) 式とを用いよう。すると簡単な計算ののち

$$A_n = (-1)^{n-1} \frac{2r_0}{k_n^2 z_0^3 I_1(k_n r_0)} B_0 - \left\{ 1 + k_n r_0 \frac{I_0(k_n r_0)}{I_1(k_n r_0)} \right\} B_n \quad \dots\dots\dots (14)$$

をうる。

かくして、境界条件 (i), (iv) より C_n と D_n , A_n と B_0 および B_n との関係を見出すことができたので、未知定数 C_n , A_n は消去できたことになる。つぎに、境界条件 (ii), (iii) より未知定数 A_0 , B_0 , B_n , D_n を決定しよう。まず境界条件 (ii) を考える。 $I_0(k_n r)$ および $k_n r I_1(k_n r)$ を区間 $0 \leq r \leq r_0$ において $J_0(\beta_n r)$ の無限級数にベッセル展開すると次式をうる。

$$I_0(k_n r) = P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} P_i J_0(\beta_i r) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし

$$P_0 = \frac{2}{k_n r_0} I_1(k_n r_0), \quad P_i = \frac{2k_n r_0}{(\beta_i^2 + k_n^2) r_0^2} \cdot \frac{I_1(k_n r_0)}{J_0(\beta_i r_0)}$$

$$k_n r I_1(k_n r) = Q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} Q_i J_0(\beta_i r) \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし

$$Q_0 = 2 \left\{ I_0(k_n r_0) - 2 \frac{I_1(k_n r_0)}{k_n r_0} \right\},$$

$$Q_i = \frac{2(k_n r_0)^2}{(\beta_i^2 + k_n^2) r_0^2} \cdot \frac{1}{J_0(\beta_i r_0)} \left\{ I_0(k_n r_0) - \frac{2k_n r_0}{(\beta_i^2 + k_n^2) r_0^2} I_1(k_n r_0) \right\}$$

これらの展開式および (12), (14) 式を (6) 式に代入し、境界条件 (ii) を考慮すると次式をうる。

$$\frac{w_0}{z_0} = -\frac{4}{3} B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4r_0}{z_0} \frac{I_1(k_n r_0)}{(k_n r_0)^2} B_n \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$0 = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i^2 (\beta_i^2 r_0^2 + k_i^2 r_0^2)} \right\} \frac{4}{J_0(\beta_n r_0)} \cdot \frac{r_0}{z_0^3} B_0$$

$$+ \frac{1}{\beta_n r_0} \left\{ \sinh \beta_n z_0 - \frac{\beta_n z_0}{\cosh \beta_n z_0} \right\} D_n$$

$$+ \frac{2}{J_0(\beta_n r_0)} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\beta_i^2 r_0^2 - k_i^2 r_0^2}{(\beta_i^2 r_0^2 + k_i^2 r_0^2)^2} I_1(k_i r_0) B_i \quad \dots\dots\dots (18)$$

つぎに、境界条件 (iii) を考えよう。いま

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= 2z_0^2 - (z + 2z_0)^2 & ; & \quad -2z_0 \leq z < -z_0 \\ &= z^2 & ; & \quad -z_0 \leq z < z_0 \\ &= 2z_0^2 - (z - 2z_0)^2 & ; & \quad z_0 \leq z \leq 2z_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

なる関数をフーリエ展開すると

$$f(z) = z_0^2 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{k_n^3} \cos k_n z$$

をうる。したがって $-z_0 \leq z \leq z_0$ なる区間では

$$z^2 = z_0^2 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{k_n^3} \cos k_n z, \quad (-z_0 \leq z \leq z_0) \quad \dots\dots\dots (20)$$

なる等式が成立する。同様にして

$$(1 - \beta_n z_0 \tanh \beta_n z_0) \cosh \beta_n z + \beta_n z \sinh \beta_n z \\ - \cosh \beta_n z_0 \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\left(\frac{2\beta_n z_0}{\pi} \right)^2 \left\{ \left(\frac{2\beta_n z_0}{\pi} \right)^2 + 3(2i-1)^2 \right\}}{(2i-1) \left\{ (2i-1)^2 + \left(\frac{2\beta_n z_0}{\pi} \right)^2 \right\}} \cos k_i z \right], \quad (-z_0 \leq z \leq z_0) \quad (21)$$

なる等式をうる。(12), (14), (20) および (21) 式を (7) 式に代入し, 境界条件 (iii) を考慮すると

$$0 = \frac{A_0}{2} + 2 \left(\frac{r_0^2}{4z_0^2} - 1 \right) B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} D_i J_0(\beta_i r_0) \cosh \beta_i z_0 \quad (22)$$

$$0 = (-1)^{n-1} \frac{16 B_0}{(2n-1)^3 \pi^3} \left[5 - k_n r_0 \frac{I_0(k_n r_0)}{I_1(k_n r_0)} \right] + B_n \left[\frac{(k_n r_0)^2 \{ I_0^2(k_n r_0) - I_1^2(k_n r_0) \} - I_1^2(k_n r_0)}{k_n r_0 I_1(k_n r_0)} \right] \\ - (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} D_i \frac{4}{\pi} J_0(\beta_i r_0) \cosh \beta_i z_0 \left[\frac{(\beta_i r_0)^2 \{ (\beta_i r_0)^2 + 3(k_n r_0)^2 \}}{(2n-1) \{ (\beta_i r_0)^2 + (k_n r_0)^2 \}^2} \right] \quad (23)$$

をうる。かくして A_0, B_0, B_n, D_n に関する連立方程式を導くことができた。いま

$$p \equiv \frac{\pi r_0}{2z_0} \quad (24)$$

なる記号を用いることにし, かつ未知定数 A_0, B_0, B_n, D_n を

$$\left. \begin{aligned} U &\equiv \frac{A_0}{2} \cdot \frac{z_0}{w_0}, & V &\equiv 2B_0 \frac{z_0}{w_0} \\ X_n &\equiv (-1)^{n-1} (2n-1) p I_1 \{ (2n-1)p \} \cdot \frac{z_0}{w_0} B_n \\ Y_n &\equiv \cosh \frac{\pi \lambda_n}{2p} \cdot J_0(\lambda_n) \cdot \frac{z_0}{w_0} D_n \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

によって U, V, X_n, Y_n に変換すると連立方程式 (17), (18), (22), (23) は

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi p^2}{4} &= \frac{\pi p^2}{12} V + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{(2n-1)^3} \\ 0 &= U + \left(\frac{p^2}{\pi^2} - 1 \right) V + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \\ 0 &= V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16p}{(2n-1)^2 \pi^2 \{ \lambda_s^2 + (2n-1)^2 p^2 \}} \\ &\quad + \frac{Y_s}{\lambda_s} \left\{ \tanh \frac{\pi \lambda_s}{2p} - \frac{(\pi \lambda_s / 2p)}{\cosh^2(\pi \lambda_s / 2p)} \right\} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\lambda_s^2 - (2n-1)^2 p^2}{(2n-1)p \{ \lambda_s^2 + (2n-1)^2 p^2 \}^2} X_n, \\ &\quad (s=1, 2, \dots) \\ 0 &= \frac{8V}{(2s-1)^3 \pi^3} \left[5 - (2s-1)p \frac{I_0 \{ (2s-1)p \}}{I_1 \{ (2s-1)p \}} \right] \\ &\quad - X_s \left[\frac{I_0^2 \{ (2s-1)p \}}{I_1^2 \{ (2s-1)p \}} - 1 - \frac{1}{(2s-1)^2 p^2} \right] \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} Y_n \left[\frac{\lambda_n^2 \{ \lambda_n^2 + 3(2s-1)^2 p^2 \}}{(2s-1) \{ \lambda_n^2 + (2s-1)^2 p^2 \}^2} \right], \\ &\quad (s=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

となる。これらの式から U, V, X_n, Y_n が決定されれば, Φ が確定し, 問題は解決することになるのである。

3. 数 値 計 算

U, V, X_n, Y_n に関する上記の連立方程式 (26) は無限元の連立方程式であるので, 実際に計算する場合には適当に近似計算しなければならない。いま,

$$X_{N+1} = X_{N+2} = \dots = Y_{N+1} = Y_{N+2} = \dots = 0$$

と仮定すれば (26) 式は $2N+2$ 元の連立方程式となる。 N はなるべく大きく選ぶほどよいのであるが, N を大きく選ぶと計算の労力が多大となる。したがって適当な N で満足しなければならない。ここでは $N=6$ に選んだ。また, この N で満足しうる近似度が得られているかどうかをしらべるため, $N=5$ についても計算してみた。 p が大きい場合は $N=6$ で十分満足しうる近似度が得られているようであるが, p が小さい場合は, いささか不十分なように思われたので $p=2$ の場合について $N=12$ の計算も行った。

$N=12$ の場合は 26 元の連立方程式となり, $N=6$ の場合でも 14 元の連立方程式となって, これを手回し計算機で解こうとするとよく大な時間を要する。幸い, $N=6$ の場合のすべての計算を, 播磨造船所の御好意によって同社のデジタルコンピュータ UNIVAC 120 によって行うことができた。

また $N=12$ の場合の計算を, 富士通信機製造会社および有隣電機精機会社の御好意によって, 同社のデジタルコンピュータ FACOM 128 によって行うことができた。計算結果の一例を第1表に示す。

4. ばね定数

$z=z_0$ における σ_z は

第 1 表

$p=10$	
U	$2.042\ 880\ 23 \times 10^1$
V	$-3.998\ 579\ 80$
Y_1	$9.249\ 585\ 60$
Y_2	$2.952\ 464\ 28$
Y_3	$1.547\ 357\ 14$
Y_4	$1.001\ 356\ 49$
Y_5	$7.440\ 466\ 20 \times 10^{-1}$
Y_6	$5.846\ 347\ 70 \times 10^{-1}$
X_1	$6.532\ 190\ 40 \times 10^1$
X_2	$4.250\ 578\ 70$
X_3	$-4.528\ 276\ 30$
X_4	$-6.114\ 488\ 71$
X_5	$-6.134\ 832\ 67$
X_6	$-5.772\ 777\ 90$

$$\sigma_z(r, z_0) = \frac{4G}{(z_0/w_0)} \left\{ U - V + \frac{p^2}{\pi^2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 V + \sum_{n=1}^N Y_n \frac{J_0 \left(\lambda_n \frac{r}{r_0} \right)}{J_0(\lambda_n)} \right\} \dots (27)$$

によって与えられる。接着面に作用する合力 F は

$$F = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_0} r \sigma_z(r, z_0) dr$$

によって与えられ、ばね定数 K は

$$K = F/2w_0$$

によって与えられる。ここでは、ばね定数について直接考察せず、見かけの剛性係数 E_{ap} とせん断弾性係数 G との比について考察しよう。 E_{ap} は周知のように

$$E_{ap} = K(2z_0/\pi r_0^2)$$

で与えられるから

$$E_{ap}/G = 4 \left\{ U + \left(\frac{p^2}{2\pi^2} - 1 \right) V \right\} \dots (28)$$

となる。

第 2 図

第 2 表

p	n	E_{ap}/G
10	5	16.61
	6	16.68
2	6	3.75
	12	3.79

この式によって計算した E_{ap}/G の値を p に対してプロットした図が第 2 図である。ただし、この値は $N=6$ の場合の計算結果である。 N の選び方によって、 E_{ap}/G がどの程度の変動を示すかをみるため、 $N=5$ および $N=12$ の場合について計算を行った結果を第 2 表に示す。 $p=2$ の場合も $p=10$ の場合も E_{ap}/G の変化は約 1% 程度であって、 $N=6$ として計算した結果が十分な精度をもっていることが予想される。

さて、さらに、服部・武井の両氏がエネルギー法によって E_{ap}/G の値を近似計算した⁽³⁾。また実吉氏も同様の計算を行った⁽⁴⁾。これらの結果を比較のため第 2 図にプロットしてある。

5. 応力分布の計算

(i) σ_z の分布 $p=2, 10$ ($N=6$) の場合の $\sigma_z(r, z_0)$ の計算結果を第 3 図に示す。ただし、この図においては、 $\sigma_z(r, z_0)$ を平均応力 $E_{ap}(w_0/z_0)$ で除した無次元量を縦軸にとってある。図にみるように、 $\sigma_z(r, z_0)$ は r に関して単調な関数にならずに変動している。これは実際に応力の分布がこのようになっているのではなく、無限元の連立方程式を有限元の連立方程

(a)

(b)

第 3 図

第 4 図

第 5 図

第 6 図

式で近似したために生じた誤差であると考えられる。 $p=10$ の場合には、この変動があまり顕著ではないので、第3図の結果は真の応力分布に近いものであることが予想される。 $p=2$ の場合には変動が大きく、この図から真の応力分布を予想することはできない。いま $p=2$ の場合に、 $N=12$ として計算した $\sigma_z(r, z_0)$ を第4図に示す。この図は第3図のものと相当異なっている。この図においても曲線は大きく波うっており、正しい σ_z の分布を知るためには N をさらに大きく取って計算する必要があることが知られる。前節で取扱った E_{ap}/G の値は σ_z の積分値であるので $N=6$ で十分であったが、 σ_z 自身を求めようとするこのように N を相当大きくとる必要があるのである。

いま、参考のため、 $p=2$, $N=6$ の場合について $z=0.9z_0$ における σ_z の分布を計算した。この結果を第5図に示す。この図は第3図のものにくらべて変動が少なくなっている。

(ii) τ_{zr} の分布 $p=2, 10 (N=6)$ の場合の

$\tau_{zr}(r, z_0)$ を計算した。結果をやはり無次元量として第6図に示す。図に見るように τ_{zr} はなめらかな分布をしており、 $N=6$ の計算結果で十分であると考えられる。図によれば τ_{zr} の極大値は p のいかんによらず平均応力の約0.3倍である。また、 p が大きくなると τ_{zr} の極大点は内側に移動することが見られる。

(iii) 角点 ($z=z_0$, $r=r_0$) における応力 角点においては、 σ_z の応力集中が生ずると考えられやすいが、筆者らの計算結果が示すように、角点においてはすべての応力成分が零である。いま、この点について更に明確に論じてみよう。軸対称問題における応力と変位との関係は、周知のごとく

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \left[(m-1) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \sigma_\phi &= \frac{2G}{m-2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + (m-1) \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \sigma_z &= \frac{2G}{m-2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + (m-1) \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \tau_{zr} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

である。接着端においては

$$u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}=0$$

であり、側面では

$$\sigma_r=0,$$

である。角点はこの両方の性質をもっているから(29)式の第1式から、角点においては

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

なることを知る。かくして、角点では、 σ_r , τ_{zr} とともに σ_z , σ_ϕ も零となることがわかる。

6. 側面における半径方向の変位

側面における半径方向の変位 $u(z, r_0)$ は

第 7 図

$$\frac{u(z, r_0)/r_0}{w_0/z_0} = \left\{ 1 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right\} V \\ + \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{2}{p(2n-1)^2} \left\{ \frac{8pV}{\pi^2(2n-1)} \right. \\ \left. - \frac{X_n}{p} \right\} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2z_0}$$

で与えられる。 $p=2, 10$ ($N=6$) の場合についての計算結果を第 7 図に示す。 $p=10$ の場合の曲線は余弦曲線に近いが、 $p=2$ の場合は余弦曲線からはずれた形をしている。 $p=10$ の場合の曲線と余弦曲線とを比較するため、第 7 図に $\frac{z_0}{w_0} \cdot \frac{u(z, r_0)}{r_0} \cdot \cos \frac{z}{z_0}$ なる曲線を点線でプロットしてある。図によれば $p=10$ でもかなり余弦曲線とくいちがっている。 $u(z, r_0)$ 曲線の方がふくらんだ形をしている。

$p=2, 10$ の場合について、 $z=z_0$ における $\frac{du(z, r_0)}{dz}$ の値を求めると

$$p=2 \text{ のとき ; } \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{r_0, z_0} = 10.51(w_0/z_0)$$

$$p=10 \text{ のとき ; } \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{r_0, z_0} = 13.55(w_0/z_0)$$

となり、 p によってあまり大きくは変化しないようである。

結 言

以上、接着型円柱状防振ゴムが引張りあるいは圧縮をうけたときのばね定数、応力分布および変位について計算式を導き、かつ数値計算を行った結果を報告した。数値計算を行うに当たって、播磨造船所、富士通信機製造会社および有隣電機精機会社の絶大な御援助のあったことを再記し、ここに深く感謝の意を表する。

注

- (1) 短円柱の軸対称変形に関する斎藤氏の研究 (機械学会論文集, 18, 68 (昭 27)) があるが、境界条件が異なるため、これを利用することができない。
- (2) A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, p. 276.
- (3) 実吉, 武田, 東北大, 工, 電気談話会, (昭 18).
- (4) 服部, 武井, 日本ゴム協会誌, 23, 7 (昭 25).

539.313:678.4.074

防 振 ゴ ム の 形 状 効 果 (第 2 報)*

関口久美**, 西村正巳**, 道田祥二***, 中川栄一***

On the Shape Effect of Rubber Vibration Isolators (2nd Report)

by Hisayoshi SEKIGUCHI, Masami NISHIMURA,
Shôji MICHIDA, and Eiichi NAKAGAWA

Formerly two of these authors made a report on the variation of complex modulus in rubber vibration isolators due to their shape factors. In the present report the following two facts are presented on the basis of the data obtained from the experiments of a certain torsional free oscillation: (1) Complex shear modulus does not change by altering the shape of cross section and shape factor, (2) How do these two moduli connect? Certain calculations and experiments were tried, keeping in mind the facts that in bonded type rubber its characteristics change remarkably by the radius in bonded part to metal parts. And the results showed that the calculations have good accuracy.

So, together with the results mentioned in the 1st report, this present trial shows that we can calculate the characteristics when mean stress and shape factor vary, if either complex modulus or complex shear modulus is given.

1. 緒 言

防振ゴムの動的特性がその形状によって大きく変化

することは既によく知られている。ゴムの形状を表わす量として現在広く使われているのは、(ゴムの受圧面積)/(ゴムの自由表面積)で、これを S とおき形状係数 (Shape factor) と呼んでいる。これに関する論文⁽¹⁾は静試験によって裏付けをされているが、これを動試験にも拡張適用してみた。筆者らは第 1 報⁽²⁾にお

* 昭和 33 年 4 月 2 日 第 35 期通常総合講演会において講演、原稿受付 昭和 33 年 4 月 28 日。

** 正員、姫路工業大学 (兵庫県姫路市伊伝居 600)。

*** 学生員、姫路工業大学。