いし 40% である。もちろんこの熱伝達の降り方は s' および K の値によって異なるものであるが、筆者の実験結果のみから s' と K との影響を一般的に結論することは困難であり、追って次の「油冷却管の近似解法」において理論的に追求するとともに、本実験結果と組合わせてこの問題を糾明する予定である。

この研究は東京工業大学 板谷松樹教授の御指導を受け、また文部省自然科学研究費の交付を受けた。なお油の熱伝導率測定のための標準ガラス板は田村民平博士の御厚意によるものであり、油の比熱測定は東京工業大学高木研究室の御援助によるものである。ここに記して感謝の意を表するものである。

なおこの実験は池谷敏男、桑名正之、光沢富雄、武田宜雄、梶塚千里諸君の協力によるものであり、ここにあわせ記して謝意を表する。

文 献

- (1) L. Graetz, *Ann. d. Phys. und Chem.*, Neue Folge, (1883), 79.
- (2) W. Nusselt, *V. D. I. Z.*, **54**, (1910), 1154.
- (3) T. Drew, *Am. Inst. Chem. Engr., Trans.*, **26**, (1931), 81, 171.
- (4) A. Colburn, *Am. Inst. Chem. Engr., Trans.*, **29**, (1933), 174.
- (5) E. Sieder and Tate, *Ind. Engg. Chem.*, **28**, (1936), 1429.
- (6) 浅尾, 機械学会論文集, **17**, 62 (昭 26), 167.
- (7) 浅尾, 機械学会論文集, **22**, 124 (昭 31), 909.

536.242:621-713.2:536.27

油 冷 却 管 の 近 似 解 法*

浅 尾 晴 海**

An Approximate Solution of Oil-Cooling Pipe

by Harumi ASAWO

This paper deals with a mathematical solution on the heat transfer of cooling pipe with constant temperature and laminar flow oil in it.

The partial differential equation of temperature distribution and equations of velocity and of pressure gradient were derived, as the viscosity of oil varies only with temperature and other properties of oil remain unchanged. I have attempted to solve these simultaneous equations. As the process I have taken in a conception of thermal boundary layer, and introduced a thermal equation corresponding to the Karman's momentum equation of boundary layer problems.

The calculations of mean temperature θ_m were compared with my experimental results, although sufficient coincidence is difficult to obtain, for these were thermal experiments, but I have recognized that this theory and the experiments agree with each other. Moreover, I am of the opinion that we could ascertain the effect of s' and K following my similarity.

1. 緒 言

油冷却管内での流れは油の粘度が大なるため、ほとんどすべての場合層流である。したがって本論文は一定温度に保たれた円管内を油が層流状態で流れながら冷却される場合の、熱伝達を理論的に解明せんとするのがその目的である。油が管内層流で冷却されることは機械工業および化学工業の面でその機会が多く、これに関する実験的研究としては Drew⁽¹⁾, Kraussold⁽²⁾, Colburn⁽³⁾, Sieder & Tate⁽⁴⁾ 等によるものおよび筆者⁽⁵⁾ のものがある。しかし理論的解析について

は、前記二者⁽³⁾⁽⁴⁾の実験式がある程度でいまだに十分なものが無いように思われる。

油の管内層流での熱伝達は他の一般の液体の場合に比してその熱伝達が悪いが、その理由は管壁附近における油は冷却のため粘度が大となり、その結果速度分布がポアズイユの流れと異なったものになるためと思われる。よってこの問題を理論的に解明するには、温度分布を決める熱伝導の式と流れについての運動方程式および連続の式を一連の連立方程式としてこれを解く必要がある。

本論文ではこの問題を解く方法として、粘度一定と考えられる一般の流体に対する「円管内層流熱伝達」についての筆者の解法⁽⁶⁾を拡張した方法を採用した。これは境界層理論における Pohlhausen の解法と類似の

* 昭和 26 年 4 月 4 日 第 28 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 33 年 9 月 6 日。

** 正員、広島大学工学部 (広島市千田町 3)。

ものであって、速度境界層とともに熱境界層なるものを考え、この境界層内における速度分布および温度分布がそれぞれ管壁よりの距離の四次式で近似されるとするものである。

2. 基礎方程式および境界条件

t ; 油の温度 $^{\circ}\text{C}$ $w(r, z)$; 管軸方向の流速
 p ; 圧力 κ ; 油の温度伝ば率
 η ; 油の粘度 w_m ; 管軸方向の平均流速

なる記号を使用し、冷却管の前端の中央に座標原点を採り、円筒座標 (r, z) を使用する。冷却管の入口において油はポアズイユの放物線速度分布であり、その温度は一様な温度 t_i であるとする。しかるときは微小なる項を省略すると次の一連の方程式が成立する⁽⁷⁾。

$$\text{温度分布, } \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{w(r, z)}{\kappa} \frac{\partial t}{\partial z} \quad \dots(1)$$

$$\text{速度分布, } w(r, z) = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dz} \int_r^a \frac{r}{\eta} dr \quad \dots(2)$$

$$\text{圧力こう配, } -\frac{dp}{dz} = \frac{a^2 w_m}{\int_0^a \left\{ r \int_r^a \frac{r}{\eta} dr \right\} dr} \quad \dots(3)$$

ここに a は管の半径である。境界条件は

$$z=0 \text{ にて } t=t_i, \quad r=a \text{ にて } t=t_w \quad \dots(4)$$

である。これらに対し次の変数変換を行う。

$$\theta = \frac{t_i - t}{t_i - t_w}, \quad r' = \frac{r}{a}, \quad z' = \frac{\kappa z}{a^2 w_m}, \quad w' = \frac{w}{w_m} \quad \dots(5)$$

これらはすべて無次元量である。(5)の変換を行い、かつ計算の繁雑を避けるため記号「 $'$ 」を省略すると、

基礎方程式および境界条件は

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} = w \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad \dots(6)$$

$$w = A(z) \int_r^1 \frac{r}{\eta} dr \quad \dots(7)$$

$$A(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{\int_0^1 \left\{ r \int_r^1 \frac{r}{\eta} dr \right\} dr} \quad \dots(8)$$

$$z=0 \text{ にて } \theta=0, \quad r=1 \text{ にて } \theta=1 \quad \dots(9)$$

となる。速度に対する境界条件および初期条件は(7)自身が既に満足させている。

問題は(9)なる境界条件を満足させる。(6)(7)

(8)なる方程式の解を求めることに帰着する。ここに η は先に述べしことより θ の関数である。

3. 平均温度に関する微分方程式

z なる長さの冷却管を通過した油をかくはんした後、の平均温度を θ_m とすると、すべて無次元量を使用して

$$\theta_m = 2 \int_0^1 r w \theta dr \quad \dots(10)$$

となる。積分は冷却管の入口より z なる距離における断面内での積分を意味し z の関数である。これを z について微分すると、 θ_m は z のみの関数であるから

$$\frac{d\theta_m}{dz} = 2 \int_0^1 r \frac{\partial}{\partial z} (w \cdot \theta) dr$$

である。 z 方向への速度の variational 方は同方向への温度の variational 方に比してきわめて緩慢であるとし、なお油の温度変化は管壁附近の熱境界層内のみ存在するとすると⁽⁸⁾

$$\frac{d\theta_m}{dz} = 2 \int_{1-\delta}^1 r w \frac{\partial \theta}{\partial z} dr \quad \dots(11)$$

となる。しかるに(6)より

$$w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$$

これを(11)に入れると

$$\frac{d\theta_m}{dz} = 2 \int_{1-\delta}^1 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) dr$$

となる。更に熱境界層をはずれるところで温度はなだらかに変化するとすると $r=1-\delta$ にて $\partial \theta / \partial r = 0$ であり

$$\frac{d\theta_m}{dz} = 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=1} \quad \dots(12)$$

となる。これは境界層理論における Kármán の運動量方程式に対応するものであり、以後「平均温度に関する微分方程式」と呼ぶ。この物理的意味は平均温度の z 方向への variational 方が管壁より熱伝導によって失われる熱量によって決まることを示すものである。

4. 温度分布を表わす四次式

$$1-r=y \quad \dots(13)$$

とおき、かつ

$$\theta = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 \quad \dots(14)$$

なる四次式で θ を近似する。ここに y は管壁よりの無次元距離であり、 $a_0, a_1, \dots, a_4$ は決定されるべき係数で z のみの関数であるとする。

次に温度についての境界条件は

$$y=0 \text{ にて } \theta=1, \quad y \geq \delta \text{ にて } \theta=0 \quad \dots(15)$$

である。この境界条件と温度分布の偏微分方程式(6)とより、管壁における θ の高階の微分が定まる。

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=1} = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \xi \quad \dots(16)$$

とおくと、(6)より

$$y=0 \text{ にて } \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\xi \quad \dots(17)$$

また(6)を r について微分したものについて、 $r=1$ すなわち $y=0$ なるときを考えると

$$y=0 \text{ にて } \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} = -2\xi \quad \dots\dots\dots(18)$$

となる。また前述のごとく熱境界層をはずれるところで温度曲線はなだらかに変化すべきであるとする

$$y=\delta \text{ にて } \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(19)$$

である。

(14) なる θ の四次式がこれらの条件(17)(18)(19)を満足さすよう係数を決定すると

$$a_0 = 1 \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}\xi, \quad a_3 = -\frac{1}{3}\xi \quad \dots\dots\dots(21)$$

となり

$$\theta = 1 - \xi y - \frac{1}{2}\xi y^2 - \frac{1}{3}\xi y^3 + a_4 y^4 \quad \dots\dots\dots(22)$$

となる。更にこれが(15)の前者を満足するようにすると

$$a_4 = \frac{1}{\delta^4} \left\{ -1 + \xi \delta + \frac{1}{2}\xi \delta^2 + \frac{1}{3}\xi \delta^3 \right\} \quad \dots\dots\dots(23)$$

となり

$$\theta = 1 - \xi y - \frac{1}{2}\xi y^2 - \frac{1}{3}\xi y^3 + \left\{ -1 + \xi \delta + \frac{1}{2}\xi \delta^2 + \frac{1}{3}\xi \delta^3 \right\} \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \quad \dots\dots\dots(24)$$

となる。 ξ が未決定であるが、(24)を(19)に入れて整理すると

$$\xi = \frac{12}{\delta(9+3\delta+\delta^2)} \quad \dots\dots\dots(25)$$

となり、(24)と(25)が温度分布を与える四次式である。ここに δ は未決定である。

5. 速度分布を表わす近似式

管内の速度分布は熱境界層の内と外との二つの部分に分けて考える。熱境界層の外では温度一定であり、粘度も一定であるから速度曲線は放物線である。しかし熱境界層内では温度が変わるとともに粘度も変わるので速度分布は放物線と異なったものとなるはずであり、これを y の四次式で近似することにする。すなわち熱境界層内($y \leq \delta$)の流速 w_1 を

$$w_1 = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 \quad \dots\dots\dots(26)$$

熱境界層外($y \geq \delta$)の流速 w_2 を

$$w_2 = e - f r^2 = e - f(1-y)^2 \quad \dots\dots\dots(27)$$

とおく。ここに $b_0, b_1, \dots, b_4, e, f$ は決定されるべき係数で z のみの関数である。また w_1 と w_2 とは $y=\delta$ においてその値が等しいのみならず、更に y 方向へのこう配および曲率も等しくなるようにする。すなわち

$$y=\delta \text{ にて } w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots(28)$$

なるように両速度曲線はつながるものとする。

次に油の粘度と温度の関係式としては、実測値と良く一致しかつ理論的意味のめいりょうなものとして、次のVogelの式を改良したものを使用する⁽⁷⁾。

$$\eta = \eta_\infty e^{\omega/R(t-t_\infty)} \quad \dots\dots\dots(29)$$

ここに

η_∞ ; 温度が十分大なるときの粘度

t_∞ ; 粘度が十分大となるべき温度

ω ; 分子配列の変化に要するエネルギー

R ; ガス定数

である。これに

$$\theta = (t_i - t)/(t_i - t_w), \quad s' = (t_i - t_w)/(t_i - t_\infty) \quad \dots\dots\dots(30)$$

を入れ、かつ

$$\omega/R(t_i - t_\infty) = K \quad \dots\dots\dots(31)$$

とおくと

$$\eta = \eta_\infty e^{K/(1-s')\theta} \quad \dots\dots\dots(32)$$

となる。ここに s' は冷却の程度すなわち冷却管の温度的条件を示し、 K は油の物理的性質に関するものであり、ともに無次元量である。

熱境界層内の速度 w_1 は(26)なる四次式で与えられると仮定したが、 w_1 を y の昇べき級数に展開すると

$$w_1 = (w_1)_{y=0} + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=0} y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)_{y=0} y^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} \right)_{y=0} y^3 + b_4 y^4 \quad \dots\dots\dots(33)$$

と書ける。ここに $b_4 y^4$ は y^4 以下に対する補正項である。しかるに(7)より

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)_{r=1} = -\frac{A}{\eta_{r=1}} = -\frac{A}{\eta_{\theta=1}} = -\frac{A}{\eta_\infty e^{K/(1-s')}} \quad \dots\dots\dots(34)$$

であり、また

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right)_{r=1} = \left(\frac{d\eta}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=1} = \eta_\infty e^{K/(1-s')} \frac{Ks'}{(1-s')^2} \xi$$

なることより、(7)を2回微分したものは

$$\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \right)_{r=1} = -\frac{A}{\eta_\infty e^{K/(1-s')}} \left\{ 1 - \frac{Ks'}{(1-s')^2} \xi \right\} \quad \dots\dots\dots(35)$$

となる。同様の計算を行うと

$$\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial r^3} \right)_{r=1} = -\frac{AKs'}{\eta_\infty e^{K/(1-s')}} \left[\left\{ \frac{Ks'}{(1-s')^4} - \frac{2s'}{(1-s')^3} \right\} \xi^2 - \frac{1}{(1-s')^2} \xi \right] \quad \dots\dots\dots(36)$$

を得る。計算の便宜のため

$$\frac{A}{\eta_{\infty} e^{K/(1-s')}} = B \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\frac{Ks'}{(1-s')^2} = \alpha, \quad \frac{K^2 s'^2}{(1-s')^4} - \frac{2Ks'^2}{(1-s')^3} = \beta \quad \dots\dots\dots (38)$$

とおき、変数を r より y に変換すると

$$(w_1)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=0} = B, \quad \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -B(1-\alpha\xi), \quad \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3}\right)_{y=0} = B(\beta\xi^2 - \alpha\xi) \quad \dots\dots\dots (39)$$

となる。ここに B は A の関数であり、 A は圧力こう配に関する量であるから、 B および A は z のみの関数である。また α, β はいずれも油の物理的性質および冷却の温度条件によって定まる定数である。(39)を(33)に入れると、熱境界層内の速度 w_1 として

$$w_1 = B \left\{ y - \frac{1}{2}(1-\alpha\xi)y^2 + \frac{1}{6}(\beta\xi^2 - \alpha\xi)y^3 \right\} + b_4 y^4 \quad \dots\dots\dots (40)$$

を得る。

次に熱境界層の境め $y=\delta$ における(28)なる3個の条件式を満足させるようにするため、(28)の w_1 に(40)を w_2 に(27)を入れると、3個の係数 e, f および b_4 が決定され次のごとくになる。

$$\left. \begin{aligned} e &= B \left\{ \delta - \frac{1}{2}(1-\alpha\xi)\delta^2 + \frac{1}{6}(\beta\xi^2 - \alpha\xi)\delta^3 \right\} + b_4 \delta^4 + f(1-\delta)^2 \\ f &= -\frac{B}{2} \{ -(1-\alpha\xi) + (\beta\xi^2 - \alpha\xi)\delta \} - 6b_4 \delta^2 \\ b_4 &= \frac{B \{ -\alpha\xi - (\beta\xi^2 - \alpha\xi)\delta + (\beta\xi^2 - \alpha\xi)\delta^2/2 \}}{4\delta^2(3-2\delta)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (41)$$

更に形を整えるため

$$b_4/B = b_4', \quad e/B = e', \quad f/B = f' \quad \dots\dots\dots (42)$$

とおくと、速度 w_1 および w_2 はそれぞれ

$$w_1 = B \left\{ y - \frac{1}{2}(1-\alpha\xi)y^2 + \frac{1}{6}(\beta\xi^2 - \alpha\xi)y^3 + b_4' y^4 \right\}, \quad (y \leq \delta) \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$w_2 = B \{ e' - f'(1-y)^2 \}, \quad (y \geq \delta) \quad \dots\dots\dots (44)$$

となる。この B は冷却管内の各断面にて流量が一定なることより決定される。すなわち無次元量を使用すると、各断面での流量が一定なることは

$$\int_0^{y=\delta} (1-y)w_1 dy + \int_{y=\delta}^{y=1} (1-y)w_2 dy = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots (45)$$

で与えられる。これに(43)および(44)を入れて積分を行い、かつ整理すると

$$\begin{aligned} B &= 60/[60e'(1-\delta)^2 - 30f'(1-\delta)^4 + 4b_4'\delta^5(6-5\delta) \\ &\quad + \{60\delta^2 - 20(3-\alpha\xi)\delta^3 + 5(\beta\xi^2 - \alpha\xi + 3)\delta^4 - 4(\beta\xi^2 - \alpha\xi)\delta^5\}] \quad \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

を得る。

すなわち、速度分布は(43)、(44)、(42)、(41)、(46)、(25)によって一応決定されたのであり、ここに δ のみは未決定である。

6. 平均温度 θ_m

冷却管を通過した油の無次元平均温度 θ_m は、すべて無次元量を使用し、 $y > \delta$ において $\theta = 0$ なることを考慮すると(10)より

$$\theta_m = 2 \int_{y=0}^{y=\delta} (1-y)w_1 \theta dy \quad \dots\dots\dots (47)$$

である。 w_1 および θ にそれぞれ(40)、(22)を入れて積分を行い更に整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\theta_m = & 2B[(1/2)\delta^2 + (1/6)\{(\alpha-2)\xi-3\}\delta^3 \\
& + (1/24)\{(\beta-3\alpha)\xi^2 + (-4\alpha+6)\xi+3\}\delta^4 \\
& + (1/60)\{12b_4'-2\beta\xi^3 + (-2\beta+5\alpha)\xi^2 + (2\alpha-1)\xi\}\delta^5 \\
& + (1/72)\{-12(\xi+1)b_4' + \beta\xi^3 + 3\xi + 12a_4\}\delta^6 \\
& + (1/252)\{18\xi b_4' + 18(\alpha\xi-3)a_4 + \beta\xi^3 + 5\alpha\xi^2 - 6\xi\}\delta^7 \\
& + (1/144)\{3\xi b_4' + 3(\beta\xi^2-4\alpha\xi+3)a_4 + \beta\xi^3 - \alpha\xi^2\}\delta^8 \\
& + (1/54)\{(6b_4' - \beta\xi^2 + \alpha\xi)a_4 + 2\xi b_4'\}\delta^9 - (1/10)a_4 b_4'\delta^{10}] \dots\dots\dots (48)
\end{aligned}$$

この式中のそれぞれに (23) および (42) (41) を入れ、その結果に (25) を入れると (48) は δ のみの式となる。これに $\delta < 1$ なることに注目して δ^0 の項に比し δ^5 以上の項を省略すると、 θ_m は δ の六次式となり次のようになる。

$$\begin{aligned}
\theta_m = & B\delta^2[(1680-800\cdot4\delta+29\cdot2\delta^2-55\cdot9\delta^3+60\cdot4\delta^4) \\
& + (455\cdot0-373\cdot4\delta+62\cdot8\delta^2-3\cdot7\delta^3+12\cdot9\delta^4)\alpha \\
& + (78\cdot9-86\cdot2\delta+23\cdot3\delta^2+1\cdot2\delta^3-0\cdot3\delta^4)\beta]/(2^2\times3^3\times70) \dots\dots\dots (49)
\end{aligned}$$

次に B は (46) の e' , f' , b_4' にそれぞれの式を入れ、その得られたものに ξ として (25) を入れると B は δ のみの式となる。 $\delta < 1$ なることに注目して、これに前と同様の省略を行うと

$$\begin{aligned}
1/B = & [15 + (13\cdot33-18\cdot87\delta+14\cdot65\delta^2+14\cdot26\delta^3-1\cdot33\delta^4)\alpha \\
& + (4\cdot440-8\cdot868\delta+7\cdot262\delta^2-2\cdot664\delta^3-0\cdot266\delta^4)\beta]/60 \dots\dots\dots (50)
\end{aligned}$$

を得る。この (49) と (50) が θ_m の δ による表示式である。

7. 熱境界層の厚さ δ と z の関係

熱境界層の厚さ δ と 冷却管の無次元長さ z との関係をきめるものは、(12) なる平均温度に関する微分方程式である。すなわち

$$\frac{d\theta_m}{dz} = 2\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_{r=1} = 2\xi \dots\dots\dots (51)$$

あるいは、 δ が z のみの関数なることより

$$\frac{d\theta_m}{d\delta} \frac{d\delta}{dz} = 2\xi \dots\dots\dots (52)$$

である。この θ_m に (49) (50) を入れると

$$\theta_m = \frac{\delta^2}{126} \frac{A_0 + A_1\delta + A_2\delta^2 + A_3\delta^3 + A_4\delta^4}{B_0 + B_1\delta + B_2\delta^2 + B_3\delta^3 + B_4\delta^4} \dots\dots\dots (53)$$

と書かれ、ここに

$$\left. \begin{aligned}
A_0 &= 1680 + 455\cdot0\alpha + 78\cdot9\beta, & B_0 &= 15 + 13\cdot33\alpha + 4\cdot440\beta, \\
A_1 &= -800\cdot4 - 373\cdot4\alpha - 86\cdot2, & B_1 &= -18\cdot87\alpha - 8\cdot86\beta, \\
A_2 &= 29\cdot2 + 62\cdot8\alpha + 23\cdot3\beta, & B_2 &= 14\cdot65\alpha + 7\cdot263\beta, \\
A_3 &= -55\cdot9 - 3\cdot7\alpha + 1\cdot2\beta, & B_3 &= 14\cdot26\alpha - 2\cdot664\beta, \\
A_4 &= 60\cdot4 + 12\cdot9\alpha - 0\cdot3\beta, & B_4 &= -1\cdot33\alpha - 0\cdot266\beta,
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

である。(53) の右辺の割算を行った結果に、前と同様な δ の高次の省略を行ったものを

$$\theta_m = \frac{\delta^2}{126} [\Phi_0 + \Phi_1\delta + \Phi_2\delta^2 + \Phi_3\delta^3 + \Phi_4\delta^4] \dots\dots\dots (55)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned}
\Phi_0 &= A_0/B_0, & \Phi_1 &= (A_1B_0 - A_0B_1)/B_0^2 \\
\Phi_2 &= \{B_0(A_2B_0 - A_0B_2) - B_1(A_1B_0 - A_0B_1)\}/B_0^3 \\
\Phi_3 &= \{B_0^2(A_3B_0 - A_0B_3) - B_0B_1(A_2B_0 - A_0B_2) + (-B_0B_2 + B_1^2)(A_1B_0 - A_0B_1)\}/B_0^4 \\
\Phi_4 &= \{B_0^3(A_4B_0 - A_0B_4) - B_0^2B_1(A_3B_0 - A_0B_3) - B_0(B_0B_2 - B_1^2)(A_2B_0 - A_0B_2) \\
&\quad + (-B_0^2B_3 + 2B_0B_1B_2 - B_1^3)(A_1B_0 - A_0B_1)\}/B_0^5
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

である。これら $\Phi_0 \dots \Phi_4$ はいずれも α と β との関数であり、油の質および冷却の温度条件が定まれば、それ

によって決定される定数である。

(52) の θ_m に (55) を入れ δ について微分すると δ と z に関する常微分方程式が得られる。それを整理した上で、 $z=0$ にて $\delta=0$ なる条件の下に積分すると

$$z = \frac{\delta^3}{423 \cdot 360} [840\phi_0 + 105(2\phi_0 + 9\phi_1)\delta + 28(2\phi_0 + 9\phi_1 + 36\phi_2)\delta^2 + 70(\phi_1 + 4\phi_2 + 15\phi_3)\delta^3 + 20(4\phi_2 + 15\phi_3 + 54\phi_4)\delta^4] \dots\dots\dots (57)$$

となる。これが z と δ の関係を与える解式である。したがって油冷却管については (55) と (57) とが θ_m と z との関係を決める一組の解式であり、この場合 δ は一つのパラメータとみなせば良い。もちろん (55) と (57) の2式より δ を消去することも可能であろうが、工学上は (55) および (57) に $\delta=0.1, 0.2, \dots$ を入れてそのおのおのに対する θ_m と z の値を計算し、 θ_m と z との曲線をかくことによりその目的を達し得る。

8. 本理論による解式

前節までに得られた結果は元来その記号に「'」がつくべきものを省略してあるので、これを元の次元のある量にもどす。なお z の代りに Graetz number Wc/kL を使用すると、(55) および (57) はそれぞれ次のようになりこれが解式である。

$$\theta_m = \frac{t_i - t_m}{t_i - t_w} = \frac{\delta^2}{126} [\phi_0 + \phi_1\delta + \phi_2\delta^2 + \phi_3\delta^3 + \phi_4\delta^4] \dots\dots\dots (58)$$

$$\left(\frac{Wc}{kL}\right)^{-1} = \frac{\delta^3}{\pi \times 423 \cdot 360} [840\phi_0 + 105(2\phi_0 + 9\phi_1)\delta + 28(2\phi_0 + 9\phi_1 + 36\phi_2)\delta^2 + 70(\phi_1 + 4\phi_2 + 15\phi_3)\delta^3 + 20(4\phi_2 + 15\phi_3 + 54\phi_4)\delta^4] \dots\dots\dots (59)$$

ここに W は質量流量、 L は管の長さである。また δ は $z=L$ における熱境界層の厚さを y_1 とするとき $\delta=y_1/a$ であり、この a は管の半径である。

9. 計算例および実験値との比較

筆者はさきにモビル油2種(A, B)について、管内層流での冷却実験を行った⁽⁵⁾ので、その実験結果と本理論との比較を行う。

モビル油 A について、 $30^\circ \sim 91^\circ\text{C}$ の実測値より (29) 式の係数を決定すると

$$t_\infty = -66.16^\circ\text{C}, \quad \omega/R = 733.02, \quad \log_{10} \gamma_\infty = -1.14205$$

である。そのうち $s'=0.2$ なる温度条件のときは

$$t_i = 35.3^\circ\text{C}, \quad t_w = 14.2^\circ\text{C}, \quad K = 7.225, \quad \alpha = 2.258, \quad \beta = 3.959$$

である。これらを (54) に入れると

$$A_0 = 3019.8, \quad A_1 = -1984.8, \quad A_2 = 263.2, \quad A_3 = -59.50, \quad A_4 = 88.34 \\ B_0 = 62.68, \quad B_1 = -77.69, \quad B_2 = 61.82, \quad B_3 = 21.67, \quad B_4 = -4.056$$

(56) に入れると $\phi_0 = 48.18, \phi_1 = 28.05, \phi_2 = -9.32, \phi_3 = -55.16, \phi_4 = -63.94$

となり、更に (58) (59) にこれらを入れると解式は

$$\theta_m = \frac{\delta^2}{126} [48.18 + 28.05\delta - 9.32\delta^2 - 55.16\delta^3 - 63.94\delta^4] \dots\dots\dots (60)$$

$$\left(\frac{Wc}{kL}\right)^{-1} = \frac{\delta^3}{\pi \times 423 \cdot 360} [4.047 + 3.627\delta + 0.037\delta^2 - 5.856\delta^3 - 8.635\delta^4] \dots\dots\dots (61)$$

となる。 δ をパラメータとして $\delta=0.1, 0.2, \dots$ を入れて θ_m と Wc/kL との理論曲線を得、同じ図上に実験による測定値を記入したのが第1図である。なお全図中には油Aについて $s'=0.3$ および $s'=0.4$ の理論と実験との比較を示し、これらが第1図右下の一群である。

同様にモビル油 B について冷却 $s'=0.2, 0.3$ および 0.38 の場合の理論曲線と実測点との比較が第1図左上の一群である。ただし Wc/kL の小さいところでは、 $\delta < 1$ なる仮定での計算の省略が不適当になり、理論式をそのまま適用することの困難な部分もあり、特にその部分に対しては理論曲線を延長した。

10. 速度分布の例

速度分布は5節においてその解を与えているのであるが、これを整理すると次のごとくである。

$$w_1/B = y - \frac{1}{2}(1 - \alpha\xi)y^2 + \frac{1}{6}(\beta\xi^2 - \alpha\xi)y^3 + b_4'y^4, \quad (y \leq \delta) \quad (43)$$

$$w_2/B = e' - f'(1 - y)^2, \quad (y \geq \delta) \quad (44)$$

ここに

$$B = 60/[60e'(1 - \delta)^2 - 30f'(1 - \delta)^4 + 4b_4'\delta^5(6 - 5\delta) + \{60\delta^2 - 20(3 - \alpha\xi)\delta^3 + 5(\beta\xi^2 - \alpha\xi + 3)\delta^4 - 4(\beta\xi^2 - \alpha\xi)\delta^5\}] \quad (46)$$

$$b_4' = b_4/B, \quad e' = e/B, \quad f' = f/B \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} b_4 &= B \left\{ -\alpha\xi - (\beta\xi^2 - \alpha\xi)\delta + \frac{1}{2}(\beta\xi^2 - \alpha\xi)\delta^2 \right\} / 4\delta^2(3 - 2\delta) \\ e &= B \left\{ \delta - \frac{1}{2}(1 - \alpha\xi)\delta^2 + \frac{1}{6}(\beta\xi^2 - \alpha\xi)\delta^3 \right\} + b_4\delta^4 + f(1 - \delta)^2 \\ f &= -(B/2) \{ -(1 - \alpha\xi) + (\beta\xi^2 - \alpha\xi)\delta \} - 6b_4\delta^2 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\xi = 12/\delta(9 + 3\delta + \delta^2) \quad (25)$$

すなわち、 δ の値を与え上記の式を順次に使用することにより、熱境界層内外の速度分布 w_1 および w_2 が求められるのである。また δ が与えられたときこれに対応する管の長さは (61) が決定している。速度分布の例として、油 A・冷却条件 $s' = 0.3$ なる場合につき、一・二の断面における速度を示す。この場合

$$\alpha = 3.534 \quad \beta = 9.460,$$

$\delta = 0.1$ なる断面にて

$$\xi = 12.89, \quad B = 0.6646, \quad b_4' = -1.701 \cdot 25$$

$$f' = 3.440, \quad e' = 3.193$$

$\delta = 0.3$ なる断面にて

$$\xi = 4.004, \quad B = 0.8520, \quad b_4' = -56.96$$

$$f' = 3.556, \quad e' = 2.792$$

これらの値を (43) および (44) に入れると、 $\delta = 0.1$ および $\delta = 0.3$ に相当するところの速度分布が得られる。その結果を第2図に示す。

実験の困難のため速度の実測は行っていないが、第2図は理論的に冷却管内油の速度曲線が放物線といかに異なったものとなるかを示すものであろう。

11. 結 論

本論文における解法は熱境界層なる概念を導入し、境界層問題における Kármán-Pohlhausen の解法を熱伝達の問題に応用したものであって、具体的には筆

者のさきの論文⁽⁶⁾の方法を粘度が温度によって変る場合へ拡張したものである。その結果は $G_z = Wc/kL$ と無次元平均温度 θ_m との関係が、管の出口における熱境界層の無次元厚さ δ をパラメータとして、(60) と (61) によって与えられ、また速度分布は(43)と(44)によって与えられるのである。

熱伝達については、この理論と筆者の実験との比較を第1図に示したが、熱の実験であるからある程度の誤差はやむを得ないものとして、両者は相当に良く一致していると思われる。したがって油冷却管の解析の理論としては一応その目的を達し得たのではないかと考える。

なお油冷却の実験としてはさきに述べしごとく外国の論文がかなり有るにかかわらず、これらと本理論との比較を行わなかったが、それは両者の比較がきわめて困難であるか、または比較することが不適当なためである。元来これらの実験は θ_m に s' および K なる

無次元量が影響することを考慮せずに行われているのであって、本理論と比較することは無理なのである。それは従来の理論から見ればむしろ当然なことかも知れない。

また速度分布については、実験的にそれを確認することはできなかったが、理論的な結果の計算例のみを第2図に示した。

最後に御指導、御鞭達を賜った東京工業大学 板谷教授に厚く感謝の意を表する。

文 献

- (1) T. Drew, *Am. Inst. Chem. Engr., Trans.*, **26** (1931) 99.
- (2) H. Kraussold, *V. D. I., Forschungs* 351 (1931).
- (3) A. Colburn, *Am. Inst. Chem. Engr., Trans.*, **29** (1933), 174.
- (4) E. Sieder & G. Tate, *Ind. Engg. Chem.*, **28** (1936), 1429.
- (5) 浅尾, 本論文集, 1039ページ.
- (6) 浅尾, 機械学会論文集, **22**, 124 (昭 31), 909.
- (7) 浅尾, 機械学会論文集, **17**, 62 (昭 26), 167.

532.542.1

気水二相流の摩擦損失に及ぼす管内面あらさの影響*

勝 原 哲 治**

Influences of Roughness of Inner Surface of Pipe upon Pressure Drop due to Friction in Two-Phase Flow

by Tetsuji KATSUHARA

In this paper, the author has experimentally investigated the influences of the roughness of the inner surface of pipe upon the pressure drop due to friction in two-phase flow of the mixture of air and water in inclined and vertical pipes.

The results of investigation may be summarized as follows:

- (1) For the wide range of the roughness, the ratio of pressure drop is written as follows:

$$\frac{\Delta P_{TP}}{\Delta P_w} = (1 - \varphi_d)^{-Z}$$

where ΔP_{TP} pressure drop due to friction in two-phase flowing, ΔP_w that in water alone flowing, φ_d dryness fraction, Z value decided by the roughness and inclination angle of pipe.

- (2) The variations of the values of Z due to the roughness of inner surface and the inclination angle of pipe been clarified.
- (3) The influences of roughness and inclination angle upon the ratio of the coefficient of friction are presented.

1. 緒 言

気水二相流は化学工業における諸装置、蒸気ボイラ

* 昭和 33 年 6 月 6 日 九州支部(鹿児島)講演会において講演、原稿受付 昭和 33 年 7 月 28 日。

** 正員、九州工業大学(福岡県戸畑市中原)。

をはじめ工業上多くの方面に見られる。したがって、これに関する研究もいろいろな立場から行われている。とくに、管内の摩擦損失については、すでに多くの重視すべき研究がある。このうちのおもなるものだけをひろっても、流動様式との関係を考察したもの⁽¹⁾