(v) 軸受周囲温度が低い場合には, 供給する黒鉛が細かいほど摩擦モーメントは小さく, 最適黒鉛供給量は玉軸受1個あたり約 0.075 g/mn であるが, 軸受周囲温度が高くなると, 使用する黒鉛の粒度および量は摩擦モーメントにあまり影響しない。

終りに本研究に多大の御便宜をいただいた日本黒鉛工業会社, 東洋ベアリング製造会社ならびに実験に協力していただいた谷口修, 平野晃佑, 森 祐治3君に

深甚の謝意を表する。

文 献

- (1) Z. N. Nemeth & W. J. Anderson, *Lubrication Engg.*, (July-August, 1955), p. 267.
- (2) Z. N. Nemeth & W. J. Anderson, *SAE Trans.*, **63**, (1955), 556.
- (3) Robert H. Savage, *Appl. Phys.*, *J.*, **19**, 1 (1948), 1.

621.822.8:621.22

円筒ころ軸受の流体潤滑負荷能力について*

佐々木外喜雄**, 森 美郎**, 豊島敏雄***

Load Capacity of Cylindrical Roller Bearing under Fluid-Film Lubrication

by Tokio SASAKI, Haruo MORI, and Toshio TESHIMA

Formerly we had reported "the fluid lubrication theory of cylindrical roller bearing with consideration of relationship between viscosity and pressure" by approximate calculation. Afterward, applying the graphical solution in the report "film thickness between gear teeth" by Hersey, we have obtained the exact solution of load capacity of the cylindrical roller bearing under the fluid lubrication and report it in this paper. And in this report, two assumptive equations, namely parabolic and exponential equations, for the relationship between viscosity and pressure are compared. The load capacity of cylindrical roller bearing under the fluid-film lubrication changes with the change of the roller arrangement in operated bearing, and becomes infinite when the film thickness takes some value other than zero. So the possibility of the fluid-film lubrication in cylindrical roller bearing is large in the actual operation.

1. 緒 言

一般にころがり軸受は転動体と内外輪軌道面のころがり接触によって荷重を支持するもので, 油膜潤滑を主体とするすべり軸受とは全く作動原理を異にするものと考えられている。しかし速度が速くなり, しかも比較的軽荷重で使用されるならば, 十分に油膜が発生し流体潤滑の状態で作動する可能性がかなり大きい。このことに関して筆者らは「粘度の圧力による変化を考慮した円筒ころ軸受の流体潤滑理論」⁽¹⁾をさきに発表した。しかしそこで示された結果は近似解であった。Hersey らは「歯車潤滑における油膜厚さ」⁽²⁾について図式解法による厳密解を得ている。ここではこれと

同様の図式解法を円筒ころ軸受の流体潤滑負荷能力に応用した結果について述べる。

2. 基 礎 計 算

第1図に示すごとく二つの円筒が最小すきま h_0 の油膜をへだてて回転している場合を考える。このとき二次元の流体潤滑の問題として取扱うと, 油膜圧力 p は次の式によって与えられる。

$$\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial s} = \sqrt{2rh_0} \frac{U}{h_0} (\cos^2 s - K_1 \cos^4 s) \quad \cdots (1)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{2rh_0} \tan s \\ 1/r &= 1/r_1 + 1/r_2 \\ U &= \frac{U_1 + U_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad \cdots (2)$$

いま油の粘性係数 μ がゲージ圧力 p に対して次の関係で変化するものと仮定する。

* 昭和32年9月20日 創立60周年記念地方第7区(金沢)講演会において講演, 原稿受付 昭和33年10月27日。

** 正員, 京都大学工学部(京都市左京区吉田本町)。

*** 正員, 福井大学工学部。

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{p+k}{k} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで μ_0 は大気圧における粘性係数, k は油の種類によって異なる定数である. (3) 式を用いて

Sommerfeld の境界条件

$$\left. \begin{array}{l} x = -\infty \dots\dots p = 0 \\ x = 0 \dots\dots p = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

のもとに (1) 式を解いて, 2 円筒間の油膜圧力 p を求めると

$$p = \frac{4HTk}{(1+T^2)^2 - 4HT} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし

$$T \equiv \frac{-x}{\sqrt{2rh_0}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$H \equiv \frac{\mu_0 U \sqrt{2rh_0}}{kh_0^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$dp/dT=0$ において油膜圧力の最大になる位置を求めると $T=1/\sqrt{3}$. これを (5) 式に代入すると最大油膜圧力 p_m は

$$p_m = k \left(\frac{1}{1 - \frac{3\sqrt{3}}{4}H} - 1 \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

(8) 式を見てわかるように p_m は $H = \frac{4}{3\sqrt{3}} \doteq 0.77$ のとき無限大になる. 単位幅の 2 円筒間の全圧力すなわち油膜負荷能力 F_n は

$$F_n = \int_{-\infty}^0 p dx = \frac{2\mu_0 U r}{h_0} (J/H) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし

$$J \equiv \int_0^{\infty} \frac{4HTdT}{(1+T^2)^2 - 4HT} \quad \dots\dots\dots (10)$$

次に油の粘度変化を (3) 式のかわりに

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p} \quad \dots\dots\dots (11)$$

のごとく指数関数の形で仮定すると, 前の場合と同様の計算より油膜圧力 p は

$$p = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - 4H' \frac{T}{(1+T^2)^2} \right] \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし

$$H' \equiv \frac{\mu_0 U \sqrt{2rh_0} \alpha}{h_0^2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

しかして (12) 式で得られる油膜圧力も (8) 式で得られる油膜圧力と同様に $T=1/\sqrt{3}$ で最大となり, さらに $H' = 4/3\sqrt{3}$ のとき無限大になる. 油膜負荷能力 F_n' は

第 1 図

第 2 図

$$F_n' = \int_{-\infty}^0 p dx = \frac{2\mu_0 U r}{h_0} (J'/H') \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし

$$J' \equiv \int_0^{\infty} -\ln \left[1 - \frac{4H'T}{(1+T^2)^2} \right] dT \quad \dots\dots\dots (15)$$

したがって J あるいは J' を図式積分によって求めると (9) 式あるいは (14) 式によって 2 円筒間の流体潤滑負荷能力を求めることができる. 第 2 図は J の被積分関数 $4HT / \{(1+T^2)^2 - 4HT\}$ と T の関係を例示したもので, この場合 $H=0.125$ にとっている. この曲線は (5) 式からわかるように油膜圧力分布の形を示すものである. H あるいは H' の値に対して J あるいは J' の値を求めて示したものが第 1 表である.

3. 円筒ころ軸受への応用

いま 1 個のころと内輪または外輪の関係について

第 1 表

$H(H')$	0.125	0.250	0.375	0.500	0.570	0.625	0.660	0.700	0.730	0.750	0.760	0.765
J/H	2.166	2.522	2.949	3.710	4.379	5.363	6.564	8.091	11.12	15.95	23.42	35.62
J'/H'	2.084	2.232	2.427	2.625	2.807	2.976	3.121	3.350	3.658	3.893	4.092	4.327

考える。(2)式の
 U の内輪側およ
び外輪側の値に
対して U_i およ
び U_e (以下 i
は内輪側, e は
外輪側を示す添
字)で表わすと,
これらは ころ

第 3 図

と内外輪間に相対的すべりがなときは遊星歯車の考
えと同様にして求めることができる。円筒ころ軸受を
内輪回転とし, その回転速度を N_i とする。しかると
きは公転する ころ の中心を原点とすると, ころ の自
転による周速 u_a は

$$\begin{aligned} u_a &= 2\pi R_a \frac{R_e}{R_i + R_e} \frac{R_i}{R_a} N_i \\ &= 2\pi \frac{R_i R_e}{R_i + R_e} N_i \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

内輪周速 u_i は内輪回転による速度と ころ の公転に
よる速度の差であるから

$$\begin{aligned} u_i &= 2\pi R_i N_i - 2\pi R_i \frac{R_i}{R_i + R_e} N_i \\ &= 2\pi \frac{R_i R_e}{R_i + R_e} N_i \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

したがって (2) 式より

$$U_i = \frac{u_a + u_i}{2} = 2\pi \frac{R_i R_e}{R_i + R_e} N_i \quad \dots\dots\dots (18)$$

同様にして

$$U_e = 2\pi \frac{R_i R_e}{R_i + R_e} N_i \quad \dots\dots\dots (19)$$

また (2) 式の r に対する内輪側および外輪側の値 r_i
および r_e は

$$r_i = \frac{R_i R_a}{R_i + R_a} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$r_e = \frac{R_e R_a}{R_e - R_a} \quad \dots\dots\dots (21)$$

以上の理論による円筒ころ軸受の流体潤滑負荷能力
の実例を示すにあたり, 円筒ころ軸受の寸法および潤
滑油の粘度を次のごとくとる。

$$\begin{aligned} R_i &= 25 \text{ mm}, & R_a &= 5 \text{ mm}, & R_e &= 35 \text{ mm} \\ n(\text{ころの総数}) &= 13, & c_r(\text{半径すきま}) &= 9.5 \mu \\ \mu_0 &= 4.3 \times 10^{-7} \text{ kg s/cm}^2 \end{aligned}$$

第 2 表

H	0.250	0.500	0.625	0.700	0.750
$h_{oi}(\mu)$	1.670	1.051	0.902	0.841	0.804
$F_{ni}(\text{kg/cm})$	11.43	26.10	43.90	70.90	155.9
$p_m(\text{kg/cm}^2)$	120	465	1 079	2 495	9 355

上記寸法は円筒ころ軸受 N 208 あるいは NU 208 に
相当するものであり, c_r は 1 実測値である。 μ_0 の値
は 90 番タービン油に相当するものであり, k および
 α の値は実測値が得られず, 種々文献を参考として次
のごとく選んだ。

$$\begin{aligned} k &= 500 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{および} \quad 1\,000 \text{ kg/cm}^2 \\ \alpha &= 2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg} \end{aligned}$$

1 計算例として内輪回転速度 9 000 rpm の場合の内
輪と ころ の間の油膜について, $k=1\,000 \text{ kg/cm}^2$ の
ときの計算結果を示すと第 2 表のごとくである。最小
すきまが約 0.8μ で約 156 kg/cm (ころ の軸方向長
さ 1 cm 当りの全圧力 kg。本研究では二次元の流体
潤滑の問題として取扱っているの, 流体潤滑負荷能
力は ころ の軸方向長さに比例する。したがって ころ
の軸方向長さの異なるものにも本計算結果が適用でき
るごとく, 以下負荷能力の単位を kg/cm として表わ
している) の負荷能力になるが, このとき油膜最大圧
力は $9\,400 \text{ kg/cm}^2$ 近くなっている。

以上のような計算法により, 軸受内外輪と ころ の
間の流体潤滑負荷能力を ころ が種々の位置にある場
合について求め, 各 ころ の負荷能力の垂直成分を加
え合わせるにより円筒ころ軸受の流体潤滑負荷能
力が得られる。以下 $k=1\,000 \text{ kg/cm}^2$, $N_i=6\,000 \text{ rpm}$
の場合についてその方法を示し, $k=500 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha=$
 $2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ などの場合については結果のみを示す
こととする。

(7) 式および (9) 式を用いて H と内輪と ころ の
間の油膜厚さ h_{oi} および外輪と ころ の間の油膜厚さ
 h_{oe} , H と内輪と ころ の間の全圧力 F_{ni} および外輪
と ころ の間の全圧力 F_{ne} の関係を求めると, h_{oi} と
 F_{ni} および h_{oe} と F_{ne} の関係がわかる。これを第 4 図
に示す。このとき ころ の遠心力を考えなければ, こ
ろ の内輪側と外輪側の油膜全圧力は等しいはずであ
る。第 4 図においてある全圧力 F_n に対する h_{oi} と

第 4 図

第 5 図

第 6 図

第 7 図

h_{oe} を加え合わせると、ある ころ の位置における全すきま $h_{ot} (=h_{oi}+h_{oe})$ と全圧力 F_n の関係が求められる。第 5 図はこれを示す。軸受が荷重を受けたとき内外輪は真円のままで、ただ内輪が偏心することによって荷重をささえるものとする、ころの角度位置 θ と全すきま h_{ot} の関係は次式のごとくであるが、これを図示すると第 6 図のごとくである。

$$h_{ot} = c_r(1 - \epsilon \cos \theta) \dots\dots\dots (22)$$

上式で c_r は半径すきま、 ϵ は偏心率、 θ は ころ が軸受内で最低位置にある場合を $\theta=0$ としてこれより時計方向に測った角度である。第 5 図と第 6 図より ころ の位置 θ と全圧力 F_n の関係を種々の ϵ について求めると第 7 図のごとくである。軸受の負荷能力 W を求めるには各 ころ の全圧力の垂直成分を求める必要があるが、第 8 図は第 7 図より求めた $F_n \cos \theta$ と θ の関係を示す。第 8 図からわかるように ころ 1 個の負荷能力 $F_n \cos \theta$ についてみると、 $\theta=0$ すなわち最低位置の近傍で急激に大きくなる。とくにある値以上の ϵ では無限大になる。このとき軸受の負荷能力も無限大になる。負荷能力が無限大になる最小 偏心率を (7) 式において $H=4/3\sqrt{3}$ とおいて求めると第 9 図のごとくである。軸受内の最小油膜厚さ $h_{o \min}$ は $\theta=0$ における ころ と内輪の間に生ずるが、第 9 図には ϵ と対応した $h_{o \min}$ の値を合わせ示している。たとえば $N_i=20\,000$ rpm では偏心率約 0.7 で負荷能力は無限大になり、このとき軸受内の最小油膜厚さは約 1.35μ である。ころ の総数は 13 であるから一つの ころ が $\theta=0$ にある場合には他の ころ は $\theta=(\pm 360^\circ/13 \times n)$ $n=1, 2, \dots, 6$ にある。

このような状態を配置 I として第 3 表に示してい

第 8 図

第 9 図

第 10 図

(a)

る. 表中の配置Ⅱは最低位置のころが $\theta = 180^\circ/13 \doteq 13.85^\circ$ にある場合の配置である. しかしところのいかなる配置状態も第3表配置Ⅰから配置Ⅱまでの変化中の配置のあるものと等しい. したがって配置Ⅰと配置Ⅱの間の軸受負荷能力を調べると, すべての配置状態における軸受負荷能力がわかる. 配置Ⅰと配置Ⅱの間を等間隔に変えた6種類の配置状態について, 第8図より求めた軸受負荷能力 W を, そのときの最低位置にあるころの角度位置 θ との関係として示したものが第10図である. 第10図よりわかるように偏心率が小さいときは負荷能力は小さくほぼ一定であるが, 偏心率が大きくなると負荷能力は大きくまたその変化も大きくなる. さらに偏心率が大きくなると配置ⅠとⅡの間の配置Ⅰ側で無限大になり, さらにすべての配置状態で無限大になる. このようなころの配置の変化による軸受負荷能力の変化はころがり軸受運転における必然的な振動の内的原因と見られる.

以上 $N_i = 6000$ rpm の場合について軸受負荷能力の求め方を説明したが, 同様の方法で $N_i = 3000, 10000, 15000, 20000, 25000$ rpm の場合の負荷能力を求め, それらをまとめて示したものが第11図(a), (b)である. 第11図(a)中の破線はそれぞれ()内に示す回転速度における軸受負荷能力が無限大になる最小偏心率の位置を示すとともに, 各曲線の漸近線となっている. 回転速度が小さいほど初めゆるやかに増加

第 3 表

I	0	± 27.69	± 55.38	± 83.08	± 110.77	± 138.46	± 166.15
II	$+13.85$	$+41.54$	$+69.23$	$+96.93$	$+124.62$	$+152.31$	$+180.00$
		-13.84	-41.53	-69.23	-96.92	-124.61	-152.30

(b)

第 11 図

し、上述の偏心率の近くで急激に増加する。第 11 図 (b) は回転速度を横軸として示したもので、偏心率が大きいほど軸受負荷能力の回転速度に対する増加率が大きいことを示している。

以上は $k=1000 \text{ kg/cm}^2$ の場合であるが、 $k=500 \text{ kg/cm}^2$ あるいは $\alpha=2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ の場合を同様の方法で計算した結果を第 12 図、第 13 図 (a), (b), 第 14 図 (a), (b) に示している。第 12 図は第 9 図に対応する $k=500 \text{ kg/cm}^2$ の場合の結果を示す。軸受内に発生する最小油膜厚さ $h_{0 \min}$ は軸受荷重が無限大の場合の値であり、軸受荷重が有限のある値であれば、軸心の偏心率は図中の ϵ よりも小さく、油膜厚さは図中の $h_{0 \min}$ より大きい。しかし図中の $h_{0 \min}$ は軸受内外輪軌道面およびころの仕上精度と比較して十分大きい値であり、回転速度の大きい場合には理論的には完全に流体潤滑が行われることが証明できる。

第 12 図

(a)

第 12 図はまた $\alpha=2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ の場合にも当てはまる図である。なぜならば第 12 図は (7) 式で $H=4/3\sqrt{3}$ として求めたものであるが、 α の値を用いるときは (13) 式を利用すればよく、(7) 式および (13) 式は k と α が分子逆にはいており、しかも $k=500 \text{ kg/cm}^2$ と $\alpha=2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ が互に逆数関係にあるからである。第 13 図 (a), (b) は $k=500 \text{ kg/cm}^2$ 、第 14 図 (a), (b) は $\alpha=2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ の場合の流体潤滑負荷能力を示している。第 11 図と第 13 図を比較してわかるように k の値を小さく仮定した方がはるかに負荷能力が大きく、同じ軸受荷重の場合には偏心率が小さくなる。次に第 14 図を第 11 図および第 13 図と比較すると、軸受負荷能力は $k=1000 \text{ kg/cm}^2$ の場合に最も小さく、 $k=1000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\alpha=2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ 、 $k=500 \text{ kg/cm}^2$ の順に大きくなっている。しかし偏心率が小さいときは $k=1000 \text{ kg/cm}^2$ と $\alpha=2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ の場合が比較的近い値を示しており、負荷能力が無限大になる偏心率の近傍では $k=500 \text{ kg/cm}^2$ と $\alpha=2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ の場合が比較的近い値を示している。このような計算結果と関連して油の粘度変化の式を parabolic equation (3) 式および exponential equation (11) 式のごとく仮定した場合を次のごとく比較説明することができる。(3) 式および (11) 式を展開すると

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{p+k}{k} \right)^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$= \mu_0 \left(1 + 2\frac{p}{k} + \frac{p^2}{k^2} \right) \dots\dots\dots (23)$$

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p} \dots\dots\dots (11)$$

$$= \mu_0 \left(1 + \alpha p + \frac{\alpha^2 p^2}{2!} + \frac{\alpha^3 p^3}{3!} + \dots \right) \dots\dots\dots (24)$$

(b)

第 13 図

(a)

(b)

第 14 図

偏心率が小さいときは油膜厚さは厚く、油膜圧力 p も比較的小さい。(23)式および(24)式において p を小さいとすると、両式を第2項まで等しくする条件 $\alpha = 2/k$ すなわち $\alpha = 2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ に対しては $k = 1000 \text{ kg/cm}^2$ の場合に油の粘度 μ が近似し、負荷能力も近い値を示す。また偏心率が大きく、最大油膜圧力 p_m が極端に大きくなると、(7)式および(13)式に H および H' を $4/3\sqrt{3}$ として代入して得られる条件 $\alpha = 1/k$ すなわち $\alpha = 2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ に対しては $k = 500 \text{ kg/cm}^2$ の場合に負荷能力が近似してくる。

4. 結 論

本論文は図式計算ではあるが、円筒ころ軸受の流体潤滑負荷能力の厳密解を得たことを特徴としている。しかして計算結果を結論的に要約すると次のごとくである。

(i) 流体潤滑負荷能力は偏心率が1にならなくとも、いいかえると0でないある油膜厚さをもって無限

大になること。したがって軽荷重高速回転の場合には理論的に流体潤滑が行われる可能性がかなり大きいこと。

(ii) 軸受回転によるころの配置の変化により、一定の偏心率の場合にも流体潤滑負荷能力は変化するが、この変化は偏心率が大きいほど大きくなること。

(iii) 偏心率が大きいほど軸受負荷能力の回転速度に対する増加率が大きいこと。

(iv) 油の圧力による粘度変化を parabolic equation (定数 k) および exponential equation (定数 α) で仮定した場合に、流体潤滑負荷能力の近似するような定数 k および α の対応は、偏心率が小さい場合には $\alpha = 2/k$ 、偏心率が大きい場合には $\alpha = 1/k$ である。

文 献

- (1) 佐々木, 森, 小林, 豊島, 機械学会論文集, 22, 122(昭31), 744.
- (2) M.D. Hersey & D. B. Lowdenslager, ASME, Trans., 72(1950-10), p. 1035.

論 文 集 24 巻 142 号 (昭 33-6) 正 誤 表

執 筆 者 名	ページ	欄	行	誤	正
佐々木 外喜雄 岡村 健二郎	374	左	下から 11	$= \tan^{-1} \pi DN / pn$	$= \tan^{-1} pn / \pi DN$