539. 4. 011. 23/24 : 539. 4. 019. 1

ひずみ速度で降伏点の変る理論*

中 川 有 三**

Yield Point depends on the Rate of Strain Its Theory

by Yuzo NAKAGAWA

It is now recognized as a well-known fact that the yield point depends on the rate of strain as a result of the investigation by Ludwik, Manjoine and other investigators. The author presents a new theory in order to explain this phenomenon and expresses it by a model which consists of two springs, two dashpots and one friction block. The arrangement of these component parts in this model is somewhat different from any other models used widely in the field of rheology. The relation among the stress, the strain and the rate of strain is expressed by the following equations in this theory :

$$\sigma = E\varepsilon_e + B\dot{\varepsilon}_p \quad \text{and} \quad E\varepsilon_e = D + B\dot{\varepsilon}_p$$

where σ means the stress, ε_e ; the elastic strain, $\dot{\varepsilon}_p$; the rate of strain and D is the force acting on the friction block. As to the force acting on the dashpot, precise explanation will be given by the author in the next paper.

1. 降伏点とひずみ速度との関係

降伏点はひずみ速度によって変る。このことは最初 Ludwik(1909)によって発見され、その後 J. Winlock & R. W. Leiter(1936), Nadai & Manjoine (1940~1944)によって研究されている。降伏点ばかりでなく、一般に応力はひずみ速度に関係することが知られていて、その間に

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_0 \ln \frac{v}{v_0}, \quad (v > v_0), \quad v = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

の関係が成り立つことが知られている。Manjoine⁽¹⁾の試験結果では、ひずみ速度が $10^{-6} \sim 1$ (1/s)の間では上述の $\ln v$ に対して直線状に変化しているが、 $10 \sim 10^4$ (1/s) になると応力はもっと急激に上昇するようである。ゆえに、一般的には

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_0 \cdot f(\dot{\varepsilon})$$

として表わすべきである。

2. 著者の理論の模型表示

著者は、応力ひずみ曲線はひずみ速度によって変るものと考え、これに対して新しい理論をたてたが、これを模型で表示すると第1図のようになる。模型はばねとダッシュポットと摩擦片とを組合わせたもので、ダッシュポットの構造はピストンの小穴に板ばねの弁を取

付けることによって、これにかかる力をひずみ速度の任意の関数にすることができる。摩擦片は後に述べるごとく、2個の摩擦片がばねで互に圧縮されて接触を保っているものとする。摩擦片の背面は降伏点のおどり場に相当して一部分は平面になっていて、その他の部分は材料の硬化に応じて適当な曲面を持たしたものとする。

3. 著者の理論式

今、簡単のために、特別の場合として、応力はひず

第 1 図

* 昭和 32 年 4 月 2 日 第 34 期通常総会講演会において講演、
原稿受付 昭和 33 年 1 月 24 日。

** 正員、京都大学工学部(京都市左京区吉田本町)。

み速度によって直線状に変化するものと考え、図のダシユポットは普通の構造のものでよく、これにかかる力はひずみ速度に比例する。上記の模型において、ばねの弾性ひずみを ϵ_e 、ダシユポットのピストンの速度を $\dot{\epsilon}_p$ とすると、この模型を引張る応力は

$$\sigma = E\epsilon_e + B\dot{\epsilon}_p \dots\dots\dots (1)$$

で示され、さらにばね A にかかる力はダシユポット B と摩擦片 D に伝えられるから

$$E\epsilon_e = D + B\dot{\epsilon}_p \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここに B はダシユポットの抵抗の係数で、ここでは定数と考える。また D は一定ではなく、すべり始める時の限界値を D' とする。したがって、(1) と (2) とより

$$\sigma = D + 2B\dot{\epsilon}_p \dots\dots\dots (3)$$

または

$$\sigma = 2E\epsilon_e - D \dots\dots\dots (3)'$$

となる。一般的に B を定数と考えずに $\dot{\epsilon}_p$ の関数と考えれば広い場合に用いる。

(1)~(3) を種々の場合にあてはめてみる。

(a) **ひずみ速度一定の場合** この場合は $\dot{\epsilon}_p = \text{const.}$ とおける。応力は (1) によって弾性ひずみ ϵ_e とともに直線状に上昇する。摩擦片の抵抗も (2) によって漸次上昇する。この力が $D' = \mu Q$ の値に達すると摩擦片ですべりだし、降伏が起る。ここに Q は摩擦片を圧するばねの力で、 μ は静止の摩擦係数である。上降伏点ですべり、下降伏点まで下ると、摩擦片では運動摩擦係数のため $D'' < D'$ となり、この定数値に相当して、降伏応力は $\sigma_s = D'' + 2B\dot{\epsilon}_p$ で連続的に変形する。

(b) **ひずみ速度の非常に速い場合** ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_p$ が非常に速くなると、ダシユポットにかかる力が大きくなり、 $B\dot{\epsilon}_p \cong E\epsilon_e$ となると、摩擦片には力が作用せず(摩擦片はここでは弾性体とせず剛体として考えている)模型は2本の Maxwell 模型が並列した状態になる。したがって、(1) は $\sigma = 2E\epsilon_e$ となり、弾性係数は E の2倍となる。この理論ではひずみ速度が非常に大となれば弾性係数が大となるという結果になる。この現象は認められるようである。たとえば、京都大学教室の伊藤教授の実験結果⁽²⁾(第1表)によると、動的測定による弾性係数値は静的測定による値の約2倍に達している。また、コンクリートその他の材料でもひずみ速度によって弾性係数が数%高くなることが認められている。

(c) **ひずみ速度のおそい場合** この場合、 $\dot{\epsilon}_p \cong 0$ とおけば、 $\sigma = E\epsilon_e = D$ となり、摩擦片は剛体同様になり、1本のばねでできた Hooke 模型となる。した

第1表 岩石の弾性係数表

岩石名	弾性係数 E kg/cm ²		備考 (産地)
	静的測定	動的測定	
花こう岩	2.7×10^5	6.1×10^5	愛知県三州御影石
砂岩	2.0 "	6.0 "	和泉砂岩
大理石(粗粒)	3.2 "	6.8 "	山口県美彌市産
大理石(細粒)	4.5 "	7.0 "	同上

動的測定は超音波衝撃による。

第2図 (T. Vreeland, Jr.)

がって、弾性係数はひずみ速度によって $E \sim 2E$ の間に変るとい理論になる。

(d) **Microstrain** T. Vreeland Jr., D. S. Wood, D. S. Clarke(1953)⁽³⁾ は 0.112% C の鋼材を応力一定のもとに急速に引張って実験している。その結果、第2図のような曲線がえられている。応力が降伏点以下であると、応力ひずみ曲線はクリープ曲線と同様になる。模型は Voigt の模型を二つ重ねたと同様になる。ただ異なっている点は二つの Voigt 模型が左右いれ違っているだけである。したがって Microstrain に対してもこの模型で説明できる。

(e) **ひずみ硬化曲線** 材料が降伏点において変形がすすんで一応安定な状態に達してからは、材料は硬化して再び応力はひずみとともに上昇する。この現象は模型において摩擦片背面の形状を第1図のように応力ひずみ曲線の形状に応じて適当な曲面につくっておけば、ばねの力 Q は変化する。したがって、摩擦片にかかる力 D も増大して応力の上昇を説明できる。

著者は上記の模型に基づいて、クリープおよびリラクゼーションに対するひずみまたは応力の変化を表わす式を誘導した。これらの理論の展開および応用については本誌に載せる予定の後報にゆずる。

文 献

- (1) M.J. Manjoine, *Appl. Mech., J.*, 11 (1944), A-211.
- (2) 伊藤, 寺田, 爆破効果に影響する岩石の性質に関する研究, 昭和30年度科学研究費交付金による研究成果報告書, 採鉱の立場から見た岩石の性質に関する総合的研究, 昭和31年4月30日, 60ページ.
- (3) T. Vreeland Jr., D.S. Wood, & D. S. Clarke, *A.S.M., Trans.*, 45(1953), 620.