539. 373 : 539. 4. 001. 23 : 531. 259. 223

内圧による軟鋼円筒の降伏に関する実験結果と

中西の降伏理論との比較*

佐 藤 和 郎**

A Comparison between Experiments and Nakanishi's Theory on the Yield Point of Mild Steel Cylinders under Internal Pressure

by Yasuo SATO

According to our experiments, the yielding of mild steel cylinders under internal pressure depends on the ratio γ of the outer to inner diameter of the cylinder;

1. In the case of $\gamma < 1.55$, the yielding takes place under constant pressure.

2. In the case of $\gamma > 1.55$, the yielding takes place gradually as internal pressure increases. Those experimental relations are shown in Fig. 2.

All the experimental results agreed very well with the Nakanishi's theory on the yield point of mild steel.

1. はじめに

軟鋼の降伏は、弾性域から塑性域へ最初に移行する点である。荷重とひずみの関係はこの点において急に折れ曲りを生じ、測定は正確にできるので、この点は塑性の研究に非常に便利な点である。

この報告は、1本の軟鋼丸棒（C:0.39%）から外径と内径の割合の異なった種々の円筒を削り出し、これに内圧をかけて、円筒の肉厚、すなわち応力分布が降伏点に及ぼす影響について系統的に調べたものである。

その実験結果は、中西がすでに樹立している軟鋼の降伏に関する二つの法則に従って降伏は起るものであることを示した。すなわち、中西の理論によれば、円筒の外径と内径の比を γ としたときに、降伏は $\gamma < 1.55$ の範囲では断面全体の安定の問題であって、 $\tau = \tau_y$ の条件で起り、 $\gamma > 1.55$ の範囲では局部的な問題であって、降伏は $\tau_s = 1.5\tau_y$ の条件で起り、その結果、前者では内圧一定で降伏は広がるのに対して、後者では内圧を増さなければ降伏は広がらないはずである。実験結果はすべて、この理論が示すとおりに出ている。

2. 実験およびその結果の考察

試験片は外径 1 in の 1 本の軟鋼棒（C:0.39%）か

ら削り出したものである。焼なましは素材のときに 850°C で 2 時間行い、その後試験片に加工した後、その加工の影響を除く目的で再び 750°C で鋳物の削りくずとともに箱に入れて 1 時間焼なましを行ったものである。冷却はいずれも炉中で徐冷を行った。

第 1 図は試験片に内圧をかけるときの取付部のようすを示したものである。試験片の外径および内径は第 1 表に示しておいた。ひずみの測定には抵抗線ひずみ計を用い、試験片の表面に軸方向と円周方向に抵抗線をはって、両方向のひずみを測定した。圧力はブルドン管型の圧力計を用いて測定を行い、この圧力計は死荷重によって、試験の前と後に検定を行って、異常がないことを確かめられたものであって、圧力計の指示は十分信頼のおけるものである。

第 2 図は実験結果を円筒の外径と内径の比の順に、いいかえれば肉厚が薄いものから厚いものの順に示したものである。横軸には円周方向のひずみ ϵ_t を、縦軸には内圧 p を採ってある。この実験結果をみてすぐわかることは、肉厚が薄いときと厚いときとでは、降伏点における圧力とひずみの関係が異なっていることである。すなわち、はじめの 3 本の円筒では、降伏点

第 1 図

* 昭和 33 年 10 月 27 日 東京秋期講演大会において講演、原稿受付 昭和 33 年 11 月 5 日。

** 正員、航空技術研究所(三鷹市新川 700)。

第 2 図

Yから後のひずみは圧力が一定で増しているのに対して、後の円筒では、最初 Y' 点で曲って弾性線からはずれていて、この点が降伏点であることはわかるが、その後の圧力とひずみの関係が、圧力が一定でひずみが増すのではなくて、圧力を増さなければひずみが増していないことであり、更に変形が進んだ後、再び Y 点において折れ曲りを生じ、この点以後は圧力が一定でひずみを増していることである。ただし最後の $\gamma = 2.225$ の円筒では使用した圧力計の容量が 2000 kg/cm^2 であったため、Y 点に相当するところまで圧力を上げて実験値を採ることができなかったため、水平部が現われていない。

円筒に内圧をかけたときに、降伏点における圧力とひずみの関係は、円筒の肉厚によって、第 2 図に示すようになるということは、肉厚が薄いと厚いときとは降伏の仕方が異なっているものと思われる。このことは非常に興味あることと思われるので、もう少し検討を続けてみよう。

実験結果から、荷重とひずみの関係が水平になる Y 点における圧力を p_y とし、また図の Y' 点における圧力を $p_{y'}$ として求めてみると第 1 表に示すようになる。これを γ に対して図示してみると第 3 図に示すようになる。図において、 p_y および $p_{y'}$ の実験値は 2 本の曲線 I および II の上にそれぞれよく乗っていて、しかも曲線 I および II は $\gamma = 1.55$ 付近で交わっている。第 4 図は第 2 図の実験結果から、降伏点における円周方向のひずみを求めて γ に対してかいたものである。図の ϵ_{ty} は降伏点以後の圧力とひずみの関係が水平になる場合のひずみであり、 $\epsilon_{ty'}$ は降伏点

第 3 図

第 4 図

以後の圧力とひずみの関係が内圧を増さなければひずみを増さない場合のひずみを示すものである。実験結果は図にみるようにひずみ ϵ_{ty} は曲線 I に、 $\epsilon_{ty'}$ は曲線 II にそれぞれよく乗っていて、曲線 I および II は、第 3 図の場合と同様に $\gamma = 1.55$ 付近で交わっている。

以上の実験結果からみて、円筒に内圧をかけたとき

の降伏は、 $\gamma=1.55$ 附近を境にして、円筒の肉厚がそれよりも薄いときと厚いときとでは、降伏の仕方が全く別なものであることは間違いない。

3. 実験結果と中西の降伏理論との比較

その 1. 実験結果と中西の降伏に関する理論とを比較する前に、この理論の概要を述べて、まず定性的な比較を試みよう。

中西は多くの軟鋼の降伏に関する研究から、降伏点としては降伏点を採るべきであること、降伏はせん断応力によって起ること、降伏現象は従来からある塑性に関する仮説からは決して説明できないこと等を指摘し、降伏は次の二つの法則に従って起ることを実証している⁽¹⁾。

$$\bar{\tau} = \tau_y \dots\dots\dots (1)$$

$$\tau_s = 1.5\tau_y \dots\dots\dots (2)$$

ただし

τ_y は均等応力のもとにおける降伏せん断応力、または、降伏が進行しているときに降伏部分に働いているせん断応力であって、これは荷重の種類にかかわらず材料について一定値、

$\bar{\tau}$ は降伏面全体についてのせん断応力の平均値であるが、荷重に対するきき方を考慮に入れた附重平均値である。したがって均等応力のもとにおける降伏は当然 (1) 式に含まれる。

τ_s はせん断応力の最大値である。

降伏が断面全体の問題であるということは、応力の大きい部分が降伏を起すのに対して、応力の小さい部分が支持しているということである。ところが (1) 式で表わされる附重平均値さえ小さければ——応力の大きい部分の面積がせまく、応力の小さい部分の面積が広いような場合——応力の小さい部分が応力の大きい部分をどこまでも弾性的に支持するかというと、そうは行かないで、それには限度があって、(2) 式がその限度を与えるものである。さて、降伏が (1) 式に従って起るときには、断面全体の安定がこわれるのであるか

ら、降伏点以後の試験片の変形は、一様ではなく、部分的に荷重一定で変形を起し、その結果、降伏点以後の荷重と ひずみ の関係は、第 5 図 (a) に示すごとく荷重が一定で平均の ひずみ が増すことになる。ところが降伏が (2) 式に従って起るときには、断面全体の安定はまだこわれないけれども、局部的にせん断応力最大の部分が降伏をするのであるから、その後は荷重を増さなければ降伏は広がらないので、そのときの降伏点以後の荷重と ひずみ の関係は第 5 図 (b) に示すごとくなる。

もし、この理論が正しいものとすれば、円筒に内圧をかけたときの降伏は、肉厚が薄いときには (1) 式に従い、荷重と ひずみ の関係は第 5 図 (a) のごとくなり、肉厚が厚いときには (2) 式に従い、このときの荷重と ひずみ の関係は第 5 図 (b) のごとくなるであろうことは、次の理由から容易に推察をすることができ

る。第 6 図は円筒に内圧をかけて降伏させたときの横断面上における ひずみ 模様である⁽²⁾。これからみてもわかることは、降伏は円筒の軸に平行な面で、しかも半径に対して 45° 傾いた曲面内で起っている。一般に円筒に内圧をかけたときに、この面内で弾性的に支持しているせん断応力 τ の分布は第 7 図に示すように半径の二乗に逆比例しているのに対して、これを支持している面積は半径に比例して増している。この結果応力が大きいところの面積はせまく、応力が小さいところの面積は広くなっており、この傾向は肉厚が厚くなるに従ってますます顕著になるので、肉厚が厚い場合

第 5 図

第 1 表

試験片 No.	外 径 d_0 mm	内 径 d_1 mm	$\gamma = d_0/d_1$	p_y' kg/cm ²	p_y kg/cm ²	τ_y kg/mm ²	τ_s kg/mm ²	τ_s/τ_y
1	17.99	15.96	1.127	—	305	12.77	14.31	1.110
2	17.99	13.96	1.285	—	645	12.85	16.24	1.258
3	16.99	12.09	1.405	—	895	13.17	18.10	1.402
4	17.99	12.08	1.489	—	1 040	13.05	18.92	1.460
5	16.49	10.03	1.644	1 190	1 270	12.80	19.12	1.482
6	17.99	10.02	1.796	1 330	1 520	13.0	19.30	1.496
7	15.99	8.01	1.995	1 430	1 740	12.70	19.10	1.480
8	17.89	8.04	2.225	1 550	—	平均 12.90	19.42	1.504

には降伏は(2)式に従って起るであろう。これに対して、薄肉の場合には、応力は均等と考えられるので、この場合には降伏は当然(1)式に従って起ることになる。結局、円筒に内圧をかけたときの降伏は、ある肉厚のところを境にして、それよりも薄いものでは(1)式に従い、それよりも厚いものでは(2)式に従うことになる。

以上の考察は、実験結果と定性的には非常によく一致している。

その2. 中西はすでに(1)および(2)式の降伏の条件を円筒に内圧をかけたときに適用して、 $r < 1.548$ の範囲では(1)式に従って降伏は起り、 $r > 1.548$ の範囲では(2)式に従って降伏は起ること、またそのときの圧力、応力等の関係を理論的に解明している⁽³⁾。詳しいことは原論文をみていただくとして、ここでは実験結果とこの理論とを降伏圧力、降伏応力について定量的な比較をしてみよう。

この理論結果によれば

$r < 1.548$ では降伏圧力 p_y は

$$\frac{p_y}{\tau_y} = 2 \log r \quad \dots\dots\dots (3)$$

$r > 1.548$ では降伏が始まる点の圧力 p_y' は

$$\frac{p_y'}{\tau_y} = \frac{3}{2} \frac{r^2 - 1}{r^2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$r > 1.548$ の円筒では $\tau_s = 1.5\tau_y$ となったところで円筒の内側の薄い層が降伏を起し、荷重とひずみの関係はこの点において弾性線からはずれ、それ以後は内圧を増すに従って降伏は外方に向かって広がる。いま $r = r_1'$ まで降伏が広がったものとして、このとき $r_0/r_1' = 1.548$ であれば、その後は圧力一定で $(r_0 - r_1')$ の未降伏部分が部分的に降伏して行き、このときの圧力は当然(3)式で表わされる。

第1表中の τ_y の値は p_y を(3)式に代入して出したものである。したがってこの値は、断面全体が降伏したときに、降伏部分が支持している応力を表わすものであって、当然のことながら肉厚にかかわらずだいたい一定値に出ている。その平均値を出してみると $\tau_y = 12.90 \text{ kg/mm}^2$ となる。実は、第3図に示した曲線IおよびIIは、(3)および(4)式から降伏圧力を計算したものである。実験による降伏圧力は、図にみるごとく、この理論が示すとおりに出ている。

次に降伏点における応力、すなわち降伏点において弾性的に支持していた最大せん断応力 τ_s を実験から調べて、この理論と比較してみよう。この関係は、降伏点における圧力が、第3図にみるごとく、実験と理論とでは一致していることからみて、当然(1)および

第 6 図

第 7 図

第 8 図

(2)式に合っているはずである。しかし参考のために出してみると、 τ_s は第1表中に示すようになり、これと τ_y との比を採って、 r に対して描いてみると第8図に示すようになる。図において、曲線Iは(1)式を、直線IIは(2)式を表わしたものであるが、実験値はそ

れぞれⅠおよびⅡの上によく乗っている。

また第 4 図に示した降伏点における ひずみ の関係において、曲線ⅠおよびⅡは降伏がこの理論に従っておこるものとしたときの円周方向の ひずみ を、材料のヤング率とポアソン比から計算したものを示したものであって、これも実験値と理論値はよく一致している。

以上述べたごとく、軟鋼円筒に内圧をかけたときの降伏に関する実験結果は、中西の理論にすべてよく一致している。

4. お わ り に

最近, Steele 等は大きな肉厚円筒 ($d_0=6\text{in}$, $d_1=3\text{in}$) を用いて、内圧による降伏実験を行い、あわせて丸棒の引張りによるていねいな実験を行っている⁽²⁾。内圧をかけたときの、圧力-ひずみ 曲線はここで述べたように出ているが、内圧による降伏応力と引張りによる降伏応力の関係は、ここで述べた関係と合っていない。この合わない原因は、材料が等方性でないためではないかと思っている。すなわち、材料が等方性であれば、荷重の種類のいかにかわらず均等応力のもとにおける降伏応力は一定値であるはずである。ところが実際の材料では等方性であるものはきわめてまれであって、特に軟鋼では焼なましをしたくらいではなかなか等方性にならないからである。

しかし、第 8 図に示した降伏点における応力の関係は、等方性の材料についての関係と同じ関係を示しているものと思っている。その理由は、ここでは均等応力のもとにおける降伏応力として、内圧による円筒の降伏部分が支持している応力 τ_y を採っており、これを基準にして応力 τ_z を比較しているからである。すなわち、たとえ材料が初めに等方性でなくても、いいかえれば方向によって性質が異なっても、荷重は同じ種類のものであるから、降伏を起す面の方向は同じであって、応力はすべてその方向の値を採ったことになっているからである。

実は、ここで述べた実験は、Steele 等はいねいな実験をやっているにもかかわらず、その実験結果において、引張りと内圧の降伏点における応力の関係が、どうもはっきりしないのをみて、その理由は、おそらく材料が等方性でないことに原因しているからだろうと考え、それにはどうすれば、正しい関係が得られるかを考えた末、上に述べた理由から行ったものである。

第 9 図

したがって第 8 図に示した降伏点における応力の関係は、もちろん正しい関係を示しているものと思っている。また、中西の理論がこの実験と全く一致していることからみて、この理論は降伏点について正しい関係を示しているものと思っている。

この実験で興味あるもう一つのことは、第 9 図に示すように弾性域において、A および B 点の 2 箇所でも弾性線からはずれていないことである。この実験結果は、円周方向に 2 枚の抵抗線をはって、測定したものであるが、そのいずれも同じ内圧のところで、A および B 点が表われている。この A および B 点について検討してみると、B 点はいわゆる表面層⁽⁴⁾の影響が表われており、A 点の意味はよくわからないが、B 点のちょうど半分のところに表われていることである。表面層の影響があるということは、この場合寸法効果は当然あるはずであるが、上に述べた実験結果においては、特筆するほどこの影響は表われていないようである。これはおそらく、表面層の厚さが薄いものと思われる。

最後に、常に適切なる指導を賜った中西不二夫先生に深く感謝の意を表する次第である。また実験を手伝ってくれた池畑邦彦君にも御礼を申し上げたい。

文 献

- (1) 中西, たとえば 機械の研究, 5, 1(昭 28), 1.
- (2) M.C. Steele 外, ASME, Trans., 79(1957), 1609.
- (3) 中西, 機械学会論文集, 18, 65(昭 27), 67.
- (4) 中西, 佐藤, 5th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., Proc., (1955).