その応力分布は、それら単独のときの中間の形をとるので、かたさ上昇のしかたも純ねじりと純平面曲げのときの中間の形をとるものと考えられる。

5. 結 論

0.13% 炭素鋼について 2:1 の平面曲げとねじりの組合せ応力による疲れ試験を行い、軸に直角な断面上で かたさ変化を測定した結果次のことが言いうる。

(1) 前に示した等価応力により表わすと、疲れ限度は曲げ、ねじり、組合せの各場合で一致するが、時間強度は平面曲げの場合が最大、ねじりのときが最小で、組合せの場合はその中間の値をとる。

(2) 組合せ応力を受けたとき外周部で かたさが上昇することは純粹の平面曲げ、ねじり の場合と同様であるが、その かたさ上昇のしかたは純粹の曲げおよびねじり の場合の中間の形をとる。

(3) 組合せ繰返し応力による硬化層の深さは純粹のねじり の場合より浅く、純粹の曲げの場合より深い。

文 献

- (1) 安藤, 西野, 機械学会論文集, **23**, 131(昭 32-7), 495.
- (2) 安藤, 西野, 機械学会論文集, **23**, 135(昭 32-11), 584.
- (3) H.J. Grover, S.A. Gordon, & L.R. Jackson, *Fatigue of Metals and Structures* (1956), p. 52, Thames and Hudson.
- (4) 西原, 河本, 機械学会論文集, **5**, 20(昭 14), I-43.

624. 075. 4 : 539. 384. 4

周辺固定ひし形板の圧縮およびせん断座屈荷重*

浜 田 実**

Compressive and Shearing Buckling Load on a Rhomboidal Plate with All Edges Clamped

by Minoru HAMADA

Buckling problem of a rhomboidal plate with all edges clamped, on which compressive or shearing forces are applied uniformly along its edges, is studied in this paper on the basis of the method used before by the author in the natural vibration problem of a rhomboidal plate. As numerical examples, the lowest buckling stresses for several oblique angles are calculated. Convergency of solutions are considered good enough.

1. 緒 言

前の周辺固定ひし形板の基本振動数⁽¹⁾を計算したが、同じ方法を用いてこれが一様に圧縮される場合(第1図)および周辺に沿いせん断荷重を受ける場合(第4図)の座屈荷重の計算法について考察し、いくつかの辺角に対して数値計算を行う。この問題については、一般の平行四辺形板の場合も含めて Wittrick⁽²⁾⁽³⁾の研究があるが、その荷重条件はここで考える条件と異なりまた解の精度もあまりよくない。この他に研究された例は知らない。

2. 圧縮座屈荷重

第1図のように辺の長さを $2a$, 辺角を α とし、斜交座標 $O-X, Y$ と直交座標 $O-X', Y'$ をとり、また無次元変数 $x=X/a, y=Y/a$ を用いる。周辺に作用する一様な圧縮力を単位長さあたり T とする。そして座屈変位 w を次のようにおく。

第 1 図

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos m\pi x \cos n\pi y + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cos m\pi x \sin n\pi y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} \sin m\pi x \cos n\pi y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y \dots (1)$$

* 昭和 32 年 4 月 2 日 第 34 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 33 年 6 月 12 日。

** 正員, 大阪大学工学部(大阪市都島区東野田町 9)。

境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm 1 \quad \text{において} \quad w=0, \quad \partial w / \partial x = 0 \\ y = \pm 1 \quad \text{において} \quad w=0, \quad \partial w / \partial y = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

であるから, $a_{mn} \sim d_{mn}$ の間に次の諸式が成立しなければならない.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} a_{mn} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots\dots) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} a_{mn} = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots\dots) \\ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} b_{mn} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots\dots) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} n b_{mn} = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots\dots) \\ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} m c_{mn} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots\dots) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} c_{mn} = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots\dots) \\ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} m d_{mn} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots\dots) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} n d_{mn} = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots\dots) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

さてこの問題においては次式で与えられる全エネルギー V が停留値をとらなければならない.

$$V = \frac{1}{2} D \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X'^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y'^2} \right)^2 dX' dY' - \frac{1}{2} T \iint \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial X'} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Y'} \right)^2 \right\} dX' dY' \dots\dots\dots (4)$$

ここに D は板の曲げこわさである. (4) を座標変換式 $X' = X + Y \cos \alpha$, $Y' = Y \sin \alpha$; $X = ax$, $Y = ay$ を用いて変換すると

$$\begin{aligned} V = & \frac{D}{2a^2 \sin^3 \alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \\ & - \frac{T}{2 \sin \alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 2 \cos \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

となる. これに (1) を代入して計算すると次の結果が得られる.

$$\begin{aligned} V = & \frac{2\pi^4 D}{a^2 \sin^3 \alpha} \left[\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (m^4 - r m^2) (a_{m0}^2 + c_{m0}^2) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 - r n^2) (a_{0n}^2 + b_{0n}^2) \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4} \{ (m^2 + n^2)^2 + 4 m^2 n^2 \cos^2 \alpha - r (m^2 + n^2) \} (a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2) \right. \\ & \left. \left. + m n \cos \alpha \{ 2(m^2 + n^2) - r \} (a_{mn} d_{mn} - b_{mn} c_{mn}) \right] \right] \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここに

$$r = \frac{T a^2 \sin^2 \alpha}{D \pi^2} \dots\dots\dots (7)$$

(6) に対してエネルギー停留の原理を適用する場合 (3) が拘束条件式となるが, (3) および (6) をみてわかるように問題が a_{mn} , d_{mn} ; b_{mn} , c_{mn} の互に関係のない 2 組に分けられ, これらの組を別個に考察することになる.

そこでまず基本座屈を考える. 明らかに a_{mn} , d_{mn} の組が問題となるが, その対称性により

$$a_{mn} = a_{nm}, \quad d_{mn} = d_{nm} \dots\dots\dots (8)$$

であるから (6) は次のようになる.

$$\begin{aligned} V = & \frac{2\pi^4 D}{a^2 \sin^3 \alpha} \left[\sum_{m=1}^{\infty} (m^4 - r m^2) a_{m0}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left\{ m^4 (1 + \cos^2 \alpha) - \frac{1}{2} r m^2 \right\} (a_{mm}^2 + d_{mm}^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos \alpha (4 m^4 - r m^2) a_{mm} d_{mm} \right] + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \left[\frac{1}{2} \{ (m^2 + n^2)^2 + 4 m^2 n^2 \cos^2 \alpha - r (m^2 + n^2) \} \right. \right. \\ & \left. \left. \times (a_{mn}^2 + d_{mn}^2) + 2 m n \cos \alpha \{ 2(m^2 + n^2) - r \} a_{mn} d_{mn} \right] \right] \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

一方 (8) により (3)₂ および (3)₈ は (3)₁ および (3)₇ と同じ式になるから, (3)₁, (3)₇ のみを考慮し, これらに対し $u_n^{(a)}$ および $u_n^{(d)}$ なる未定の係数を指定して, 変分法における未定係数の方法を適用して (9) が停留値をとるための条件を求めると次の関係式が得られる.

$$m=n=0; \quad 0a_{00}=u_0^{(a)}, \text{ すなわち } u_0^{(a)}=0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$m \neq n=0; \quad 2(m^4-rm^2)a_{m0}=(-1)^mu_0^{(a)}+(-1)^mu_m^{(a)}$$

しかるに $u_0^{(a)}=0$ なるゆえ

$$2(m^4-rm^2)a_{m0}=(-1)^mu_m^{(a)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$m=n \neq 0;$$

$$\left. \begin{aligned} \{2m^4(1+\cos^2\alpha)-rm^2\}a_{mm}+(4m^4-rm^2)\cos\alpha \cdot d_{mm} &= u_m^{(a)} \\ \{2m^4(1+\cos^2\alpha)-rm^2\}d_{mm}+(4m^4-rm^2)\cos\alpha \cdot a_{mm} &= mu_m^{(d)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$m \neq n, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0;$$

$$\left. \begin{aligned} \{(m^2+n^2)^2+4m^2n^2\cos^2\alpha-r(m^2+n^2)\}a_{mn}+2mn\cos\alpha\{2(m^2+n^2)-r\}d_{mn} \\ = (-1)^{m+n}u_m^{(a)}+(-1)^{m+n}u_n^{(a)} \\ \{(m^2+n^2)^2+4m^2n^2\cos^2\alpha-r(m^2+n^2)\}d_{mn}+2mn\cos\alpha\{2(m^2+n^2)-r\}a_{mn} \\ = (-1)^{m+n}nu_m^{(d)}+(-1)^{m+n}mu_n^{(d)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

(12), (13) より a_{mm} , d_{mm} ; a_{mn} , d_{mn} を分離することは容易である. (11) ~ (13) と (3)₁, (3)₇ を用いて, 前に基本振動数を求めたのと同様にして座屈荷重を計算することができる.

次に α が 90° より小さくなるにしたがって, $x+y=0$ の線を節線としてこれに非対称的な座屈が基本座屈よりも低い荷重で生ずる可能性が出てくるため, この形の座屈を考察する(第2図). これは明らかに b_{mn} , c_{mn} の組の問題であるが, その対称性により

$$b_{mn}=c_{nm} \quad \dots\dots\dots (14)$$

であるから (6) は次のようになる.

$$V = \frac{2\pi^4 D}{a^2 \sin^3 \alpha} \left[\sum_{m=1}^{\infty} (m^4-rm^2)c_{m0}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \{ (m^2+n^2)^2+4m^2n^2\cos^2\alpha-r(m^2+n^2) \} c_{mn}^2 \right. \right. \\ \left. \left. - mn\cos\alpha \{ 2(m^2+n^2)-r \} c_{mn}c_{nm} \right] \right] \quad \dots\dots\dots (15)$$

一方 (14) により (3)₃ および (3)₄ は (3)₆ および (3)₅ と同じになるから, (3)₅, (3)₆ に対して $u_n^{(e)}$, $v_m^{(e)}$ なる未定係数を指定して前と同様に次の関係式が得られる.

$$n=0; \quad 2(m^4-rm^2)c_{m0}=(-1)^mu_0^{(e)}+(-1)^mv_m^{(e)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$m=n; \quad \{4m^4(1-\cos\alpha)^2-2m^2r(1-\cos\alpha)\}c_{mn}=mu_m^{(e)}+v_m^{(e)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$m \neq n, \quad n \neq 0;$$

$$\left. \begin{aligned} \{(m^2+n^2)^2+4m^2n^2\cos^2\alpha-r(m^2+n^2)\}c_{mn}-2mn\cos\alpha\{2(m^2+n^2)-r\}c_{nm} \\ = (-1)^{m+n}mu_n^{(e)}+(-1)^{m+n}v_m^{(e)} \\ \{(m^2+n^2)^2+4m^2n^2\cos^2\alpha-r(m^2+n^2)\}c_{nm}-2mn\cos\alpha\{2(m^2+n^2)-r\}c_{mn} \\ = (-1)^{m+n}nu_m^{(e)}+(-1)^{m+n}v_n^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

(16)~(18) と (3)₅, (3)₆ により前と同じ計算過程を経て解が得られる.

〔数値計算〕 辺角 α を 90° より 15° とびに 45° までとって数値計算を行った. まず基本座屈を考慮するに (11)~(13) および (3)₁, (3)₇ の各式が対象となるが, $\alpha=90^\circ$ の場合は $\cos\alpha=0$ となるため a_{mn} と d_{mn} が無関係になり, 基本座屈問題は a_{mn} の組に属することになる. しかるにこれは周辺固定長方形板の問題であり, すでに示した解法⁽⁴⁾によるものと同様計算になる. 次に α が 90° でない場合に対してはひし形板の基本振動数の問題に示した計算法と同様の形をとる. ただし今の場合は $u_0=0$ となるため第1近似で2行2列, 第2近似で4行4列の行列式を計算することになり, この点で計算が少し簡単であることだけが異なる. したがってここでは計算の結果を第1表および第3図に示すのみにとどめる. 解の収束状態は α が 90° より離れるにしたがって悪くなる. しかし基本振動数の場合よりは良好である. なお各近似値より解の収束値を推定することでも

第 2 図

第 3 図

第 1 表

α		90°	75°	60°	45°
r	第 1 近似值	1.322 7	1.313 5	1.277 3	1.204 2
	第 2 近似值	1.325 5	1.315 4	1.284 8	1.232 9
	第 3 近似值	1.325 8	1.315 6	1.285 2	1.234 8
	結 論 值	1.326	1.316	1.285	1.235
$T\alpha^2/D\pi^2$		1.326	1.411	1.713	2.470
$T/T\alpha=90^\circ$		1	1.064	1.292	1.863

第 2 表

α	45°
r 第 1 近似値	1.713
$Ta^2/D\pi^2$	3.426
$T/T_{\alpha=90^\circ}$	2.584

(注 $T_{\alpha=90^\circ}$ は基本座屈の値)

場合も座屈変位 w を (1) とし、境界条件 (2) および拘束条件 (3) を考慮する。直交座標系 $O-X', Y'$ に対しては X' 軸方向の引張力 $2S \cot \alpha$ と X' 軸および Y' 軸方向のせん断力 S (いずれも単位長さあたり) が一様に分布すると考えられるから、全エネルギー V は次式のものとなる。

$$V = \frac{1}{2} D \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X'^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y'^2} \right)^2 dX' dY' + S \iint \left(\frac{\partial w}{\partial X'} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial Y'} \right) dX' dY' + S \cot \alpha \iint \left(\frac{\partial w}{\partial X'} \right)^2 dX' dY' \quad (19)$$

前節と同様に座標変換すると

$$V = \frac{D}{2a^2 \sin^3 \alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy + S \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (20)$$

となる。これに (1) を代入して計算すると次の結果が得られる。

$$V = \frac{2\pi^4 D}{a^2 \sin^3 \alpha} \left[\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m^4 (a_{m0}^2 + c_{m0}^2) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_{n0}^2 + b_{n0}^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4} \{ (m^2 + n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} (a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2) + mn \{ 2 \cos \alpha (m^2 + n^2) - s \} (a_{mn} d_{mn} - b_{mn} c_{mn}) \right] \right] \quad (21)$$

ここに

$$s = \frac{Sa^2 \sin^3 \alpha}{D\pi^2} \quad (22)$$

$a_{mn}, d_{mn}; b_{mn}, c_{mn}$ の互に関係のない 2 組の問題に分けられることは前節と同様である。そこでまず基本座屈を考えるとこれは明らかに a_{mn}, d_{mn} の組が問題となるが、その対称性により

第 4 図

きるが、座屈問題であるから第 3 近似値を正解に近くかつ安全側の値として結論値とした。

次に非対称座屈の問題すなわち (16)~(18) および (3)_s, (3)_g を考える。この場合は第 1 近似で 3 行 3 列、第 2 近似で 5 行 5 列の行列式を計算することになり、この点基本振動数の場合と同じである。 $\alpha = 45^\circ$ に対して第 1 近似値を求めると、第 2 表に示すように基本座屈の場合よりも大きい値となる。第 2 図からわかるように、この問題は等辺を固定、底辺を支持された二等辺三角形板の問題にはかならない。しかるに三辺とも固定または支持された場合に対しては近似解⁽⁵⁾があるから、これらの値を第 3 図に示すと、少くとも α が 90° と 45° の間では基本座屈荷重が危険荷重となることがわかる。したがって非対称座屈については第 2 表の結果を出すのみにとどめた。

3. せん断座屈荷重

前節と同様第 4 図のように座標系をとり、周辺に作用するせん断力を単位長さあたり S とする。この場

$$a_{mn} = a_{nm}, \quad d_{mn} = d_{nm} \quad \dots\dots\dots (23)$$

であるから (21) は次のようになる.

$$V = \frac{2\pi^4 D}{a^2 \sin^3 \alpha} \left[\sum_{m=1}^{\infty} m^4 a_{m0}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \{m^4(1+\cos^2 \alpha)(a_{mm}^2 + d_{mm}^2) + (4m^4 \cos \alpha - m^2 s) a_{mm} d_{mm}\} \right. \\ \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \left[\frac{1}{2} \{ (m^2+n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} (a_{mn}^2 + d_{mn}^2) + 2mn \{ 2 \cos \alpha (m^2+n^2) - s \} a_{mn} d_{mn} \right] \right] \quad \dots\dots\dots (24)$$

一方条件式は (23) により (3)₁ と (3)₇ の二式になるから, これらに対し $u_n^{(a)}$ および $u_n^{(d)}$ なる未定の係数を指定して前節と同様に次の関係式を得る.

$$m=n=0; \quad 0a_{00}=u_0^{(a)}, \quad \text{すなわち} \quad u_0^{(a)}=0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$m \neq n=0; \quad 2m^4 a_{m0} = (-1)^m u_0^{(a)} + (-1)^m u_m^{(a)}$$

しかるに $u_0^{(a)}=0$ なるゆえ

$$2m^4 a_{m0} = (-1)^m u_m^{(a)} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$m=n \neq 0;$$

$$\left. \begin{aligned} 2m^4(1+\cos^2 \alpha) a_{mm} + (4m^4 \cos \alpha - m^2 s) d_{mm} &= u_m^{(a)} \\ 2m^4(1+\cos^2 \alpha) d_{mm} + (4m^4 \cos \alpha - m^2 s) a_{mm} &= m u_m^{(d)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$m \neq n, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0;$$

$$\left. \begin{aligned} \{ (m^2+n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} a_{mn} + 2mn \{ 2 \cos \alpha (m^2+n^2) - s \} d_{mn} \\ = (-1)^{m+n} u_m^{(a)} + (-1)^{m+n} u_n^{(a)} \\ \{ (m^2+n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} d_{mn} + 2mn \{ 2 \cos \alpha (m^2+n^2) - s \} a_{mn} \\ = (-1)^{m+n} m u_m^{(d)} + (-1)^{m+n} n u_n^{(d)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

(26)~(28) と (3)₁, (3)₇ により前と同じ計算過程を経て解が得られる.

次に α が 90° より大きくなるにしたがって, $x=y$ の線を節線としてこれに関し非対称的の座屈が, 基本座屈よりも低い荷重で生ずる可能性が出てくるためこれを考察する(第5図). この座屈は明らかに b_{mn} , c_{mn} の組に属し, その対称性により

$$b_{mn} = -c_{nm} \quad \dots\dots\dots (29)$$

である. したがって (21) は次のようになる.

$$V = \frac{2\pi^4 D}{a^2 \sin^3 \alpha} \left[\sum_{m=1}^{\infty} m^4 c_{m0}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \{ (m^2+n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} c_{mn}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + mn \{ 2 \cos \alpha (m^2+n^2) - s \} c_{mn} c_{nm} \right] \right] \quad \dots\dots\dots (30)$$

一方条件式は (29) により (3)₅ と (3)₆ の二式になるから, これらに対し $u_n^{(c)}$ および $v_m^{(c)}$ なる未定の係数を指定して前節と同様に次の関係式を得る.

$$n=0; \quad 2m^4 c_{m0} = (-1)^m m u_0^{(c)} + (-1)^m v_m^{(c)} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$m=n; \quad \{ 4m^4(1+\cos \alpha)^2 - 2m^2 s \} c_{mm} = m u_m^{(c)} + v_m^{(c)} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$m \neq n; \quad n \neq 0;$$

$$\left. \begin{aligned} \{ (m^2+n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} c_{mn} + 2mn \{ 2 \cos \alpha (m^2+n^2) - s \} c_{nm} \\ = (-1)^{m+n} m u_n^{(c)} + (-1)^{m+n} v_m^{(c)} \\ \{ (m^2+n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} c_{nm} + 2mn \{ 2 \cos \alpha (m^2+n^2) - s \} c_{mn} \\ = (-1)^{m+n} n u_m^{(c)} + (-1)^{m+n} v_n^{(c)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

(31)~(33) と (3)₅, (3)₆ により前と同じ計算過程を経て解が得られる.

次に α が 90° より小さくなるにしたがって, $x+y=0$ の線を節線としてこれに関し非対称な座屈が, 基本座屈よりも低い荷重で生ずる可能性が出てくるためこれを考察する(第6図). この座屈も b_{mn} , c_{mn} の組に属するが, その対称性により

$$b_{mn} = c_{mn} \quad \dots\dots\dots (34)$$

第 5 図

第 6 図

である。したがって (21) は次のようになる。

$$V = \frac{2\pi^4 D}{a^2 \sin^3 \alpha} \left[\sum_{m=1}^{\infty} m^4 c_{m0}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \{ (m^2 + n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} c_{mn}^2 - mn \{ 2 \cos \alpha (m^2 + n^2) - s \} c_{mn} c_{nm} \right] \right] \quad (35)$$

一方条件式は (34) により (3)₅ と (3)₆ の二式になるから、これらに対し $u_n^{(e)}$ および $v_m^{(e)}$ なる未定の係数を指定して前と同様に次の関係式を得る。

$$n = 0; \quad 2m^4 c_{m0} = (-1)^m m u_0^{(e)} + (-1)^m v_m^{(e)} \quad (36)$$

$$m = n; \quad \{ 4m^4 (1 - \cos \alpha)^2 + 2m^2 s \} c_{mm} = m u_m^{(e)} + v_m^{(e)} \quad (37)$$

$$m \neq n, \quad n \neq 0;$$

$$\left. \begin{aligned} \{ (m^2 + n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} c_{mn} - 2mn \{ 2 \cos \alpha (m^2 + n^2) - s \} c_{nm} \\ = (-1)^{m+n} m u_n^{(e)} + (-1)^{m+n} v_m^{(e)} \\ \{ (m^2 + n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} c_{nm} - 2mn \{ 2 \cos \alpha (m^2 + n^2) - s \} c_{mn} \\ = (-1)^{m+n} n u_m^{(e)} + (-1)^{m+n} v_n^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

(36)~(38) と (3)₅, (3)₆ により前と同様にして解が得られる。

〔数値計算〕 この場合は基本振動数および圧縮座屈の場合と異なり $\alpha = 90^\circ$ に対してまだ計算していない。また α_0 をある一定値として $\alpha = 90^\circ + \alpha_0$ と $\alpha = 90^\circ - \alpha_0$ の場合が同じでない。そのため α を 60° より 15° とびに 120° までとることとする。

まず基本座屈を考察するに、(26)~(28) および (3)₁, (3)₇ が対象となるが前節と同様に第 1 近似で 2 行 2 列、第 2 近似で 4 行 4 列の行列式の計算が必要である。計算結果を第 3 表および第 7 図に示す。どの α に対しても第 1 近似値は精度がよくないが第 2 近似値と第 3 近似値は非常に近い。前節と同様に第 3 近似値をもって結論値とする。 $\alpha = 90^\circ$ に対しては従来の値⁽⁶⁾ とほぼ一致する。また第 7 図をみると $\alpha = 105^\circ$ の附近に S の値の極小値があることがわかる。 $\alpha = 120^\circ$ に対しては以下に示すように非対称座屈荷重の方が危険荷重となるため、第 2 近似値を出すにとどめた。

次に非対称座屈のうちまず第 5 図に対する問題を考察するに、(31)~(33) および (3)₅, (3)₆ の各式が対象となり、第 1 近似で 3 行 3 列、第 2 近似で 5 行 5 列の行列式の計算をしなければならない。 $\alpha = 105^\circ$ および $\alpha = 120^\circ$ に対して第 2 近似値まで求め、結果を第 4 表および第 7 図に示した。この問題は前節と同様に等辺固定底辺支持の二等辺三角形板の問題であるため、比較のために三辺とも固定または支持された場合に対する近似解⁽⁵⁾の値を第 7 図に示した。

次に第 6 図に示すような非対称座屈を考えるに(36)~(38) および (3)₅, (3)₆ の各式が対象となり行列式の行数は上の場合と同じである。 $\alpha = 60^\circ$ に対し計算を行ったが、第 1 近似値は第 5 表に示す値となり基本座屈荷重より大きい。したがってこの形の非対称座屈はいま考えている範囲の α に対しては問題にならない。

4. 結 言

以上において周辺固定ひし形板の圧縮座屈およびせん断座屈の問題を、座屈変位の形を二重フーリエ級数で表わしエネルギー法を用いて解く方法について考察し、

第 3 表

α		60°	75°	90°	105°	120°
S	第 1 近似值	6.397	4.911	3.512	2.312	4.106
	第 2 近似值	6.472	5.016	3.653	2.475	4.332
	第 3 近似值	6.477	5.021	3.657	2.481	—
	結 論 值	6.48	5.02	3.66	2.48	4.33
$Sa^2/D\pi^2$		9.98	5.57	3.66	2.75	6.67
$S/S\alpha=90^\circ$		2.73	1.52	1	0.751	1.82

第 7 図

いくつかの種類の辺角に対して数値計算を実施した。

平板が薄板構造物の構成単位として最も多く用いられるのは長方形板や円板としてであり、これらの座屈問題は特に航空機構造の強度などで重要な問題であるが、最近の後退翼などにみられるように薄板が平行四辺形板として用いられる場合もまれではない。本論文は平行四辺形板のうち特にひし形板が周辺を固定された場合を対象としたものである。もっとも平板の座屈は柱の場合と異なり、座屈後も荷重がある値(極限強さ—Ultimate Strength)に至るまでたわみながら荷重に耐える。しかしそのために座屈荷重の値が無用となるわけではなく、これが設計上の一つの基準値として有用である場合も少なくない⁽⁷⁾。本論文における数値計算の諸結果はそういう意味で実用上の寄与をなすものと思う。

なお一般の平行四辺形板の場合も上のひし形板の場合と同様に取扱うことができるが、(8)のような対称性に基く簡略化ができないため計算すべき行列式の列数がひし形板の場合の2倍となり、数値計算はかなり面倒となることを附記しておく。

おわりに、本研究に対し御懇切な御指導をいただいた太田友弥教授に深甚の謝意を表する。また中山健、樋口敏雄、吉本正明三君の熱心な協力を得た。ここに厚く感謝する次第である。

附 記

本論文の方法を用いて前に周辺固定ひし形板の基本振動数を計算したが⁽¹⁾、その後長谷川氏⁽⁶⁾が Ritz の方法により同じ振動数をすでに計算しておられることを知った。辺角が 60° の場合と 75° の場合について結果を比較すると第6表のようになる。第3近似値と長谷川氏の値の間に真の値があると見るべきである。結論値とあるのは各次の近似値より解の収束の形を仮定して求めた推定値であるが、その収束の程度がゆるい

第 4 表

α		105°	120°
s	第 1 近 似 値	2.711	1.646
	第 2 近 似 値	2.753	1.744
$Sa^2/D\pi^2$		3.05	2.69
$S/S\alpha=90^\circ$		0.833	0.735

(注 $S\alpha=90^\circ$ は基本座屈の値)

第 5 表

α	60°
s (第 1 近 似 値)	14.19
$Sa^2/D\pi^2$	21.85
$S/S\alpha=90^\circ$	5.97

(注 $S\alpha=90^\circ$ は基本座屈の値)

第 6 表

Ω^2 α		75°	60°
本方法の解	第 1 近 似 値	0.813 9	0.761 1
	第 2 近 似 値	0.814 2	0.765 9
	第 3 近 似 値	0.814 3	0.766 5
	結 論 値	0.814 6	0.767 3
長 谷 川 氏 の 値		0.814 7	0.769 2

形を用いているから、筆者としてはむしろ第3近似値と結論値で真の値をはさむのではないかと推測するが、とにかく長谷川氏の値は本方法が正しいことの証明となるものと思う。

文 献

- (1) 浜田, 近藤, 機械学会論文集, **23**, 131(昭 32-7), 522.
- (2) W.H. Wittrick, *Aero. Quart.*, **4**(1953-2).
- (3) W.H. Wittrick, *Aero. Quart.*, **5**(1954-5).
- (4) 浜田, 機械学会論文集, **23**, 127(昭 32-3), 172.
- (5) H.L. Cox & B. Klein, *Aero.Sci.*, **22**, 5(1955), 321.
- (6) F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, (1952), 396. ($Sa^2/D\pi^2=3.678$ を与えている)
- (7) 文献(6), p. 425.
- (8) M. Hasegawa, *Aero. Sci.*, **24**, 2 (1957), 145.