軟鋼では第2報で述べたように, A_1 および A_1' が
ない式が成り立ったが, それは (1) および (2) 式の
特別な場合である. 一般に A_1/A_2 または A_1'/A_2' は
材料によることはもちろんのこと, 同一材料でも予ひ
ずみの程度によって変わると考えられる. したがって
黄銅でも予ひずみが更に小さい場合には A_1 および
 A_1' が A_2 および A_2' に対して無視できるほど小さ
くなる場合もあるであろう. また軟鋼においても予ひ
ずみが更に大きくなれば A_1 および A_1' の存在を無視
できない場合が生ずるのである.

5. 結 論

ひずみ履歴塑性理論から導かれる理論結果を実験的
に検証するために, 黄銅薄肉管に伸びまたはねじりの
予ひずみを与えた後引張り・ねじり組合せ応力状態で
再び降伏させる実験を行った. その結果ねじりの予ひ

ずみの場合には軟鋼のときと異なり降伏応力は予想ど
おり σ 軸に傾斜した だ円上に乗った. ただしその傾
斜角は第1報の式から求められる値より小さく現われ
た. そこで第1報の理論式を一般的に拡張し実験結果
と比較した. その結果, 降伏条件についても, 応力・
ひずみ増分関係においても理論と実験とはよく一致し
た. 以上のことから「ひずみ履歴塑性理論」はひずみ
履歴の異なる場合の塑性現象を矛盾なく統一的に説明
できることが明らかとなった.

終りに実験に協力された阿部慎蔵, 茂木智子の両氏
に感謝の意を表する.

文 献

- (1) 吉村, 竹中, 阿部, 機械学会論文集 25, 151 (昭 34-3), 140.
- (2) 吉村, 塑性力学 (応用力学講座), (昭 32) 共立出版.
- (3) 吉村, 竹中, 機械学会論文集, 25, 151 (昭 34-3), 133.
- (4) G.I. Taylor & H. Quinney, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A 230 (1931), 323.

539.374:539.389.2

ひずみ履歴に基づく降伏応力の方向依存性*

吉村慶丸**, 竹中幸彦**

Direction Dependence of Yield Stresses of Metals Due to Strain History

by Yoshimaru YOSHIMURA and Yukihiro TAKENAKA

Variation of the tensile and shear yield stresses of metals with the direction of their appli-
cation due to strain history of extension or shear is deduced from "The Strain History Theory
of Plasticity" introduced by one of the authors, and the theoretical results are compared with
experiments.

The theoretical direction dependence for mild steel was compared with the experimental
results of copper, aluminium and brass in the case of prestraining about 8%, because of the
lack of those for mild steel, and found to show qualitative agreement. This fact is regarded
as a further evidence of the validity of the strain history theory.

1. 緒 論

金属の塑性変形は一般に履歴現象であって, そのう
けたひずみ履歴によって加工硬化のみならず異方性お
よびバウシinger効果を生ずる. 筆者が既に導入した
「ひずみ履歴塑性理論⁽¹⁾⁽²⁾」はこのようなひずみ履
歴に基づく異方性およびバウシinger効果を考慮した塑
性理論であって, 従来の等方性材料に対する理論とは
異なっている. 既に報告したように⁽³⁾⁽⁴⁾, 伸びまた

はねじりのひずみ履歴をあたえた軟鋼および黄銅の引
張り・ねじり組合せ応力状態における降伏応力と降伏
直後の応力・ひずみ増分関係についての実験結果は理
論から導かれた結果とよく一致し, ひずみ履歴塑性理
論によってこのようにひずみ履歴の異なる塑性現象を
統一的に矛盾なく説明できることが証明されている.

この報告では, 伸びの予ひずみをあたえた後引張方
向またはせん断方向を変えて再び降伏させる場合に,
それぞれの降伏応力が方向によってどのように変化す
るかをひずみ履歴塑性理論より理論的に導いた. そし
て既に軟鋼について得られている A , B の値を入れて

* 昭和 32 年 9 月 7 日 第 7 回応用力学連合講演会において講演,
原稿受付 昭和 34 年 3 月 19 日.

** 正員, 東京大学航空研究所 (東京都目黒区駒場町 856).

計算した軟鋼についての理論的方向依存性を、軟鋼の実験がないために、銅、アルミニウム等についての実験結果と比較した。また同様のことをせん断の予ひずみを与えた場合についても行った。

2. 降伏条件

ひずみ履歴塑性理論では仮想的等方性材料の降伏条件(材料固有の降伏条件)は Mises の条件にしたがうと仮定する。そしてひずみ履歴に基づく異方性およびバウシinger 効果によって実際の降伏条件は Mises の条件からかたよって来るとして降伏条件を導いている。この降伏条件式には一般に異方性を表わす係数 A の一次と二次の項を含んでいるのであるが、既に報告したように⁽³⁾⁽⁴⁾、軟鋼については予ひずみ (ϵ_0 および $\gamma_0/\sqrt{3}$) が 0.08 程度の場合には A の一次の項のない式が実験とよく合い、黄銅では予ひずみが 0.1 程度では A の一次の項は二次の項にくらべて 1/5 程度の小さな値をもつことが示されている。そこでここでは予ひずみが 0.1 以下の場合を考え、 A の一次の項がない降伏条件式について理論を進めることにする。

A の一次の項を含まない降伏条件式は

$$f(\sigma'^{ij}, \epsilon_{ij}) = (1/2)(g_{ijkl} + A^2 M'_{ijkl}) \sigma'^{ij} \sigma'^{kl} - B \epsilon_{ij} \sigma'^{ij} = \text{const.} \quad (1)$$

で与えられる。ここで

$$g_{ijkl} = (1/2)(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk})$$

$$g_{ij} = \text{計量基本テンソル}$$

$$\sigma'^{ij} = \text{偏差応力の反変成分}$$

$$\epsilon_{ij} = \text{予ひずみの共変成分}$$

$$M'_{ijkl} = (1/2)(\epsilon_{ik}\epsilon_{jl} + \epsilon_{il}\epsilon_{jk})$$

$$A^2 = \text{ひずみ履歴に基づく異方性を表わす係数}$$

$$B = \text{バウシinger 効果を表わす係数}$$

であり、 A^2 および B はいずれも実験的に求められる係数である。もし仮想的等方性材料について考えれば、 $A^2 = B = 0$ であるから (1) 式は

$$f(\sigma'^{ij}, \epsilon_{ij}) = (1/2)g_{ijkl} \sigma'^{ij} \sigma'^{kl} = \text{const.} \quad (2)$$

となり Mises の条件に帰着する。このことは理論の仮定から当然のことである。そしてこの仮定が妥当なことは既に軟鋼の実験結果によって証明されている。

そこでこの (1) 式を用いて、伸びの予ひずみの場合とせん断の予ひずみの場合に、引張りまたはせん断応

$$\left. \begin{aligned} \sigma'^{33} &= \sigma^{33} - (1/3)(\sigma_3 + \sigma_2) = (1/6)(\sigma_3 + \sigma_2) + (1/2)(\sigma_3 - \sigma_2) \cos 2\theta \\ \sigma'^{22} &= \sigma^{22} - (1/3)(\sigma_3 + \sigma_2) = (1/6)(\sigma_3 + \sigma_2) - (1/2)(\sigma_3 - \sigma_2) \cos 2\theta \\ \sigma'^{11} &= \sigma^{11} - (1/3)(\sigma_3 + \sigma_2) = -(1/3)(\sigma_3 + \sigma_2) \\ \sigma'^{32} &= \sigma'^{23} = (1/2)(\sigma_3 - \sigma_2) \sin 2\theta \\ \text{その他の } \sigma'^{ij} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

である。ひずみ成分 (4) 式と偏差応力成分 (6) 式を (1) 式へ代入し、(3) 式を考慮して各項別に計算すると

第 1 図 座標系

力の作用方向を変えて行くとき、それぞれの降伏応力が方向によってどのように変るかを求め、実験結果と比較しよう。

ここでは常に一樣な変形を取扱うので、座標系としては直角デカルト座標をえらぶ。したがって共変成分と反変成分との区別はなくなり、かつ

$$g_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} = 1 & i=j \\ = 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

が常に成り立つ。

3. 伸びの予ひずみの場合

第 1 図に示すような直交座標系 (x_1, x_2, x_3) において、まず x_3 方向に伸びの予ひずみ ϵ_0 (対数ひずみ) を与える。そのときの最高引張応力は σ_0 である。この場合の予ひずみ成分は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{33} &= \epsilon_0 \\ \epsilon_{11} &= \epsilon_{22} = -(1/2)\epsilon_0 \\ \text{その他の } \epsilon_{ij} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

である。次に引張応力 σ_0 を完全に除荷した後、 x_1 軸を軸として時計方向に θ だけ回転した座標系 (x_1', x_2', x_3') において、 x_2' および x_3' 方向にそれぞれ引張応力 σ_2 および σ_3 を作用させる ($\sigma_3 \geq \sigma_2$)。このような応力状態の場合もとの座標系 (x_1, x_2, x_3) に対する応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{33} &= (1/2)(\sigma_3 + \sigma_2) + (1/2)(\sigma_3 - \sigma_2) \cos 2\theta \\ \sigma^{22} &= (1/2)(\sigma_3 + \sigma_2) - (1/2)(\sigma_3 - \sigma_2) \cos 2\theta \\ \sigma^{32} &= \sigma^{23} = (1/2)(\sigma_3 - \sigma_2) \sin 2\theta \\ \text{その他の } \sigma^{ij} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

である。したがってその偏差応力成分は

$$(1/2)g_{ijkl}\sigma'^{ij}\sigma'^{kl}=(1/3)(\sigma_3^2-\sigma_3\sigma_2+\sigma_2^2)$$

$$(1/2)A^2M'_{ijkl}\sigma'^{ij}\sigma'^{kl}=(1/8)A^2\epsilon_0^2[(1/4)(\sigma_3+\sigma_2)^2+(1/2)(\sigma_3^2-\sigma_2^2)\cos 2\theta \\ +(\sigma_3-\sigma_2)^2\{(9/4)\cos^2 2\theta-1\}]$$

$$B\epsilon_{ij}\sigma'^{ij}=(1/4)B\epsilon_0\{(\sigma_3+\sigma_2)+3(\sigma_3-\sigma_2)\cos 2\theta\}$$

となる。したがって (1) 式は

$$f(\sigma'^{ij}, \epsilon_{ij})=(1/3)(\sigma_3^2-\sigma_3\sigma_2+\sigma_2^2)+(1/8)A^2\epsilon_0^2[(1/4)(\sigma_3+\sigma_2)^2+(1/2)(\sigma_3^2-\sigma_2^2)\cos 2\theta \\ +(\sigma_3-\sigma_2)^2\{(9/4)\cos^2 2\theta-1\}]- (1/4)B\epsilon_0\{(\sigma_3+\sigma_2)+3(\sigma_3-\sigma_2)\cos 2\theta\}=\text{const.} \dots\dots (7)$$

となる。最初引張った方向 (x_3 方向) に再び引張る場合には, その降伏応力は σ_0 であり, かつ $\sigma_2=0$, $\theta=0$ であるから (7) 式より

$$f(\sigma'^{ij}, \epsilon_{ij})=(1/3)\sigma_0^2\{1+(3/4)A^2\epsilon_0^2\}-B\epsilon_0\sigma_0=\text{const.} \dots\dots (8)$$

となる。したがって

$$f(\sigma'^{ij}, \epsilon_{ij})=(1/3)(\sigma_3^2-\sigma_3\sigma_2+\sigma_2^2)+(1/8)A^2\epsilon_0^2[(1/4)(\sigma_3+\sigma_2)^2+(1/2)(\sigma_3^2-\sigma_2^2)\cos 2\theta \\ +(\sigma_3-\sigma_2)^2\{(9/4)\cos^2 2\theta-1\}]- (1/4)B\epsilon_0\{(\sigma_3+\sigma_2)+3(\sigma_3-\sigma_2)\cos 2\theta\} \\ = (1/3)\sigma_0^2\{1+(3/4)A^2\epsilon_0^2\}-B\epsilon_0\sigma_0 \dots\dots (9)$$

が得られる。この式から引張降伏応力およびせん断降伏応力の方向による変化の状態を知ることができる。

3・1 引張降伏応力の方向による相違 第1図において x_3' 方向のみに引張応力 σ が作用している場合には, $\sigma_3=\sigma$, $\sigma_2=0$ であるから (9) 式は

$$f(\sigma'^{ij}, \epsilon_{ij})=(1/3)\sigma^2\{1+(3/8)A^2\epsilon_0^2\{-(3/4) \\ +(1/2)\cos 2\theta+(9/4)\cos^2 2\theta\} \\ -(1/4)B\epsilon_0\sigma(1+3\cos 2\theta) \\ = (1/3)\sigma_0^2\{1+(3/4)A^2\epsilon_0^2\}-B\epsilon_0\sigma_0 \\ \dots\dots (10)$$

となる。この式で σ_0 および ϵ_0 が与えられ, かつ A^2 および B の値が得られれば, 引張降伏応力 σ の方向 θ による変化の状態を知ることができる。(10) 式は θ については $\cos 2\theta$ の項のみを含んでいるので, θ の変化範囲は $0^\circ \sim 90^\circ$ をとれば十分である。既に軟鋼については $\epsilon_0=8\%$ に対する $A^2\epsilon_0^2$, $B\epsilon_0$ 等が得られているので, その値⁽³⁾

$$\left. \begin{aligned} A^2\epsilon_0^2 &= 0.1320 \\ B\epsilon_0 &= 1.277 \\ \sigma_0 &= 35.57 \text{ kg/mm}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

第2図 引張降伏応力の方向依存性
(伸びの予ひずみの場合)

を (10) 式に代入して計算した結果を第2図および第3図の実線で示す。第2図は引張降伏応力, 第3図は圧縮降伏応力の方向による変化を示している。もしこの材料が異方性およびバウシinger効果を伴わない仮想的等方性材料であるならば, θ の値のいかにかわらず常に $\sigma/\sigma_0=1$ である。したがって第2図および第3図の曲線上の σ/σ_0 の値と $\sigma/\sigma_0=1$ との差がひずみ履歴に基いて生じた降伏応力の方向による変化を示している。第2図の実線では θ が 45° の少し手前で最大の引張降伏応力を持ち, 最初に引張った方向 ($\theta=0$) の引張降伏応力 σ_0 が最大でないことを示している。また $\theta=90^\circ$ で最小値をもつ。このときには最初に引張った方向と直角方向に引張るので, $\theta=0$ 方向には圧縮ひずみが生ずる。したがってバウシinger効果によって $\theta=90^\circ$ 方向の引張降伏応力が著しく低下したと考えられる。一方第3図では第2図とは異なり $\theta=0$ で最小の圧縮降伏応力をもつ。これはバウシinger効果によることは明らかである。これらの曲線

第3図 圧縮降伏応力の方向依存性
(伸びの予ひずみの場合)

は、予ひずみが変わりたり材料が異なったりして σ_0 , ε_0 , A^2 および B 等の値が変われば、もちろん変化する。そこでこれらの値を変えた場合の例をそれぞれ第 2 図および第 3 図の破線と鎖線で示した。

次に理論的に得られた軟鋼についてのこのような曲線と実験結果との比較をしよう。この目的に適合する軟鋼についての実験はまだなされていないので、ここではやむをえず斎藤浩一氏⁽⁵⁾によって既に得られている軟鋼以外の材料についての実験結果を利用した。最初等方性であった銅およびアルミニウムの板をある方向 ($\theta=0$) に引張って伸びの予ひずみ $\varepsilon_0=8\%$ をあたえた後、方向を変えて引張った場合の応力・塑性ひずみの関係を第 4 図および第 5 図に示す。これらの曲線はいずれもひずみの増加とともにだらかに曲ってはっきりした降伏応力を示さないが、あるひずみ (0.2 % 前後) 以上ではほぼ直線的になる。そこでこの直線を延長して σ 軸と交わる点における応力を降伏応力とすれば、この応力は定常的な塑性流れが開始する応力を示す (この方法は G. I. Taylor 氏⁽⁶⁾ の用いた方法と同様である)。このようにして得られた降伏応力をそれぞれの σ_0 で割った値を第 2 図に示す。銅およびアルミニウムの実験点はいずれもなめらかな曲線上に乗り、さらにこの曲線は軟鋼について得られた理論曲線と傾向が全く同じである。したがって軟鋼について

(11) 式が得られたと同様の実験によって、これらの材料の伸びの予ひずみ 8 % における $A^2\varepsilon_0^2$, $B\varepsilon_0$ 等が与えられれば、それから得られる曲線は完全に実験結果と一致するであろう。また伸びの予ひずみの大きさを変え、それぞれの予ひずみに対応する $A^2\varepsilon_0^2$, $B\varepsilon_0$ および σ_0 の値を求めて理論曲線を描けば、その材料についての引張降伏応力の方向依存性の変化の状態を明らかにすることができる。圧縮の場合には実験がなされていないので、理論と実験との比較ができなかった。

3.2 せん断降伏応力の方向による相違 第 1 図において x_3' 方向に引張応力 σ が、 x_2' 方向に圧縮応力 $-\sigma$ が作用する場合には、 $\sigma_3=\sigma$, $\sigma_2=-\sigma$ であるから、純粋せん断応力 $\tau=\sigma$ が $\varphi=\theta\pm(1/4)\pi$ 面に作用する。この場合 (9) 式は

$$\begin{aligned} f(\sigma'^{ij}, \varepsilon_{ij}) &= \sigma^2 [1 + (1/2) A^2 \varepsilon_0^2 \{(9/4) \cos^2 \theta - 1\}] \\ &\quad - (3/2) B \varepsilon_0 \sigma \cos 2\theta \\ &= (1/3) \sigma_0^2 \{1 + (3/4) A^2 \varepsilon_0^2\} - B \varepsilon_0 \sigma_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。この式に $\sigma=\tau$, $\varphi=\theta-(1/4)\pi$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(\sigma'^{ij}, \varepsilon_{ij}) &= \tau^2 [1 + (1/2) A^2 \varepsilon_0^2 \{(9/4) \sin^2 2\varphi - 1\}] \\ &\quad + (3/2) B \varepsilon_0 \tau \sin 2\varphi \\ &= (1/3) \sigma_0^2 \{1 + (3/4) A^2 \varepsilon_0^2\} - B \varepsilon_0 \sigma_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。 θ の変化範囲 $0^\circ \sim 90^\circ$ に対して φ のそれは $-45^\circ \sim 45^\circ$ である。軟鋼について得られた (11)

第 4 図 伸びの予ひずみ 8 % を与えた銅の引張応力-塑性ひずみ曲線 (斎藤氏の実験)

第 5 図 伸びの予ひずみ 8 % を与えたアルミニウムの引張応力-塑性ひずみ曲線 (斎藤氏の実験)

式の値を(13)式に代入して $\tau/\sigma_0 \sim \varphi$ の関係を求めたものを第6図の曲線で示す。もしこの材料が等方性であれば θ の値のいかんにかかわらず $\tau/\sigma_0 = 1/\sqrt{3}$ である。引張りによる最大せん断応力の方向は引張方向と 45° の差があるから、第6図の曲線を第2図の引張りの場合と比較して考える場合には、図に示すように、位相差を 45° 進めて考えるべきである。そうすると両曲線の傾向がきわめてよく似ていることがわかる。更に第6図で $+45^\circ$ 方向のせん断降伏応力が最小であるのは、この場合のせん断応力の向きが最初の引張りによる最大せん断応力の向きと正反対になっているために、パウシンガー効果が著しくきいたためである。

せん断応力の方向を任意に変える実験は実現が困難であって、この目的に合う適当な実験が今までなされていないので、理論曲線と実験結果とを直接比較することはできない。ただし薄肉円管を引張った後ねじれば $\varphi=0^\circ$ 方向の降伏応力がわかり、引張り(または圧縮)と内圧との適当な組合せによって $\varphi=\pm 45^\circ$ 方向のせん断降伏応力を求めることができる。

4. せん断の予ひずみの場合

第7図において、まず x_3x_2 方向に単純せん断の予ひずみ γ_0 を与える。その時の (x_1, x_2, x_3) 座標に

第6図 せん断降伏応力の方向依存性
(伸びの予ひずみの場合)

第7図 座標系

関するひずみ成分は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} &= (1/2)\gamma_0 \\ \text{その他の } \varepsilon_{ij} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)^*$$

であり、最高せん断応力は τ_0 である。次に τ_0 を完全に除荷した後、伸びの予ひずみの場合と同様、応力成分が(5)または(6)式で与えられる応力状態で再び降伏させる場合には、(1)式に(6)および(14)式を代入し、(3)式を考慮して各項別に計算すると

$$(1/2)g_{ijkl}\sigma'^{ij}\sigma'^{kl} = (1/3)(\sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_2 + \sigma_2^2)$$

$$\begin{aligned} (1/2)A'^2M'_{ijkl}\sigma'^{ij}\sigma'^{kl} \\ = (1/16)A'^2\gamma_0^2\{(1/9)(\sigma_3 + \sigma_2)^2 \\ + (\sigma_3 - \sigma_2)^2(2\sin^2 2\theta - 1)\} \end{aligned}$$

$$B'\varepsilon_{ij}\sigma'^{ij} = (1/2)(\sigma_3 - \sigma_2)B'\gamma_0 \sin 2\theta$$

であるから

$$\begin{aligned} f(\sigma'^{ij}, \varepsilon_{ij}) &= (1/3)(\sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_2 + \sigma_2^2) \\ &+ (1/16)A'^2\gamma_0^2\{(1/9)(\sigma_3 + \sigma_2)^2 \\ &+ (\sigma_3 - \sigma_2)^2(2\sin^2 2\theta - 1)\} \\ &- (1/2)B'\gamma_0(\sigma_3 - \sigma_2)\sin 2\theta \\ &= \text{const.} \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

が得られる。ここで引張りとせん断ではひずみ履歴が異なるので、引張りに対する A および B に対応するせん断のそれを A' および B' で表わした。いま $\theta = 45^\circ$ で $\sigma_3 = -\sigma_2 = \tau$ であれば、最初にせん断の予ひずみを与えた時と同一方向にせん断応力を再び加えることになり、その時の降伏応力は τ_0 に等しくなる。したがって(15)式から

$$\begin{aligned} f(\sigma'^{ij}, \varepsilon_{ij}) &= \tau_0^2\{1 + (1/4)A'^2\gamma_0^2\} - B'\gamma_0\tau_0 \\ &= \text{const.} \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

となり、結局

$$\begin{aligned} f(\sigma'^{ij}, \varepsilon_{ij}) &= (1/3)(\sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_2 + \sigma_2^2) \\ &+ (1/16)A'^2\gamma_0^2\{(1/9)(\sigma_3 + \sigma_2)^2 \\ &+ (\sigma_3 - \sigma_2)^2(2\sin^2 2\theta - 1)\} \\ &- (1/2)B'\gamma_0(\sigma_3 - \sigma_2)\sin 2\theta \\ &= \tau_0^2\{1 + (1/4)A'^2\gamma_0^2\} - B'\gamma_0\tau_0 \\ &\dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

が得られる。この式から引張降伏応力およびせん断降伏応力の方向による変化の状態を求めることができる。

4.1 引張降伏応力の方向による相違 第7図において x'_3 方向にのみ引張応力 σ が作用する場合には、 $\sigma_3 = \sigma$, $\sigma_2 = 0$ であるから(17)式は

$$\begin{aligned} f(\sigma'^{ij}, \varepsilon_{ij}) &= (1/3)\sigma^2[1 + (3/8)A'^2\gamma_0^2\{\sin^2 2\theta \\ &- (4/9)\}] - (1/2)B'\gamma_0\sigma \sin 2\theta \\ &= \tau_0^2\{1 + (1/4)A'^2\gamma_0^2\} - B'\gamma_0\tau_0 \\ &\dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

* 純粋せん断の予ひずみの場合には、 $(1/2)\gamma_0$ の代りに $\log n$ をとればよい(1)。

となる。この式は θ については $\sin 2\theta$ の項のみを含んでいるので θ の変化範囲は $45^\circ \sim 135^\circ$ をとれば十分である。既に軟鋼については $\gamma_0/\sqrt{3}=0.08$ に対する $A'^2\gamma_0^2$, $B'\gamma_0$ 等の値が得られているので、その値⁽⁸⁾

$$\left. \begin{aligned} A'^2\gamma_0^2 &= 0.6601 \\ B'\gamma_0 &= 2.333 \\ \tau_0 &= 20.03 \text{ kg/mm}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

を (18) 式に代入して計算した結果を第 8 図 (引張降伏応力) および第 9 図 (圧縮降伏応力) に示す。もし材料が等方性であるならば θ の値いかにかわらず $\sigma/\tau_0 = \sqrt{3}$ である。第 8 図の曲線は $\theta = 90^\circ$ の近くで最大値をもつ。また $\theta = 135^\circ$ で最小値をもつが、これはこのときの引張りによる最大せん断応力の向きが最初のせん断応力 τ_0 の向きと正反対になっているためにバウシンガー効果がきいたためである。この曲線を引張りの場合の第 2 図の実線と比較するとその傾向はよく合っている。このことは引張りによる最大せん

第 8 図 引張降伏応力の方向依存性
(せん断の予ひずみの場合)

第 9 図 圧縮降伏応力の方向依存性
(せん断の予ひずみの場合)

第 10 図 せん断降伏応力の方向依存性
(せん断の予ひずみの場合)

断降伏応力の方向依存性がいずれの予ひずみの場合にも同一傾向であることを示している。これらの理論曲線に対する適当な実験結果がないので、両者の比較をすることはできなかった。

4.2 せん断降伏応力の方向による相違 第 7 図において x_3' 方向に引張応力 σ が, x_2' 方向に圧縮応力 $-\sigma$ が作用するときには, $\varphi = \theta \pm (1/4)\pi$ の面に純粋せん断応力 $\tau = \sigma$ が作用する。このとき $\sigma_3 = -\sigma_2 = \sigma$ であるから (17) 式は

$$\begin{aligned} f(\sigma'^{ij}, \epsilon_{ij}) &= \sigma^2 \{1 + (1/4)A'^2\gamma_0^2(2\sin^2 2\theta - 1)\} \\ &\quad - B'\gamma_0\sigma \sin 2\theta \\ &= \tau_0^2 \{1 + (1/4)A'^2\gamma_0^2\} - B'\gamma_0\tau_0 \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

となる。この式に $\sigma = \tau$, $\varphi = \theta - (1/4)\pi$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(\sigma'^{ij}, \epsilon_{ij}) &= \tau^2 \{1 + (1/4)A'^2\gamma_0^2(2\cos^2 2\varphi - 1)\} \\ &\quad - B'\gamma_0\tau \cos 2\varphi \\ &= \tau_0^2 \{1 + (1/4)A'^2\gamma_0^2\} - B'\gamma_0\tau_0 \end{aligned} \dots\dots\dots (21)$$

が得られる。この式に軟鋼についての (19) 式を代入して計算した結果を第 10 図に示す。もし材料が等方性の場合には常に $\tau/\tau_0 = 1$ である。この曲線も第 2 図の引張りの場合の曲線と傾向がよく似ていて, $\varphi = 90^\circ$ でバウシンガー効果により最小になり, 45° 近くで最大値をもっている。この理論結果を実験と比較するために軟鋼についての適当な実験がないため、銅および黄銅についての 齋藤氏⁽⁷⁾ のねじった後の逆ねじり ($\varphi = 90^\circ$) の実験と、引張りと外圧との適当な組合せによる $\varphi = 45^\circ$ の実験結果を利用した。第 11 図および第 12 図はせん断の予ひずみ $\gamma_0 = 16\%$ を与えられた銅および黄銅の $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ に対応する応力～塑性ひずみ曲線である。これらの図から、先に述べたと同様の方法で降伏応力を決定し、その値を第 10 図

第 11 図 せん断の予ひずみ 16% をあたえた銅のせん断応力-塑性ひずみ曲線 (齋藤氏の実験)

第12図 せん断の予ひずみ16%をあたえた黄銅のせん断応力-塑性ひずみ曲線(斎藤氏の実験)

に示した。銅および黄銅についてのこの実験結果は軟鋼の理論曲線と傾向がよく合っている。

5. 結 論

伸びまたはせん断の予ひずみを与えられた材料は、引張りおよびせん断降伏応力についてどのような方向依存性をもつかを「ひずみ履歴塑性理論」より理論的に導き実験結果と比較した。

予ひずみ(ϵ_0 または $\gamma_0/\sqrt{3}$)が0.08の軟鋼についての理論曲線は伸びおよびせん断の予ひずみのいずれの場合にも位相差を適当にずらせば($\pm 45^\circ$)すべて

同一傾向の曲線となった。このことは、いずれの場合にも引張りによる最大せん断降伏応力の方向依存と純粋せん断による主せん断降伏応力の方向依存性とが同一傾向であることを示している。このような軟鋼についての理論曲線と、予ひずみが8%程度の銅、アルミニウムおよび黄銅等についての斎藤氏の実験結果とは傾向がきわめてよく合い、理論的推論の正しいことが証明された。したがって予ひずみの程度が異なる場合に対する降伏応力の方向依存性も同様に推論することができる。ただしここでは予ひずみが10%程度以下の場合に限定して考えたが、それ以上の大きな予ひずみに対してはAの一次の項を含む理論式を用いる必要がある。

このようにひずみ履歴に基づく降伏応力の方向依存性を理論的に推測できることは実用上にも価値があり、圧延板等の方向依存性を予知するために利用できるであろう。

終りに詳しい実験資料の呈示を快諾された大阪府立大学の斎藤浩一教授に深く感謝の意を表する次第である。また計算をてつたわれた阿部慎蔵、茂木智子の両君に謝意を表する。

文 献

- (1) 吉村, 塑性力学(応用力学講座), (昭32), 共立出版.
- (2) 吉村, 竹中, 機械学会論文集, 25, 151 (昭34), 133.
- (3) 吉村, 竹中, 阿部, 機械学会論文集, 25, 151 (昭34), 140.
- (4) 吉村, 竹中, 本論文集 572ページ.
- (5) 斎藤, 機械学会論文集, 20, 99 (昭29), 771.
- (6) G. I. Taylor & H. Quinney, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A 230 (1931), 323.
- (7) 斎藤, 機械学会論文集, 20, 99 (昭29), 777.

(560 ページより)

科学研究費各個研究関係

▽鋼中の直線状硫化物=北大, 萩原巖(21), ▽溶鉄の脱りん速度におよぼす酸素分圧の影響=北大, 島中和俊(5), ▽金属の凝固機構=北大, 高橋忠義(5), ▽時効性合金の粒界反応=北大, 渡辺亮治(5), ▽アルミニウム鋼のいおう蒸気腐食=室蘭工大, 西田恵三(19), ▽鋼のs曲線におよぼす炭化物生成元素の影響=岩手大, 中沢一雄(18), ▽コバルト基耐熱合金の拡散現象とクリープ強度との関連性=東北大, 門間政三(19), ▽銅鍍へのマグネタイトの溶解に関する基礎的研究=東北大, 亀田満雄(19), ▽砂型鋳物にお

ける鋳造方案=東北大, 大平五郎(19), ▽超高純けい素製造=東北大, 金子秀夫(19), ▽鋼の低温焼もどしぜい性の除去=東北大, 樹村信一(5), ▽耐熱合金=東北大, 今井勇之進(20), ▽合金における相転移の電子線的研究=東北大, 小川四郎(19), ▽溶湯の粉化による金属合金粉末の製造法=東北大, 増大良道(19), ▽製鋼反応の総合研究=東北大, 坂上元郎(5), ▽低チタンかすの処理=東北大, 渡辺元雄(19), ▽いおう製錬=東北大, 松島知夫(19), ▽溶鉄, 溶さい中における各種成分の拡散=東北大, 白石裕(5), ▽高マンガン鋼=秋田大, 橋浦広吉(5).

(727 ページへつづく)