周期解をもち得ない. すなわち $\zeta(\tau) \equiv 0$ である.

さて, $\zeta(\tau) \equiv 0$ ならば (a) 式の周期解 (周期 T)

$x(t)$ は

$$x(t) = -x(t+T/2) \dots\dots\dots (n)$$

なる性質を有しているのである. このような性質をもっている解は, 本文における $\tau_0 = \pi$ なる解に対応している.

文 献

- (1) 林, *Forced Oscillations in Nonlinear Systems*(昭 28), (日本印刷出版) の 40 ページの 8・4 図.
- (2) C.P. Atkinson, *J. Appl. Mech.*, 24, 4 (1957), 520.
- (3) A.M. Katz, *Appl. Math. & Mech.* (ソ連科学アカデミー), 18 (1954). (熊本大学 松本氏による英訳がある).
- (4) 津村, 非線型振動の安定問題, (昭 32-2), 電気通信学会, 非直線理論研究専門委員会資料

621-52

サンプル値を用いたリレーサーボに生ずる

ハンティングの厳密解法について*

榎木義一**, 明石 一***, 岡田 剛**, 山田 栄****

Rigorous Treatment of the Hunting of Relay Servomechanism Operating on Sampled Data

by Yoshikazu SAWARAGI, Hajime AKASHI, Tsuyoshi OKADA, and Sakae YAMADA

Summary; The signals of radar, digital computer and many other systems are sampled signals. In this paper the hunting of on-off control system operating on such a sampled signal is treated.

The analysis in this paper is a rigorous one, solving piece-wise linear differential equations with conditions given at the point of discontinuity. The relays considered in this analysis are two-position relays with and without hysteresis.

The graph obtained by the analysis can also be used in synthesis.

The experiment was carried out using a servo system, and the result of the analysis agrees very well with that of the experiment.

1. 緒 言^{(1)~(3)}

オン・オフ制御と言うのは, 構造が簡単で, かつ制御が常に最大能力で行われ, またオフセット (線形制御系で言う) を生じないという点では非常な利点をもっている. 特にアクチュエータ等の場合は, 精密な線形制御を行わせることが比較的困難であるので, オン・オフ制御の方が有利である場合が多い.

そのようなオン・オフ制御を行う場合に, 信号がサンプリングされたものであることがある. たとえば次のような制御系である.

(1) 落下わく式調節計を使用する場合 検出量

が小さく, しかも大容量の制御を行うものとして, 昔から温度制御等に実用化されている落下わく式調節計は, ある一定時間間隔で検出した信号により, オン・オフ制御を行っている.

(2) レーダを使用する場合 検出装置に, レーダを使用すると, 走査作用のため, 信号はサンプル値となる. その信号によって, オン・オフ制御を行うときは, このような制御系となる.

(3) テレメータを使用する場合 検出値を伝達するのに, テレメータを使用する場合, 信号が数値化されると, サンプル値となり, その信号によってオン・オフ制御を行うときは, このような制御系となる.

(4) デジタル計算機を使用する場合 検出した値が直接求まらないときに, 他の量を検出して, それをデジタル計算機で計算して, ほしい値を求めるといったような場合がある. このように, デジタル

* 昭和 33 年 12 月 10 日 関西支部第 203 回講演会において講演, 原稿受付 昭和 34 年 2 月 21 日.

** 正員, 京都大学工学部 (京都市左京区吉田本町).

*** 正員, 立命館大学理工学部.

**** 京都大学工学部.

計算機を検出系に使用する場合、やはり信号がサンプル値となる。それによって、オン・オフ制御を行うときは、この制御系となる。

その他、ディジタル計算機を制御器に使用する場合、多重制御の場合、定差変調の場合等々、今後更にこのような制御系が実用化されるものと考えられる。

そこでこの論文ではサンプリングされた信号によって、サーボ系をオン・オフ制御する場合にどのような現象を生じるか、について論じる。

2. 記 号

この論文において、使用する記号は次のとおりである。

y : 制御量

T_L : 制御対象(サーボ)の時定数

k : 制御対象(サーボ)のゲイン定数

t : 時間

d : 強制力(ここでは ± 1)

T : サンプリング周期

$\xi = y/T_L k$: 無次元化した制御量

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$: 第 4 図の各点の変位

$\tau = t/T_L$: 無次元化した時間

τ_1, τ_2, τ_3 : 第 4 図の各区間の時間

$\tau_0 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$

$\dot{\xi} = d\xi/d\tau$: 無次元化した速度

$\dot{\xi}_0, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3$: 第 4 図各点における速度

$\tau_s = T/T_L$: 無次元化したサンプリング周期

ξ_h : 無次元化したヒステリシス幅(片側)

$\xi'_0, \xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$: 規準線をヒステリシス幅だけずらしたときの各点の変位(第 9 図)

$\dot{\xi}'_0, \dot{\xi}'_1, \dot{\xi}'_2, \dot{\xi}'_3$: 規準線をヒステリシス幅だけずらしたときの各点の速度(第 9 図)

3. ヒステリシスのない 2 位置リレーの場合

3.1 回路 通常リレーは必ずヒステリシス現象を有している。しかしながら、リレーをサンプル値によって動作させると、ヒステリシスのないリレーと

して使用することができる。その一例が第 1 図である。

A, B の接点は通常開いていて、サンプリングと同期して、そのときだけ閉じる。C リレーは通常接点を閉じた状態にある。サンプリングが行われたときに入力信号が C リレーに加わる。そのときに、リレーを動作させるだけの大きさがあれば、リレーが働いて接点が開く。そのため、D リレーは動作しない。もし信号が小さくて、C リレーが動作しないと、B 接点が閉じることにより、D リレーに電流が流れる。そこで D リレーの接点が閉じると、その接点回路によって、リレーを自己保持する。そのため B 接点が開いても D リレーは動作状態をそのまま継続する。このリレーは C リレーが動作して、回路を開くまでは保持し続ける。したがって、この部分がホールド回路を形成している。

C リレーはサンプリングの行われていない間は A 接点が開いているために、第 1 図(b)のリレー特性図では、左側の負の方に引かれている状態にある。サンプリングが行われると同時に、信号入力と同図実線の経路をたどる。その信号が感動電流を越えたか越えないかによって、C リレーが動作するかしないかを決定する。サンプリングが終ると再び左側の負の方にもどされる。以上の過程を経るから、いかなる時も、同図の実線の経路を通して動作を判定するので、右側の縦の実線のところがオン・オフの切換線となる。そこで中心線をここに移動してやれば、ヒステリシスのない 2 位置リレーとして動作を行う。

3.2 解析⁽⁴⁾⁽⁵⁾ サンプル値を用いたリレーサーボ系として、第 2 図のような場合を考える。第 2 図でリレー部分とホールド回路の部分は上記の回路を適用することができる。このような制御系において、自励振動の現象がどのようなかをここで解析する。解析の方法としては、不連続点での条件を考慮しながら、おのおのの線形領域を微分方程式によって解き、これを結合して求めるわけである。

今、ホールド回路の出力と、制御量との関係を図示すると、第 3 図のごとくなる。自励振動は設定値を中心として行われるから、設定値は零として考えることができる。第 3 図において、任意の速度零の点 y_0 から

第 1 図

第 2 図

第 3 図

第 4 図

出発して, t_1 秒後に中心線を通る。しかしサンプリングが次に行われるまで, すなわち, t_2 秒後までは $+1$ の強制力が働いていて, そこから -1 に切り換えて, ブレーキがかかることになる。 t_3 秒後に速度が零になって, 次に逆方向に動き出す。このときの振幅が y_3 である。 y_3 以後の経過は今のとちょうど逆になるわけで, y_0 と y_3 の関係がどのようになるかを求めることによって, ハンティングの状態が求まるわけである。第 2 図および第 3 図から, 微分方程式は次の式のようになる。

$$T_L \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = kd \quad (1)$$

ただし, $d = \pm 1$

今, 上式を無次元化するために, 次の変数変換を行う。すなわち

$$t = \tau T_L \quad (2)$$

$$y = T_L k \xi \quad (3)$$

と置くと (1) 式は

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{d\xi}{d\tau} = d \quad (4)$$

ただし, $d = \pm 1$

無次元化した量で制御量を描くと, 第 4 図のごとくなる。第 4 図において, [0] の点は速度零の点である。[1] の点は中心線を通じた点である。[2] は中心線通過後, 始めてサンプリングした点で, ここでリレーが切換わる。[3] の点は速度が零となった点

である。[0], [1] 間, [1], [2] 間, [2], [3] 間は, それぞれ線形の領域であるので, この各区间について微分方程式を解いてみる。

(1) [0], [1] 区間 この区間の微分方程式は, 次の式となる。

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{d\xi}{d\tau} = +1 \quad (5)$$

$\tau=0$ で $\xi=\xi_0$, $\dot{\xi}=\dot{\xi}_0=0$, という初期条件で (5) 式を解くと,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= e^{-\tau} + \tau + \xi_0 - 1 \\ \dot{\xi} &= -e^{-\tau} + 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となり, (6) 式に $\tau=\tau_1$ で, $\xi=\xi_1=0$, $\dot{\xi}=\dot{\xi}_1$ という条件を入れると,

$$-\xi_0 = e^{-\tau_1} + \tau_1 - 1 \quad (7)$$

$$\dot{\xi}_1 = -e^{-\tau_1} + 1 \quad (8)$$

となり, (7), (8) 式より

$$\tau_1 = \dot{\xi}_1 - \xi_0 \quad (9)$$

また (8) 式より,

$$\tau_1 = -\log_e (1 - \dot{\xi}_1) \quad (10)$$

(9), (10) 式より,

$$\xi_0 = \dot{\xi}_1 + \log_e (1 - \dot{\xi}_1) \quad (11)$$

が成立する。

(2) [1], [2] 区間 この区間の微分方程式は, (5) 式と同じである。

この場合の初期条件, $\tau=0$ で $\xi=\xi_1=0$, $\dot{\xi}=\dot{\xi}_1$ で (5) 式を解くと,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (1 - \dot{\xi}_1) e^{-\tau} + \tau + (\dot{\xi}_1 - 1) \\ \dot{\xi} &= -(1 - \dot{\xi}_1) e^{-\tau} + 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。(12) 式に, $\tau=\tau_2$ で $\xi=\xi_2$, $\dot{\xi}=\dot{\xi}_2$ なる条件を入れると,

$$\xi_2 = -(1 - \dot{\xi}_1) + (1 - \dot{\xi}_1) e^{-\tau_2} + \tau_2 \quad (13)$$

$$\dot{\xi}_2 = -(1 - \dot{\xi}_1) e^{-\tau_2} + 1 \quad (14)$$

がえられる。

(3) [2], [3] 区間 この区間の微分方程式は次の式となる。

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{d\xi}{d\tau} = -1 \quad (15)$$

初期条件として, $\tau=0$ で $\xi=\xi_2$, $\dot{\xi}=\dot{\xi}_2$ を用いて (15) 式を解くと

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -(\dot{\xi}_2 + 1) e^{-\tau} - \tau + \xi_2 + \dot{\xi}_2 + 1 \\ \dot{\xi} &= +(\dot{\xi}_2 + 1) e^{-\tau} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(16) 式に, $\tau=\tau_3$ で $\xi=\xi_3$, $\dot{\xi}=\dot{\xi}_3=0$ という条件を入れると,

$$\xi_3 = -(\dot{\xi}_2 + 1) e^{-\tau_3} - \tau_3 + \xi_2 + \dot{\xi}_2 + 1 \quad (17)$$

$$0 = (\dot{\xi}_2 + 1) e^{-\tau_3} - 1 \quad (18)$$

(14) および (18) 式より,

$$\tau_3 = -\log_e \frac{1}{-(1-\xi_1)e^{-\tau_2}+2} \dots\dots\dots(19)$$

(13), (14), (17) 式および (18) 式より

$$\xi_3 = \xi_1 + \tau_2 + \log_e \frac{1}{-(1-\xi_1)e^{-\tau_2}+2} \dots\dots\dots(20)$$

(11) 式と (20) 式より,

$$\begin{aligned} \xi_0 - \xi_3 &= \log_e (1 - \xi_1) - \tau_2 \\ &\quad - \log_e \frac{1}{-(1-\xi_1)e^{-\tau_2}+2} \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

となる。(21) 式を変形すると,

$$\xi_1^2 + 2(e^{\tau_2} - 1)\xi_1 + (1 - 2e^{\tau_2} + e^{\xi_0 - \xi_3} \cdot e^{2\tau_2}) = 0 \dots\dots\dots(22)$$

(22) 式は ξ_1 に関する二次式であるので, その根は,

$$\xi_1 = -(e^{\tau_2} - 1) \pm \sqrt{e^{2\tau_2}(1 - e^{\xi_0 - \xi_3})} \dots\dots\dots(23)$$

ここで, (23) 式は正の方のみをとる(付録 1 参照).

これを (11) 式に入れると,

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -(e^{\tau_2} - 1) + \sqrt{e^{2\tau_2}(1 - e^{\xi_0 - \xi_3})} \\ &\quad + \log_e [e^{\tau_2} - \sqrt{e^{2\tau_2}(1 - e^{\xi_0 - \xi_3})}] \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

(24) 式は出発点 ξ_0 と, 最終点 ξ_3 との関係, τ_2 をパラメータとして求めたことになる。そこで ξ_0 を横軸, ξ_3 を縦軸にして描いたのが第 5 図である。

第 4 図より, この半周期に要する時間 τ_0 を求めるには, (17), (18), (13) および (14) 式より,

$$\tau_3 = \xi_2 + \xi_2 - \xi_3 = \xi_1 + \tau_2 - \xi_3 \dots\dots\dots(25)$$

となるので, (9) 式, (25) 式から

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \xi_1 - \xi_0 + \tau_2 + \xi_1 + \tau_2 - \xi_3 \\ &= \xi_0 - \xi_3 - 2 \log_e (1 - \sqrt{1 - e^{\xi_0 - \xi_3}}) \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

となる。(26) 式は τ_0 が ξ_0 と ξ_3 によって定まることを示している。そこで τ_0 をスケールとして, 第 5 図に記入する。更に, $|\xi_0| = |\xi_3|$ の線を第 5 図に記入

第 5 図

する。

今, サンプルングの間隔を τ_s とする。そうすると, 常に $0 \leq \tau_2 \leq \tau_s$ が成立する。したがって, $\tau_2 = \tau_s$ の線はある任意の ξ_0 から出発したときに到達する最大の ξ_3 を与えることになる。この線が $|\xi_0| = |\xi_3|$ の線より下にあるところでは, いかなる場合でも, 振幅は減少することを示している。したがって, $\tau_2 = \tau_s$ の曲線と, $|\xi_0| = |\xi_3|$ の直線が交るところより右側では減衰を行っている過渡的な状態しか存在し得ない。次に, その交点より左側では, τ_2 は $\tau_2 = 0$ の曲線と, $\tau_2 = \tau_s$ の曲線との間のいずれかに存在するわけである。たまたま τ_2 が $|\xi_0| = |\xi_3|$ の直線より上になるようなところでサンプルングすると, 振幅は増大し, 下になるようなところでサンプルングすると, 振幅は減少する。したがって, この制御系のハンティングは, この範囲, すなわち, $\tau_s = \tau_2$ の曲線と, $|\xi_0| = |\xi_3|$ の直線の交点より左側の範囲に存在することが言える。そして, この交点がハンティングとして到達しうる最大の振幅を与えている。

今, τ_s が与えられると, τ_2 が零と τ_s との間のどの値をとるかは, 平等の確率をもっていると考えられる。そこで, もし τ_2 が $\frac{\tau_s}{2}$ より大きいところで, $|\xi_0| = |\xi_3|$ となるときは, 振幅の増大する確率より減少する確率が大きいと考えられ, その逆に, τ_2 が $\frac{\tau_s}{2}$ より小さいところで, $|\xi_0| = |\xi_3|$ となるときは, 振幅の減少する確率より増大する確率が大きいと考えられる。したがって, ハンティングの平均振幅は, $\tau_2 = \frac{\tau_s}{2}$ の曲線と $|\xi_0| = |\xi_3|$ の直線との交点に集まってくると言える。

半周期 τ_0 の値は, 第 5 図から, そのまま読みとることができる。そして τ_0 が τ_s の整数倍のところで $|\xi_0| = |\xi_3|$ という条件を満たすと, これはリミットサイクルとなる。そしてもし, 系が安定であれば, その状態が無限に継続されることになる。しかしもしなんらかの事情で, その条件からはずれると, 前記のハンティングの範囲内を移動したり, 他の形のサイクリングになったりする。

次に, $|\xi_0| = |\xi_3|$ となるような条件を考えて見る。

(11) 式および (20) 式より,

$$2\xi_1 + \tau_2 + \log_e \frac{(1-\xi_1)}{-(1-\xi_1)e^{-\tau_2}+2} = 0 \dots\dots\dots(27)$$

(27) 式を書き直すと,

$$(1-\xi_1)e^{2\xi_1} \cdot e^{2\tau_2} - 2e^{\tau_2} + (1-\xi_1) = 0 \dots\dots\dots(28)$$

(28) 式は, e^{τ_2} に関する二次式であるので, その根は

$$e^{\tau_2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1-\xi_1)^2 e^{2\xi_1}}}{(1-\xi_1)e^{2\xi_1}} \dots\dots\dots(29)$$

この場合, (29) 式の根号の前の符号は, 正の方のみをとる (付録2 参照). したがって

$$\tau_2 = \log_e \{1 + \sqrt{1 - (1 - \xi_1)^2 e^{2\xi_1}}\} - \log_e (1 - \xi_1) - 2\xi_1 \dots \dots \dots (30)$$

また, (26) 式より,

$$\tau_0 = 2(\xi_1 + \tau_2) \dots \dots \dots (31)$$

(30) 式の ξ_1 を定めると, τ_2 が求まり, その ξ_1 , τ_2 によって, (31) 式より τ_0 が求まるので, 今, τ_2 を横軸にとり, $1/\tau_2$ を描く. 一方 $1/\tau_0$ の整数倍をも描く, これが第6図である. 同図において, 横軸の τ_2

第 6 図

上に τ_s をとり, その点の垂直線が $1/\tau_2$ の曲線と交るまでに横切る $1/\tau_0$ の整数倍の曲線がリミットサイクルの可能な点を示している. $1/\tau_2$ に一番近いところがリミットサイクルのうち, 振幅が最も大きいところを示しており, この点を表にしたのが, 第1表である.

以上は解析として考察したわけであるが, 第5図を用いて, シンセシスを行うことも可能である. すなわち, 設計上許しうる最大のハンティング振幅が与えられた場合, その値と, $|\xi_0| = |\xi_3|$ との交点を通る τ_2 曲線の τ_2 を, τ_s にとればよい. また, 平均振幅が与えられた場合は, 同様の方法によつて求めた τ_2 の2倍を τ_s にとればよい.

3.3 実験 3.1 の項でのべたようなリレーおよびホールド回路を使用し, 慣性率の非常に大きな, 角度制御を行うサーボ系を制御対象として, 実験を行った. 実験装置の定数は, 時定数 $T_L = 50$ 秒, サンプル間隔 $T = 10$ 秒, ゲイン定数 $k = 0.23 \text{ V/s}$, ならびに, サンプル間隔 $T = 5$ 秒, ゲイン定数 $k = 0.20 \text{ V/s}$ について行った. したがって, $\tau_s = T/T_L = 0.2$ と 0.1 の場合になる. 実際のハンティングの状況を示したのが, 第7図 (a) および (b) である. すなわち, 同図に見るように, 振幅は大きくなったり,

第 1 表

τ_s	半周期にはいつたサンプル数	τ_s	半周期にはいつたサンプル数
0.04	16	0.16	8
0.06	13	0.18	8
0.08	11	0.20	7
0.10	10	0.24	6
0.12	9	0.28	6
0.14	9	0.30	6
		0.32	5

(a)

(b)

第 7 図

小さくなったりして変動する。リレーが一方に動作している間にはいるサンプリング数も種々変っている。これらの状況を一定時間観測して集計したのが、第2表(a) ($T=10$ 秒) および (b) ($T=5$ 秒) である。第2表(a)では、ある半周期にはいったサンプリング数が5個という場合が一番多く、6個、4個がこれに続いている。このことは、第5図で、 $\tau_2=0.1$ の曲線が、 $|\xi_0|=|\xi_3|$ の直線と交る点の τ_0 を求めると、 $\tau_0=1.0$ 強となっている。 $\tau_0/\tau_s=1.0/0.2=5$ 、すなわち5より少し大きいところに中心があることになり実験結果とよく一致している。また最大は、 $\tau_2=0.2$ の曲線と $|\xi_0|=|\xi_3|$ の直線との交点の τ_0 を求めると、 $\tau_0=1.5$ 強となっている。したがって、 $\tau_0/\tau_s=1.5/0.2=7.5$ となって、それ以上は存在し得ない。実験では7個以上はなかった。以上のごとく、実際には、ハンティングは中心附近に存在し、端の方に行く確率は非常に小さいと考えられる。

第2表(b)では、ある半周期にはいったサンプリング数が7個および8個というのが一番多かった。これを第5図からみると、 $\tau_2=0.05$ の曲線と、 $|\xi_0|=|\xi_3|$ の直線の交点が、 $\tau_0=0.7$ 強のところになっているので、 $\tau_0/\tau_s=0.7/0.1=7$ すなわち、7個と8個の場合が多いことを示している。

また、 $T=20$ 秒について実験を行ったところ、半周期にはいるサンプル数が、3個の場合が6回、4個の場合が2回、5個の場合が1回とこれも第5図の結果とよく一致している。

第2表(a), (b)には、実験値の平均振幅と、第5図より求めた計算による振幅とが併記してある。ただし、計算による振幅の場合は、 τ_0 が τ_s の整数倍のところでは求めているので、多少の相違を生じている。もし実験がそのところでリミットサイクルを生じてい

るのであれば、もっと振幅も一致すると考えられる。しかしながら、比較的少ない回数の平均でありながら、相当よく合っているといえよう。

4. ヒステリシスのある2位置リレーの場合

4.1 回路 サンプル値によって、直ちにリレーを動作させずに第8図に示すごとく、サンプリング信号を一度ホールド回路を通してからリレーを動作させると、リレーに加わる信号が連続であるために、この場合は、リレーのヒステリシス現象を無視することはできない。したがって、サンプル値を用いて、ヒステリシスのある2位置リレーを動作させる制御系となる。

4.2 解析 このように、ヒステリシスのある2位置リレーを用いた場合、リレーが切り換わるのはヒステリシスの幅を越えて始めてサンプリングされたときである。この状況を図示したのが第9図である。同図は無次元化した量で表示してあり、 ξ_h は無次元化したヒステリシスの幅である。このような制御系を解析するに際し、規準線を ξ_h だけ上方にずらしたところを考える。そして、その規準線からの値をそれぞれ、 $\xi'_0, \xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$ また $\xi'_0, \xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$ とする。したがって、

$$\left. \begin{aligned} \xi'_0 &= \xi_0 + \xi_h \\ \xi'_3 &= \xi_3 - \xi_h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

となる。また、 ξ'_0 と ξ'_3 との関係は、第9図からわかるように、3.2の項と同じように求められ、(24)式から、次の式が成立する。

$$\xi'_0 = -(e^{\tau_2} - 1) + \sqrt{e^{2\tau_2}(1 - e^{\xi'_0 - \xi'_3})} + \log_e [e^{\tau_2} - \sqrt{e^{2\tau_2}(1 - e^{\xi'_0 - \xi'_3})}] \dots\dots\dots (33)$$

第8図

第9図

第2表(a) $T=10$ s, $k=0.23$ V/s

半周期にはいったサンプル数	回数	平均振幅 V	平均周波数 rad/s	計算振幅 V
6	14	1.96	0.052	1.96
5	16	1.40	0.063	1.44
4	11	0.78	0.087	0.84
3	3	0.40	0.105	0.47

第2表(b) $T=5$ s, $k=0.20$ V/s

半周期にはいったサンプル数	回数	平均振幅 V	平均周波数 rad/s	計算振幅 V
9	4	0.98	0.076	1.05
8	18	0.82	0.083	0.80
7	18	0.64	0.102	0.65
6	13	0.42	0.119	0.40
5	3	0.23	0.150	0.25

(33) 式は第5図に示す曲線と同じであるが, ξ_0 , ξ_3 にもどすには, (32) 式によって, 原点を右へ ξ_h , 下へ ξ_h ずらす. その一例が第10図である. 振幅の増大, 減少は, $|\xi_0| = |\xi_3|$ の直線から求められる. τ_0 もそのまま使用する事ができる. ヒステリシスのない2位置リレーの場合は, 理論的には振幅零ということも可能であったが, ヒステリシスのある2位置リレーの場合は, $\tau_2 = 0$ の曲線より, $|\xi_0| = |\xi_3|$ の直線が下に行く範囲がある. この範囲では, サンプリングがいかなる状態でも振幅が増大し, したがって, 過渡的な状態しか存在しえないことを示している. よって, ハンティングの振幅としては, 可能な最大と最小とが求まるわけである. 前者は, $\tau_2 = \tau_S$ の線と, $|\xi_0| = |\xi_3|$ の直線との交点, 後者は, $\tau_2 = 0$ の曲線と, $|\xi_0| = |\xi_3|$ の直線との交点より求められる. ヒステリシスがあるのでヒステリシスのない場合よりも, 最大振幅も, また, 平均振幅も大きくなる.

第10図からシンセンスを行うことは, 前と同様可能である.

4.3 実験 実験の制御対象は, 前と同じ角度制御のサーボ系で, サンプリングした信号をホールドさせ, それでリレーを動作させた. 実験装置の定数は次のとおりである.

時定数 $T_L = 50$ s

ゲイン定数 $k = 0.165$ V/s

ヒステリシス幅 $= 0.2$ V

サンプリング周期 T は, 10 秒と5秒の場合について行った. 実際の実験の状況は第11図のごとくで

ある. これを集計したのが, 第3表(a), (b)である. 上記定数から, 無次元化したヒステリシス幅を求めると, 0.025 となる. 原点をこれだけずらして描いたのが第10図である. 同図からみるように, $T = 10$ 秒, のときの平均振幅は, $\tau_0 = 1.3$ のところにあるので, $\tau_0/\tau_S = 1.3/0.2 = 6.5$ となり, 半周期にはいるサンプル数は, 6個, 7個が多いことを示している. 実験では6個が非常に多かった. $T = 5$ 秒の場合は, 平均振幅は, $\tau_0 = 1.1$ のところにあるので, $\tau_0/\tau_S = 11$ となり, 11個のところが多くなるのを示しており, 第3表もそれをはっきり示している. 振幅に対する比較は, 第3表(a), (b)で示してある. 計算値は第

第10図

第11図

第 3 表 (a) $T=10\text{ s}$, $k=0.165\text{ V/s}$, $a_h=0.025\text{ V}$

半周期にはいつ たサンプル数	回 数	平均振幅 V	平均周波数 rad/s	計算振幅 V
7	1	1.5	0.092	1.84
6	21	1.4	0.052	1.40
5	1	1.0	0.060	1.00

第 3 表 (b) $T=5\text{ s}$, $k=0.165\text{ V/s}$, $a_h=0.025\text{ V}$

半周期にはいつ たサンプル数	回 数	平均振幅 V	平均周波数 rad/s	計算振幅 V
13	1	1.00	0.052	1.65
12	5	1.40	0.054	1.40
11	14	1.14	0.057	1.20
10	4	0.92	0.061	1.02
9	1	0.80	0.065	0.83

10図から求めた値に、各定数を入れて求めたものである。この場合も τ_0 が τ_s の整数倍のところでは求めているので、もし、その点でリミットサイクルとなつたのであれば、実験値と計算値となお一層よく合ってくると考えられる。たとえば、第 3 表(b)の半周期にはいったサンプル数 13 個のところは、1 回しかないの、計算して求めた振幅と大きく違っているが、回数の多い他のところでは、比較的よく一致している。

5. む す び

以上、サンプル値を用いたリレーサーボに生ずるハンティングについて、ヒステリシスのない 2 位置リレーの場合と、ヒステリシスのある 2 位置リレーの場合に対し、微分方程式からの解析を行った。そして、その結果が実験結果ともよく一致することが示された。

付 録 1

(23)式の根号の前の符号を正のみとする理由 $\tau_2 > 0$ であるから、 $e^{\tau_2} > 1$ となる。したがって、 $(e^{\tau_2}-1) > 0$

(586 ページより)

▽鉄線の座屈防止＝茨城大、山口秀夫 (19), ▽鉄鉍石の流動還元＝東大、松下幸雄 (19), ▽マグネシウム合金の加工性＝東大、麻田宏 (20), ▽高温水中におけるアルミナイズド鋼の腐食＝東工大、森永卓一 (19), ▽鉄鋼高温における変形機構の結晶学的研究＝東北大、作井誠太 (19), ▽時効硬化合金の内部摩擦＝東工大、中村正久 (5), ▽無水四塩化すずによる金属のすず化について＝東工大、金子正己 (5), ▽赤崎式によるアーク溶接の溶着機構＝横浜国大、柴田晴彦 (19), ▽マグネシウム合金におよぼすカルシウムの影響＝富山大、室町繁雄 (19), ▽ジルコニウムお

であるために、(23)式の第 1 項は負となる。しかるに、 $\xi_1 > 0$ であるから、(23)式の ξ_1 が正なるためには、第 2 項が正でなければならない。ゆえに、正のみをとる。

付 録 2

(29)式の根号の前の符号を正のみとする理由 (28)

式は e^{τ_2} の二次式であるから放物線である。しかも、 $e^{\tau_2}=1$ としたときに (28) 式は負となる。すなわち、

$$\begin{aligned} & (1-\xi_1)e^{2\xi_1}-2+(1-\xi_1) \\ & = -(1+\xi_1)+(1-\xi_1)e^{2\xi_1} \equiv -\alpha \\ & \alpha = (1+\xi_1)+(\xi_1-1)e^{2\xi_1} \end{aligned}$$

$$\xi_1 \equiv \beta \text{ とおくと, } \alpha = (1+\beta) + (\beta-1)e^{2\beta}$$

$$d\alpha/d\beta = 1 + e^{2\beta} + 2(\beta-1)e^{2\beta} = 1 + (2\beta-1)e^{2\beta}$$

$$d^2\alpha/d\beta^2 = 2e^{2\beta} + 2(2\beta-1)e^{2\beta} = 4\beta e^{2\beta}$$

$1 > \xi_1 > 0$ であるから、 $1 > \beta > 0$ 、したがって、 $d^2\alpha/d\beta^2 = 4\beta e^{2\beta} > 0$ 、また $d\alpha/d\beta|_{\beta=0} = 0$ であるから $\beta=0$ のとき、 $d\alpha/d\beta=0$ で、かつ $d^2\alpha/d\beta^2 > 0$ のとき、 $d\alpha/d\beta > 0$ となる。同様に $\alpha|_{\beta=0}=0$ 、したがって、 $\beta=0$ のとき、 $\alpha=0$ で、かつ $d\alpha/d\beta > 0$ であれば、 $\alpha > 0$ となる。したがって、 $e^{\tau_2}=1$ のとき、(28) 式は負となり、かつ放物線であるので、(28) 式の二根は 1 より大きく、一根本は 1 より小さい。しかるに、 $\tau_2 \geq 1$ であるから、(29)式のうち 1 より大きい根のみをとる。すなわち正符号のみをとる。

文 献

- (1) 電気及通信学会編、自動制御の理論と応用(昭 32), 55, コロナ社。
- (2) 高橋編、自動制御論(昭 31), 共立出版, 222。
- (3) C.K. Chow, Trans. AIEE, 74, II (1953-3), 51。
- (4) オルデンブルグ・サルトリウス (高橋・伊沢訳), 自動制御の力学, (昭 28), 誠文堂。
- (5) 西村, 丸橋, 後藤田, 電気学会誌, 77, 826 (昭 32-7), 882。

よびジルコニウム合金の耐食性＝富山大、山田正夫 (6), ▽アルミニウム鉄複合材の中間層＝信州大、加藤良雄 (5), ▽鉄クロム系規則格子の生成におよぼす添加元素の影響＝名大、永井直記 (19), ▽三塩化クロムの製造＝名大、矢野二郎 (19), ▽溶鉄中の窒素の活量係数におよぼす第三元素の影響＝名大、井上道雄 (19), ▽真空あるいは調節ふん囲気中での溶接＝名大、小林卓郎 (19), ▽金属間化合物半導体＝名工大、関戸信吉 (20), ▽含りん酸鉍物よりウランの回収方法＝京大、西原清康 (19), ▽フエライト中における四窒化三シリコン・シリコン窒素の平衡反応＝京大、盛利貞 (19), (732 ページへつづく)