621-52:534.014.5

雑音と定常不規則信号とをうける非線形 サーボ系のシンセシスに対する一図式法*

榎木 義一**, 砂原 善文**, 吉本 泰生***

On a Method of Improving the Performance of Automatic Control Systems with Random Inputs by Introducing Nonlinear Characteristics

by Yoshikazu SAWARAGI, Yoshifumi SUNAHARA, and Yasuo YOSHIMOTO

In this paper, a theoretical investigation of improving the performance of automatic control systems with random inputs by using nonlinear characteristics is described.

If the statistical characteristics of random inputs are known, an optimum nonlinear characteristic can be introduced in order to minimize the mean squared value of the error signal in the system. Proceeding from the analytical procedure derived previously by the authors, a method of obtaining the optimum nonlinear characteristics is shown in detail.

It has been applied to the interesting practical cases of automatic control systems for the random inputs with a typical auto-correlation function. That is, the optimum nonlinear characteristic has been obtained for the following two cases:

- (1) the case of a control system with a Gaussian random disturbance;
- (2) the case of a control system with a Gaussian random signal contaminated by random noise.

The procedure is also summarized in the final section.

1. 緒 言

自動制御系の計画, 構成にあたっては

- (i) 制御系に印加される入力形式, およびその性質.
- (ii) 設計規準として適用されるべき規範の選択.
- (iii) 制御系全体の構成, および調整可能な回路定数の選択.

の3項目をまず考慮せねばならない. これらの諸点に対する考察は以下に述べるように進められるのが最も实际的であろう. すなわち

(a) 制御系に印加される入力形式については, その振幅が時間とともに不規則に変化するものとみなすのが最も実際に近い. しかし制御系に対する入力として目標値信号と外乱の2種類がある. 制御系はこの目標値信号に最も忠実に追随し, 目標値以外の雑音すなわち制御系に対する外乱に対しては, これをできるだけ(戸)波するように設計されるべきことは当然

である. このような見地から制御系入力である目標値信号, および外乱はともに時間に対して不規則に変化するものと考えるのが妥当であるが, このような考察のもとに理論的研究を遂行するには, 統計的手法の導入が要請せられる. 自動制御系の構成にあたって統計的手法を導入するためには, 制御理論を統計的手法をもって処理する解析的研究が確立されねばならない. 線形系に対するこの種の研究は, N. B. Nichols, R. S. Phillips 等⁽¹⁾によって, また非線形制御系に対しては著者等によって, 幾多の興味ある報告がなされている⁽²⁾. 自動制御系に対するシンセシスの面の研究は, これらを基礎としてなされるものである.

さて, ここに考慮した不規則入力は, ひとつの時間関数であることはもちろんであるが, これらは一般に確率過程を構成するものであり, これらの性質をはあくするには確率密度関数をしらねばならない. ここにおいて, 不規則入力の振幅が正規分布に従い, かつ定常性を仮定し, なおエルゴード性が成立するものとしてもまず一般性は失われない. もちろん更に実際的な見地にたつならば, 非正規分布をなす非定常不規則入力として考察することが望ましいのであるが, 解析の

* 昭和34年4月4日 第36期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和34年4月4日.

** 正員, 京都大学工学部(京都市左京区吉田本町).

*** 准員, 京都大学工学部.

便宜上, 上述のような仮定を設けることにする。

(b) つぎに適用されるべき設計規準についてであるが, これは上述したように定常不規則入力を考慮して, 統計的概念が導入される以上, 第1図における制御誤差信号 $\varepsilon(t)$ の分散値が最小になるように制御系を設計するのがまず妥当な方法といえよう。

(c) 制御系の構成は多種多様であり, その時の事情に応じて種々の方式が考えられるのは当然であるが, 一般的な理論的研究をすすめるにあたっては, 第1図のような形式を考えてよい。しかして制御系のシンセシスにおいては調整可能な回路定数と, 逆に調整不可能な回路定数とが存在している。したがっていかなる回路定数に注目して, これを変数として(b)項でのべた規範を満足せしめるかについては, さし当って, 調整可能な制御要素のゲイン, あるいは時定数が考慮せられる。制御要素のゲイン, あるいは時定数の変化によって制御誤差信号の分散値がどのように変化するかについては, 線形系に対しては上記 R. S. Phillips, 非線形に対しては, R. C. Booton⁽³⁾ および著者等⁽⁴⁾ によって, すでに詳細な結果が報告されており, これらの結果はそのままシンセシスに対する資料として有用なものと考えられる。著者等の結果にも示されたように, 非線形制御系の定常不規則入力に対する応答の統計的評価の結果は, 非線形特性の適当な導入によって, その制御系の制御性能の飛躍的な改善が十分期待できることを物語っている。

記号の説明

$v(t), u(t)$: 制御系に対する定常不規則入力, および定常不規則外乱

$\varepsilon(t), x(t)$: 制御誤差信号, 制御量

$z(t), y(t)$: 非線形要素に対する入力, 出力

$v_z(t), u_z(t)$: $z(t)$ の信号成分, および雑音成分

$v_e(t), u_e(t)$: 制御誤差信号の信号, および雑音成分

ψ_z, ψ_e : $z(t), \varepsilon(t)$ の分散

ψ_{vz}, ψ_{vz} : $\varepsilon(t), z(t)$ の信号成分の分散

ψ_{ue}, ψ_{ue} : $\varepsilon(t), z(t)$ の雑音成分の分散

$S_v(\omega), S_u(\omega)$: $v(t), u(t)$ のスペクトル密度

$S_e(\omega), S_z(\omega)$: $\varepsilon(t), z(t)$ のスペクトル密度

$S_{vz}(\omega), S_{vz}(\omega)$: $\varepsilon(t), z(t)$ の信号成分のスペクトル密度

第1図 自動制御系のブロック線図の一般形

$S_{ue}(\omega), S_{uz}(\omega)$: $\varepsilon(t), z(t)$ の雑音成分のスペクトル密度

$G_{10}(s), G_{11}(s), G_2(s), G_3(s)$: 線形要素の伝達関数

κ_{nv}, κ_{nu} : 非線形要素の定常不規則信号, および定常不規則入力に対する信号成分と雑音成分の等価ゲイン

κ_n : 非線形要素の一つの定常不規則入力に対する等価ゲイン

$p(z)$: $z(t)$ の確率密度関数

$R_u(\tau), R_v(\tau)$: 定常不規則雑音, および定常不規則信号の自己相関関数

ω_v, ω_u : 定常不規則信号, および定常不規則雑音の中心周波数

ϕ_v, ϕ_u : 定常不規則信号, および定常不規則雑音の分散の値

$k, k_1, k_2, \omega_n, \zeta, T$: 回路定数値

2. 制御系誤差信号の分散の最小値

に対する一般的考察

第1図に示した制御系に対する入力は, 定常不規則な目標値信号, および定常不規則外乱の2種類であるから, すでに著者等によって与えられたように⁽⁴⁾, 近似的に

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_v(t) + \varepsilon_u(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

と考えられる。したがって, $\varepsilon(t)$ の分散 ψ_e は上式の信号成分 $\varepsilon_v(t)$ と, 雑音成分 $\varepsilon_u(t)$ との間に相関がないものとして

$$\psi_e = \psi_{vz} + \psi_{ue} \quad \dots\dots\dots (2)$$

のように表わすことができる。

さて, 定義により

$$\psi_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_e(\omega) d\omega \quad \dots\dots\dots (3)$$

が成立するが, 上式右辺の $S_e(\omega)$ は第1図の制御系に対して次式のようになる。

$$S_e(\omega) = \left| \frac{1}{1 + G_0'(j\omega)} \right|^2 S_v(\omega) + \left| \frac{G_3(j\omega)}{1 + G_0'(j\omega)} \right|^2 S_u(\omega) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし, 上式において

$$G_0'(j\omega) = G_{10}(j\omega) G_{11}(j\omega) \cdot G_2(j\omega) G_3(j\omega) \quad \dots\dots\dots (5)$$

である。したがって(3)式は(4)式を代入することによって

$$\begin{aligned} \psi_e = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+G_0'(j\omega)} \right|^2 \cdot S_v(\omega) \cdot d\omega \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{G_3(j\omega)}{1+G_0'(j\omega)} \right|^2 \cdot S_u(\omega) \cdot d\omega \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(6)$$

となる。上式から注目する制御回路定数に対する分散 ψ_e の最小値を評価することができる。しかしながら前節において述べたように、非線形伝達特性の積極的な導入による制御性能の改善をはかるため、第 1 図に示したような回路要素のひとつ、たとえばその伝達関数が $G_{11}(s)$ をもって示される線形要素の代りに、Zero-Memory 形の非線形伝達特性をもつ要素をそう入した第 2 図のような構成の自動制御系を考える。しかるときは、すでに著者等が示したごとく⁽⁴⁾、(4)式に代って

$$\begin{aligned} & |1+\kappa_{nv}G_0(j\omega)|^2 S_{ev}(\omega) \\ & + |1+\kappa_{nu}G_0(j\omega)|^2 S_{eu}(\omega) \end{aligned}$$

第 2 図 非線形要素をそう入した自動制御系のブロック線図

入力統計的諸量をパラメータ
(a) (12)₁式より $(\psi_{uz})_{\min}$ から κ_{nv} 曲線の決定

入力統計的諸量をパラメータ
(b) (12)₂式より $(\psi_{uz})_{\min}$ から κ_{nu} 曲線の決定

第 3 図 (12)₁式, (12)₂式の図式解法

$$= S_v(\omega) + |G_3(j\omega)|^2 S_u(\omega) \quad \dots\dots\dots(7)_1$$

なる関係が成立する。ただし

$$G_0(j\omega) = G_{10}(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega) \quad \dots\dots\dots(7)_2$$

である。

かくして

$$S_{ev}(\omega) = \left| \frac{1}{1+\kappa_{nv}G_0(j\omega)} \right|^2 S_v(\omega) \quad \dots\dots\dots(8)_1$$

$$S_{eu}(\omega) = \left| \frac{G_3(j\omega)}{1+\kappa_{nu}G_0(j\omega)} \right|^2 S_u(\omega) \quad \dots\dots\dots(8)_2$$

なる対応を考えることによって、(3)式を次式のように考え、これを評価することが可能である。すなわち信号成分に対する制御誤差信号の分散として

$$\psi_{ve} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ev}(\omega) \cdot d\omega \quad \dots\dots\dots(9)_1$$

を、また雑音(外乱成分)に対する制御誤差信号の分散として

$$\psi_{ue} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{eu}(\omega) \cdot d\omega \quad \dots\dots\dots(9)_2$$

である。しかるとき、(9)₁式および(9)₂式の右辺の積分は(8)₁式、(8)₂式を利用することによって

$$\begin{aligned} \psi_{ve} = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+\kappa_{nv}G_0(j\omega)} \right|^2 S_v(\omega) \cdot d\omega \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(10)_1$$

および

$$\begin{aligned} \psi_{ue} = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{G_3(j\omega)}{1+\kappa_{nu}G_0(j\omega)} \right|^2 S_u(\omega) \cdot d\omega \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(10)_2$$

となるから、これを計算した結果は一般に(10)₁式に対し

$$\psi_{ve} = f_{ve}(\kappa_{nv}) \quad \dots\dots\dots(11)_1$$

また(10)₂式に対し

$$\psi_{ue} = f_{ue}(\kappa_{nu}) \quad \dots\dots\dots(11)_2$$

のように表現せられる。すでに著者等が指摘したように⁽⁵⁾、(11)₁式および(11)₂式における κ_{nv} 、 κ_{nu} は互に独立したものではなく、非線形要素に対する入力 $z(t)$ の信号成分、および雑音成分の統計的諸量(たとえば分散の値)を介して相互的な関連をもっている。

さて、(11)₁式に対し

$$\psi_{ve} = f_{ve}(\kappa_{nv}) \quad \dots\dots\dots(12)_1$$

を、また(11)₂式に対し

$$\psi_{ue} = f_{ue}(\kappa_{nu}) \quad \dots\dots\dots(12)_2$$

なる関係を導くのは容易である。(12)₁式、(12)₂式右辺の $f_{ve}(\kappa_{nv})$ 、 $f_{ue}(\kappa_{nu})$ を κ_{nv} 、 κ_{nu} の関数とし、入力統計的諸量をパラメータとして描いたとき、これらの $f_{ve}(\kappa_{nv}) \sim \kappa_{nu}$ 曲線、および $f_{ue}(\kappa_{nu}) \sim \kappa_{nu}$ 曲線

に最小値が現われるならば, これらの点を連結して得る曲線 $\kappa_{nv} \sim \psi_{vz}$, および $\kappa_{nu} \sim \psi_{uz}$ は所要の等価ゲインであることは明らかである [第3図 (a), (b)]. しかしながら, 上述したように κ_{nv} , κ_{nu} は相互的な関連を有し, とともに同一非線形要素の不規則入力に対する信号成分に対する等価ゲイン, および雑音成分に対する等価ゲインとして定義されねばならぬものである. また, (12)₁式, (12)₂式の右辺がいずれも第3図 (a), (b) のようにともに κ_{nv} , κ_{nu} の値に対して最小値を有することはなく, 第4図 (a), (b) のようにいずれか一方は最小値を有し, 他方は逆に最大値を有

するのが普通である⁽⁶⁾. したがって制御誤差信号の信号成分, あるいは雑音成分のいずれか一方を最小値に保つように等価ゲインをえらぶことは可能であるが, 両者を同時に最小ならしめる等価ゲインを求め, かつこれらがいずれも1個の非線形伝達特性のゲインであるようにすることは不可能である.

ここにおいて, (2)式に示した結果を用い, かつ $\kappa_{nv} = \kappa_{nu} = \kappa$ として, $\psi_z = \psi_{vz} + \psi_{uz} \sim \kappa$ 曲線を第5図のように描く. 非線形要素の等価ゲインは, この $\psi_z \sim \kappa$ 曲線の最小値を連結する曲線として求められる.

3. 非線形伝達特性の決定

前節でのべたように所要の κ 曲線が得られたならば, これから非線形伝達特性を決定せねばならない. いま, 非線形伝達要素の入力 $z(t)$ と出力 $y(t)$ との間に

$$y(t) = f[z(t)] \quad \dots\dots\dots (13)$$

なる関係が成立するものとする. このような表現に対し, 等価ゲイン κ を導入して

$$y = \kappa z + \alpha \quad \dots\dots\dots (14)$$

なる表現を試みる. ただし上式の α は非線形要素の出力に現われる高調波成分に相当する項を一括したものである. したがって (13)式, (14)式から

$$\alpha^2 = \{f[z(t)] - \kappa z(t)\}^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

なる関係が成立する. (15)式の平均値

$$I = \langle \alpha^2 \rangle_{av.} = \int_{-\infty}^{\infty} \{f[z(t)] - \kappa z(t)\}^2 \cdot p(z) dz \quad \dots\dots\dots (16)$$

を最小ならしめるように κ を決定する. これは $\partial I / \partial \kappa = 0$ を計算することによって得られる関係

$$\kappa = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f(z) \cdot p(z) \cdot dz}{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot p(z) \cdot dz} \quad \dots\dots\dots (17)$$

から決定することができる.

さて, (17)式において, 左辺の κ は図式的に $z(t)$ の分散 ψ_z の関数として求められているから (17)式をこの関係と, 非線形要素への入力 $z(t)$ のもつ確率密度関数 $p(z)$ が既知であるという条件のもとにこれをとけば, 所要の非線形伝達特性 $f(z)$ を求めることができる.

いま,

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi_z} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) \quad \dots\dots\dots (18)$$

なるときは, (17)式の右辺分子に部分積分法を適用することにより,

(a) κ_{nv} 対 ψ_{vz} 曲線

(b) κ_{nu} 対 ψ_{uz} 曲線

第4図 (12)₁式, (12)₂式の一般形

入力の統計的諸量をパラメータ

第5図 ψ_z 対 κ 曲線

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi_z} &= \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f(z) \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) dz \\ &= \sqrt{\frac{\psi_z}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(z) \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) dz \cdots (19) \end{aligned}$$

となることから, (17) 式は

$$\kappa_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi_z} \int_{-\infty}^{\infty} f'(z) \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) dz \cdots (20)$$

となる. ただし

$$f'(z) = d\{f(z)\}/dz \cdots (21)$$

であり, また

$$\psi_z = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z) \cdot dz \cdots (22)$$

なる関係を用いた. (20) 式において導入する非線形要素の対称性を仮定すれば

$$\kappa_n(\psi_z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\psi_z} \int_0^{\infty} f'(z) \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) dz \cdots (23)$$

となる. さて, (20) 式において

$$f'(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \cdots \cdots (24)$$

とおけば,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi_z} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) dz = 1 \cdots (25)_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi_z} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) dz = 0 \cdots (25)_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi_z} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) dz = \psi_z \cdots (25)_3$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi_z} \int_{-\infty}^{\infty} z^3 \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) dz = 0 \cdots (25)_4$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi_z} \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) dz = 3\psi_z^2 \cdots (25)_5$$

という関係を利用して

$$\kappa_n(\psi_z) = c_0 + c_2\psi_z + 3c_4\psi_z^2 + \cdots \cdots (26)$$

なる結果をうる. したがって上式左辺の $\kappa_n(\psi_z)$ が

$$\kappa_n(\psi_z) = A_0 + A_1\psi_z + A_2\psi_z^2 + \cdots \cdots (27)$$

のように展開されるならば, (26) 式, (27) 式から

$$c_0 = A_0, \quad c_2 = A_1, \quad c_4 = A_2/3 \cdots (28)$$

として, 係数 $c_0, c_2, c_4, \cdots$ を, したがって (24) 式から $f'(z)$ を決定することができる. $f'(z)$ が求められれば (21) 式から $f(z)$ をすることは容易である.

4. 具体例

4.1 例 1 具体例の第 1 として, 第 6 図にプロ

$$\psi_z = \frac{\frac{\beta}{\omega_n} \frac{k_2^4}{\omega_n^4} \left(2\zeta + \frac{\beta}{\omega_n}\right)}{\left(2\zeta - \kappa_n k_1 \frac{k}{\omega_n} \frac{k_2^2}{\omega_n^2}\right) \left(\kappa_n k_1 \frac{k}{\omega_n} \frac{k_2^2}{\omega_n^2} + \frac{\beta^2}{\omega_n} + 2\zeta \frac{\beta^2}{\omega_n^2} + \frac{\beta^3}{\omega_n^3}\right)} \cdots (33)$$

となる⁽⁴⁾. いま回路定数を

第 6 図 定常不規則外乱をうける自動制御系のブロック線図

ック線図をもって示した自動制御系の制御誤差 ψ_z を最小ならしめるように, 回路要素の等価ゲイン κ , および導入されるべき非線形伝達特性を決定する.

この制御系に対する入力図の位置に定常不規則外乱 $u(t)$ が印加されるのみであるから, (7) 式において $S_v(\omega)$, したがって $S_{ev}(\omega)$ がともに零であり, (7) 式は

$$S_{eu}(\omega) = \left| \frac{G_3(j\omega)}{1 + \kappa_{nu} G_0(j\omega)} \right|^2 S_u(\omega) \cdots (29)$$

となる. 上式の κ_{nu} はこの例においては不規則信号のみが回路を通過するのであるから, 以後 κ_n と記述する. (29) 式を用いて (10)₂ 式を計算すれば次のようになる.

$$\psi_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{G_3(j\omega)}{1 + \kappa_n G_0(j\omega)} \right|^2 S_u(\omega) \cdot d\omega \cdots (30)$$

上式においては第 6 図からも明らかなように

$$\left. \begin{aligned} G_{10}(s) &= k_1 \\ G_2(s) &= k/s \\ G_3(s) &= \frac{k_2^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned} \right\} \cdots (31)_1$$

であるから

$$G_0(j\omega) = \frac{k \cdot k_1 \cdot k_2^2}{\{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2\}(j\omega)} \cdots (31)_2$$

である. いま定常不規則外乱の平均値を零, 自己相関関数 $R_u(\tau)$ を

$$R_u(\tau) = \psi_u \exp(-\beta|\tau|), \quad \beta > 0 \cdots (32)_1$$

とする. しかるとき, そのスペクトル密度は

$$S_u(\omega) = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} \psi_u \cdots (32)_2$$

であるから, (31)₁ 式, (31)₂ 式, (32)₂ 式を (30) 式に代入して右辺の積分を計算すれば

$$k_1 = k_2^2 / \omega_n^2 = 1, \quad k / \omega_n = 1, \quad \zeta = 0.3, \quad \psi_u = 10.0$$

として, (33) 式の右辺

$$f(\kappa_n) = \frac{\frac{\beta}{\omega_n} \frac{k_2^4}{\omega_n^4} \left(2\zeta + \frac{\beta}{\omega_n} \right)}{\left(2\zeta - \kappa_n k_1 \frac{k}{\omega_n} \frac{k_2^2}{\omega_n^2} \right) \left(\kappa_n k_1 \frac{k}{\omega_n} \frac{k_2^2}{\omega_n^2} + \frac{\beta}{\omega_n} + 2\zeta \frac{\beta^2}{\omega_n^2} + \frac{\beta^3}{\omega_n^3} \right)} \quad (34)$$

を β/ω_n をパラメータとして計算した結果は第7図に示したごとくなる. したがって $(\psi_z)_{\min}$ すなわち

$$\partial[f(\kappa_n)]/\partial\kappa_n = 0 \quad (35)$$

を満足する κ_n の値を ${}_0\kappa_n$ とすると

$${}_0\kappa_n = \frac{2\zeta - \left(\frac{\beta}{\omega_n} + 2\zeta \frac{\beta^2}{\omega_n^2} + \frac{\beta^3}{\omega_n^3} \right)}{2k_1 \frac{k}{\omega_n} \frac{k_2^2}{\omega_n^2}} \quad (36)$$

なる ${}_0\kappa_n$ の値を連ねた曲線は常に $(\psi_z)_{\min}$ を与え, 所要の非線形要素の等価ゲインである. すなわち, 制

第7図 等価ゲインの図式的決定の具体例

第8図 例1における非線形伝達特性

第9図 定常不規則信号および定常不規則外乱を受ける制御系のブロック線図

御系に印加される定常不規則外乱の周波数成分を表現する β なる量が変化したときは, ここに求めたような等価ゲインを有する非線形伝達要素を導入することによって制御誤差信号を最小にすることができる. またもし β の値も一定なる時, たとえば $\beta/\omega_n = 0.05$ に対するときは, $f(\kappa_n)$ 曲線の最小値を通過する水平線が所要の等価ゲインであり, この場合は伝達要素の特性として, 線形特性がえられる. 第7図において $\kappa_n = 0.3$ を通る水平線は, このようにして得られた等価ゲインをもつ非線形要素の代りに, 線形伝達要素を用いた場合を示し, 明らかに $(\psi_z)_{\min}$ を与えないことがわかる.

第7図から (27) 式に相当して

$$\kappa_n(\psi_z) = 0.3 - 0.0095z^2 - 0.00015z^4 - \dots \quad (37)$$

をうる. したがって

$$c_0 = 0.3, \quad c_2 = -0.0095, \quad c_4 = -0.00017$$

を得る. したがって, (24) 式に対応した

$$f'(z) = 0.3 - 0.0095z^2 - 0.00017z^4 - \dots \quad (38)$$

を得, これから

$$f(z) = 0.3z - 0.0032z^3 - 0.00003z^5 - \dots \quad (39)$$

となる. これを第8図に示した.

4.2 例2 第2の例として, 第9図に示したような制御系に

$$R_v(t) = \psi_v \exp(-\beta\tau) \cos \omega_v \tau \quad (40)$$

第10図 $\psi_z = \psi_{uz} + \psi_{vz}$ の評価

なる自己相関関数をもつ定常不規則信号と

$$R_u(\tau) = \psi_u \exp(-\beta\tau) \cos \omega_u \tau \quad \dots\dots\dots (41)$$

なる自己相関関数をもつ定常不規則外乱が印加される場合を取扱う。

この場合 (10)₁ 式から

$$\psi_{vz} = \frac{2\psi_v \beta k_1^2}{T} \cdot \frac{M(M^2 T^3 + MT + MT^2 \beta - 2\beta^2 T - \beta) - a\beta(3MT^2 - 4\beta^2 T^2 + 1)}{2\beta a^2 - (TM^2 - 16\beta^4 T + 12TM\beta^2 + 4M\beta - 8\beta^3)a + M(2\beta M^2 T^2 + MT + 4\beta^2 MT + 2\beta M)} \quad \dots\dots\dots (42)$$

となる。ただし

$$M = \beta^2 + \omega_v^2, \quad a = k k_1 k_2 k_{nv} \quad \dots\dots\dots (43)$$

である。また一方, (10)₂ 式から

$$\begin{aligned} \psi_{uz} &= \frac{2\psi_u k_1^2 k_2^2 \beta^2}{T} \\ &\times \frac{M'(M' T^2 + 2\beta T + 1) - a'(2\beta T + 1)}{2\beta a'^3 - (M'^2 T - 16\beta^4 T + 12TM'\beta^2 + 4\beta M' - 8\beta^3)a'^2 + M'(2\beta M'^2 T^2 + M' T + 4\beta^2 M' T + 2\beta M')a'} \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

となる。ただし

$$M' = \beta^2 + \omega_u^2, \quad a' = k k_1 k_2 k_{nu} \quad \dots\dots\dots (45)$$

である。

(42) 式, および (44) 式から

$$\psi_z = \psi_{vz} + \psi_{uz} \quad \dots\dots\dots (46)$$

として, これを $k_{nv} = k_{nu} = k$ の関数とし, $c = \omega_u / \omega_v$ をパラメータとして評価した結果は第 10 図のごとくであり, $(\psi_z)_{\min}$ の点を連ねることによって, 図のような $k \sim \psi_z$ 曲線をうる。

さて, 本例では

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\psi_{vz} + \psi_{uz})}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(\psi_{vz} + \psi_{uz})}\right\} \quad \dots\dots\dots (47)$$

で与えられる。上式に (46) 式を代入すれば

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi_z}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) \quad \dots\dots\dots (48)$$

となり, 例 1 と全く同様な手続きによればよい。すなわち, (17) 式に対応して第 10 図から

$$k(\psi_z) = 1.0 - 0.05\psi_z - 0.01\psi_z^2 - \dots\dots\dots (49)$$

となるから

$$c_0 = 1.0, \quad c_2 = -0.05, \quad c_3 = -0.0033$$

第 11 図 例 2 における非線形特性

を得る。これから

$$\left. \begin{aligned} f'(z) &= 1.0 - 0.05z^2 - 0.0033z^4 - \dots \\ f(z) &= z - 0.017z^3 - 0.00067z^5 - \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (50)$$

なる結果が得られる。第 11 図に $f(z)$ を示した。

5. 結 言

本研究においては, 非線形特性を導入して制御性能を改善する手法を具体例をもって示した。その手法を以下に総括してみよう。

(1) 制御誤差信号の分散の値を回路要素のゲインの関数として計算する。

(2) 回路定数の変化, あるいは制御系入力統計的諸量の変化に応じて, (1) で計算した分散の値が回路要素のゲインの変化に対応してどのように変わるかを調べる。

(3) (2) の手続きでえられた分散とゲインの関係から, 導入すべき非線形伝達特性の等価ゲインがわかるから, これを分散を変数とする有理多項式の形で表わす。

(4) 制御誤差信号の確率密度関数を求める。

(5) 非線形伝達特性を入力 $z(t)$ の多項式で展開したものと仮定し, その係数を計算する。

このような手法によってえられた非線形伝達特性は, その場合の回路定数値, および入力の状態に対して最適の非線形特性を与えることは, 逆に制御系のスペクトル応答の図式的評価法を考察すれば直ちに判明する。

文 献

- (1) H.M. James, N. B. Nichols and R.S. Phillips, *Theory of Servomechanisms* (1947), McGraw-Hill.
- (2) Y. Sawaragi and Y. Sunahara, *Tech. Reps. Engg.*

- Res. Inst., Kyoto Univ., Part I, 8, 5, Rep. No. 45, (1958-3); Part II, 8, 10, Rep. No. 50 (1958-12), Part III, 4, 9, Rep. No. 7 (1959-3).
 (3) R.C. Booton Jr., D.A.C.L. Rep., 61.

- (4) (2) Part II 参照.
 (5) (2) Part I 参照.
 (6) 第1回自動制御連合講演会前刷(昭33-11).

討 論

【質問】 非線形系の統計的手法をシンセシスの立場から行われたことは非常におもしろいと思います。一、二質問しますが、 ψ_s の最小を求めるのに $\kappa_{uv}=\kappa_{vu}=\kappa$ として計算されていますが、入力、外乱の統計的性質が等しいことを意味すると思います。一般に信号、外乱の性質が異なることが多いと思いますがこのような場合でも解析することは可能ですか。また計算された結果をみると非線形特性が線形より著しく変っているとは考えられないように見受けられますが。

もっとも非線形の結果をみての上なので、このための価値も大きいと思います。(三巻達夫)

【回答】 本研究では御質問の趣旨のように定常不規則目標値信号、定常不規則外乱の統計的性質が等しいとしています。もし両者の統計的性質が相異なる場合は非常にむずかしくなり、ここで述べた手法は適用できません。一般的な見地より考察しますと、時間に関して不規則に変化する振幅が非正規分布をするもの

と考え、これを *Grahm-Charlier* A形級数に展開してとり扱うのが実情に即していると思いますが、このような統計的性質をもった入力に対する制御系の応答に対する解析手法すらもまだ確立されていません。このような非正規形の入力に関しては二次以上の積率を考え、その制御系応答の評価のための手法をもっか考究中であり、これに成功すれば、シンセシスの分野への拡張も行いたいと思っています。

つぎに非線形特性が線形とあまり変らないではないかとのことですが、これは制御回路定数、制御系入力の統計的諸量の値いかにによって変わってきます。それでこの場合はたまたま図のような特性が得られたにすぎないわけでありまして、さらにいろいろの数値例に対する計算、特に目標値信号のレベルに対して不規則外乱のレベルが非常に高い場合について計算を行ってみますと、更に顕著な非線形性をもつ伝達特性が要求せられることがわかります。

ニュース

通産省鉦工業研究補助金・金属鉦山部門交付先

新金属材料関係

▽金属ボロンの製造に関する研究(本荘亜鉛工業所),
 ▽電解法による金属ボロンの製造研究(昭和電工),
 ▽下川パイライトよりコバルト銅の有効回収試験(三菱金属鉦業),
 ▽希土類元素の工業的分離および金属の製造(三徳金属工業),
 ▽ベリリウム・アルミ合金の製造研究(日本碍子),
 ▽ニオブ・タンタルの加工に関する研究(昭和電工),
 ▽チタン製ナッシュポンプおよび歯車ポンプの試作と使用試験(チタンソーダ協議会),
 ▽金属チタンを使用した二酸化塩素発生装置の応用研究(大阪曹達),
 ▽マグネシウム合金鋳物(砂型金型)の標準性質測定とダイカストの溶解法に関する研究(軽金属協会),
 ▽チタニウム硬質ねじ製造に関する研究(理化学研究所).

共同研究

軽金属建築構造材の標準プロフィールとその構築物に関する研究(軽金属協会),
 ▽銅合金鋳物の標準性質

ならびに実体強度を求める研究(日本銅合金鋳造会),
 ▽化学プラント用金属材料の腐食と強度の関係に関する研究(日本溶接協会).

自由課題

▽均質鋳造法実用化試験(大同製鋼),
 ▽ニッケル電鍍法による金型製作法(理化学研究所),
 ▽粉末冶金による摩擦材料の研究(曙産業),
 ▽超高温測定用熱電対の製造に関する研究(山本金属研究所),
 ▽いおうセレンおよびテルル含有物より高純度金属セレンおよびテルルの製造(山下実業),
 ▽潜弧溶接法の新しい使用分野の開発研究(新三菱重工業),
 ▽小物プレス加工に関する研究(喜多金属工業),
 ▽石炭の水力採掘に関する研究(野上工業),
 ▽石炭注油によるセキ車凍結防止に関する研究(住友石炭鉦業),
 ▽いんこう送話方式と防爆形電信機の研究(ゲルマ工業),
 ▽利用度の低い低品位非粘結微粉炭のノーバインダーによる固化試験(羽幌炭鉦鉄道)
 (服部 敏夫)