534.014.2:621-752

クーロンドンプ弾性支持系の強制振動

(第2報, 変位による強制振動とその実験)*

山 川 出 雲**

Forced Vibration of the System with Coulomb
Damper Supported by Linear Spring

(2nd Report, Forced Vibration Excited by Displacement and Its Experiment)

by IZUMO YAMAKAWA

In the previous paper, the author discussed the forced vibration of the system with Coulomb friction damper supported by a linear spring in a case where a source of vibration existed in the mass.

This report is devoted to the case where the above system, supposing it as a vehicle, is moving over a sinusoidal profile.

The response to such a excitation can be obtained by a similar procedure to that stated in the previous report except some graphical solution of transcendental equation.

The amplitudes taken from the experiment, carried out by means of the model snubber and the vibrating table, showed a good coincidence with those obtained by the rigorous solution, and that the value of optimum damping deduced from the concept of equivalent viscous damping meant little in this case.

まえがき

弾性支持されたクーロンドンプを, にないばねと並列に用いた系のばね上質量が直接加振される場合の強制振動に関しては前報⁽¹⁾で述べたとおりであるが, たとえばこのような車体懸架を有する車両が波状路面上を走行する場合, すなわちばね下が変位で励振される場合についても同様に考えうると思われるので, 本報ではその解を求めて前報との比較を試み, さらにばね定数比 $\kappa=1$ の場合について等価粘性法による解と対照するとともに, 実験を行い振動の傾向をたしかめてみた.

振動方程式とその解

第1図の系において, クーロン摩擦 F , 振動質量 M , にないばね定数 k , 緩和ばね定数 k_0 , 励振変位 $u = u_0 \cos \omega t$, M の変位 x , ダンパ下端の変位 y , とする.

しかるとき系の振動は前報と同様ダンパ固着の一体振動と, ダンパの作動するすべり振動と

第1図

倍率	励振	応答
変位	$ u_0 =1$	x/u_0
速度	$ u_0\omega =1$	$\dot{x}/u_0\omega$
加速度	$ u_0\omega^2 =1$	$\ddot{x}/u_0\omega^2$

第2図 振動波形の一例

* 昭和33年10月28日 東京秋期講演大会において講演, 原稿受付 昭和34年2月2日.

** 正員, 群馬大学工学部(桐生市天神町1).

が交互に連続して繰返される。

今回の場合も第2図のように一体振動とすべり振動との境界に原点を置くが、この点の振動変位はかならずしも振幅をあらわさず、したがって振動速度も0ではない。そこで励振変位の極大点の原点に対する位相差を前と同様 δ とおき、さらに本報では振動変位の極大点と原点との位相差 α を考える。かくして、すべり率 s をパラメータにとると振動方程式は

一体振動期間

$$t=0 \rightarrow (1-s)\pi/\omega \quad \text{および} \quad t=-s\pi/\omega \rightarrow -\pi/\omega$$

では

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} + k(x-u) + k_0(y-u) &= 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x-y &= C \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (1)$$

ここに C は一定値でありダンパ行程をあらわす。すべり振動期間

$$t=0 \rightarrow -s\pi/\omega \quad \text{および} \quad t=(1-s)\pi/\omega \rightarrow \pi/\omega$$

では

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} + k(x-u) \pm F &= 0 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ k_0(y-u) &= \pm F \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (2)$$

$$\text{ただし} \quad \pm F \cdots \cdots \dot{x} - \dot{y} \geq 0$$

となるが今ここで

$$x-u=z, \quad y-u=w \cdots \cdots (3)$$

なる変数変換を行うと、(1)、(2) 両式はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{z} + kz + k_0w &= -M\ddot{u} \\ z-w &= C \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (1)'$$

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{z} + kz \pm F &= -M\ddot{u} \\ k_0w &= \pm F \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (2)'$$

ただし $\pm F \cdots \cdots \dot{z} - \dot{w} \geq 0$ となる。

(1)', (2)' 両式は前報で最初に与えた式とまったく同じ形である。したがってこれらの解は $u=u_0 \cos(\omega t + \delta)$ とおくことによって

(1)' 式の解

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1 \cos pt + B_1 \sin pt \\ &+ \frac{X_{st}}{1-\gamma^2} \cos(\omega t + \delta) + \frac{C}{1+\kappa} \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

(2)' 式の解

$$\begin{aligned} z_2 &= A_2 \cos nt + B_2 \sin nt \\ &+ \frac{x_{st}}{1-\gamma^2} \cos(\omega t + \delta) - f \cdots \cdots (5) \end{aligned}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} X_{st} &= \frac{Mu_0\omega^2}{k+k_0}, \quad x_{st} = \frac{Mu_0\omega^2}{k}, \quad \kappa = \frac{k}{k_0} \\ n^2 &= k/M, \quad p^2 = (k+k_0)/M, \\ \eta &= \omega/n, \quad \gamma = \frac{\omega}{p} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (6)$$

(4), (5) 両式における各定数およびパラメータの

値は前報と全く同様である。よってこれらを省略し、ダンパ行程の式のみをかくと、

$$\begin{aligned} V_{s-w} &= V_{x-y} = \frac{C}{x_{st}} = \frac{1+\kappa}{\kappa} A_1' \\ &+ \frac{1}{1-\gamma^2} \cos \delta - (1+\kappa)\sigma \cdots \cdots (7) \end{aligned}$$

今の場合、ダンパ行程の励振変位に対する倍率は(6)式の x_{st} の定義から

$$\begin{aligned} \bar{V}_{x-y} &= \frac{C}{u_0} = \gamma^2 \left\{ \frac{1+\kappa}{k} A_1' \right. \\ &\left. + \frac{1}{1-\gamma^2} \cos \delta - (1+\kappa)\sigma \right\} \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

ここに

$$A_1' = A_1/x_{st}, \quad \sigma = f/x_{st}, \quad f = F/k$$

すなわち、系が変位 $u=u_0 \cos \omega t$ で励振された場合の行程倍率は質量が $P=Mu_0\omega^2 \cos \omega t$ の力で直接加振されたときの行程倍率の γ^2 倍になる。

次に、質量 M の振動変位は(5)式を用い

$$\begin{aligned} x &= z+u = A_2 \cos nt + B_2 \sin nt \\ &+ \left(\frac{x_{st}}{1-\gamma^2} + u_0 \right) \cos(\delta - \alpha) - f \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

変位の極値すなわち振幅は、(9)式の $t=-\alpha/\omega$ における値である。

ここで α は次の条件式より定める。

$$\left[\frac{dx_2}{dt} \right]_{t=-\alpha/\omega} = \left[\frac{dz_2}{dt} + \frac{du}{dt} \right]_{t=-\alpha/\omega} = 0 \cdots \cdots (10)$$

すなわち(5)式より

$$\begin{aligned} A_2 n \sin(\alpha/\eta) + B_2 n \cos(\alpha/\eta) \\ - \frac{x_{st}\omega}{1-\gamma^2} \sin(\delta - \alpha) - u_0 \omega \sin(\delta - \alpha) = 0 \end{aligned}$$

上式の両辺を nu_0 で剰し、かきかえると次の形となる。

$$D \sin\left(\frac{\alpha}{\eta} + \varphi\right) = \frac{\eta}{1-\gamma^2} \sin(\delta - \alpha) \cdots \cdots (11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} D &= \sqrt{\bar{A}_2'^2 + \bar{B}_2'^2} = \gamma^2 \sqrt{A_2'^2 + B_2'^2} \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{\bar{B}_2'}{\bar{A}_2'}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{B_2'}{A_2'}\right) \\ \bar{A}_2' &= \frac{A_2}{u_0} = \frac{A_2}{x_{st}} \frac{x_{st}}{u_0} = \gamma^2 A_2' \\ \bar{B}_2' &= \frac{B_2}{u_0} = \frac{B_2}{x_{st}} \frac{x_{st}}{u_0} = \gamma^2 B_2' \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (12)$$

上式中の δ , A_2' , B_2' はそれぞれ前報(14)式、(16)式および(17)式により与えられる。

α の値は(11)式を図上で解いて求める。かくして α がわかれば励振変位に対する強制振動のおくれ β が求まる。すなわち

$$\beta = \delta - \alpha \dots \dots \dots (13)$$

β は物理的に正でなければならぬから、(11)式の無数の解のうち $\alpha < \delta$ の範囲内にある α の値をもってこの場合の解とする。 α と β とがわかると最後に強制振動の振幅は倍率の形で次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{V}_x = \frac{|x|}{u_0} = & \eta^2 A_2' \cos(\alpha/\eta) - \eta^2 B_2' \sin(\alpha/\eta) \\ & + \frac{1}{1-\eta^2} \cos \beta - \eta^2 \sigma \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

本式は s の種々の値に対して成立する。

すべりの起る限界振動数は前報(24)式より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 = \frac{k\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\sigma} \pm 1} \\ \text{ここに } \bar{\sigma} = \frac{f}{u_0} = \frac{x_{st}}{u_0} \frac{f}{x_{st}} = \eta^2 \sigma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

これを図示したものが第5図である。

以上のように、ここで取扱った形式のクーロンダンパ弾性支持系に関しては、加振力が直接ばね上質量に作用する場合の解から、ばね下が変位により励振される場合の質量 M の振動倍率を、一般に考えられる簡単な変数変換だけで求めることはできない。これは後者が前者よりパラメータを一つ多く含み、途中で図式解の手数を要すること、すなわち一体振動とすべり振動との境界が必ずしも変位極大(小)の位置と一致せぬことによるものと思われる。

なお後者の場合の解を前報とは独立に、前報と類似の方法で求めることはいうまでもない⁽²⁾。

粘性ダンパの場合、上述二系の諸元が同じであれば

前者の基礎に対する力の伝達率と、後者の変位倍率とは相等しい値となることが予想され、また簡単に証明できた⁽⁸⁾。

これに対しクーロンダンパの場合は、前報(20)式と本報(14)式との比較または前報第10図と本報第3図との比較により明かなように、力の伝達率と変位倍率とは一般に相等しくないことが注目される。

数値計算例および等価粘性解との比較

上述の解をばね定数比 $\kappa=1$ すなわち $k=k_0$ の場合について数値計算を行い、無次元摩擦量 $\bar{\sigma}$ をパラメータとした質量 M の倍率曲線を描くと第3図のようになる。これはすべり率 s をパラメータとした前報の $\eta-\sigma$ の計算表より、 $\bar{\sigma}=\eta^2\sigma$ であることを考慮して $\eta-\bar{\sigma}$ 曲線をつくり、さらに前報における計算表を利用して(14)式より同じく s をパラメータとした $\eta-\bar{V}_x$ 曲線をかき、これら両曲線から図上で s を消去して $\bar{\sigma}$ をパラメータとした倍率曲線に引き直せばよい。

ダンパ行程倍率 $\bar{V}_{x-y}$ および位相差 $\beta=\delta-\alpha$ についてもまったく同様な手続きで線図をかくことができるがここでは省略する。

また、第2図は $\kappa=1.0$, $s=0.50$, $\eta=1.35$ の場合の振動波形を変位、速度、加速度の無次元量で示したものである。

次に同じ系に等価粘性法を適用した場合の解を求めると次のとおりである。

第3図 質量 M の倍率曲線

第4図 等価粘性解による質量 M の倍率曲線

ダンパの行程倍率

$$\bar{V}_{x-y} = \frac{\sqrt{\eta^4 - \left(\frac{4}{\pi}\bar{\sigma}\right)^2 \{1 + \kappa(1 - \eta^2)\}^2}}{1 - \eta^2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

M の変位倍率

$$\bar{V} = \frac{\sqrt{\eta^2 - \left(\frac{4}{\pi}\bar{\sigma}\right)^2 \{2(1 + \kappa) - (1 + 2\kappa)\eta^2\}}}{(1 - \eta^2)\eta} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ダンパの作動範囲は

$$\frac{(1 + \kappa)\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\sigma} + \pi/4} \leq \eta^2 \leq \frac{(1 + \kappa)\bar{\sigma}}{\kappa\bar{\sigma} - \pi/4} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ダンパの最適調整は、等価粘性で考えた場合の減衰比相当量がダンパ行程を s として

$$\mu = \frac{c_s}{2Mn} = \frac{1}{2Mn} \frac{4}{\pi} \frac{F}{\omega s} = \frac{2}{\pi} \frac{\bar{\sigma}}{V_{x-y}} \frac{1}{\eta} \quad \dots\dots\dots (a)$$

となり、かつ (16) 式と (17) 式とより

$$\bar{V}_{x-y} = \bar{V} \eta \sqrt{\frac{\eta^4 - \left(\frac{4}{\pi}\bar{\sigma}\right)^2 \{1 + \kappa(1 - \eta^2)\}^2}{\eta^2 - \left(\frac{4}{\pi}\bar{\sigma}\right)^2 \{2(1 + \kappa) - (1 + 2\kappa)\eta^2\}}} \quad \dots\dots\dots (b)$$

であるから、(b) 式を (a) 式に代入して

$$\mu = \frac{G}{2\eta^2 \bar{V}} \sqrt{\frac{\eta^2 - G^2 \{2(1 + \kappa) - (1 + 2\kappa)\eta^2\}}{\eta^4 - G^2 \{1 + \kappa(1 - \eta^2)\eta^2\}}} \quad \dots\dots\dots (c)$$

ここに $G = 4\bar{\sigma}/\pi$

(c) 式において右辺の η および $\bar{V}$ に、減衰に無関係な交点の座標 η_p および $\bar{V}_p$ を代入し、左辺の μ に粘性減衰の場合の適正減衰値⁽³⁾をあたえれば (c) 式を G について解くことができ、したがって最適クローン摩擦 $\bar{\sigma}_{opt}$ がえられる。変位にたいする $\bar{\sigma}$ の最適値は $\pi/\sqrt{6}$ 同じく加速度にたいしては $\pi/2\sqrt{2}$ となる。

第4図は (17) 式によって計算した $\kappa=1$ のときの質量 M の等価倍率曲線を示すもので、厳密解でかいた第3図とそれぞれ対応する $\bar{\sigma}$ の値で比較すると、減衰に無関係な定点を含む前後の範囲で両者の振幅にか

第5図 一体振動とすべり振動の限界線図

なり大きな差異のあることがわかる。

なお、第5図はすべりの起る限界振動数を厳密、等価粘性両解で比較したものである。

実験およびその結果

摩擦力調整形のモデルクローンダンパを試作し、これを実験用振動系に組込んで、振動台によって上下振動を与え、ばね上おもりの応答をしらべた。ダンパの構造は第6図に示すように本体を二つ割りとしてリングで締め、内部の対向面にしゅう動子をばねとくさび形押し金具とによりおしつけ、摩擦力の加減を中央の逆ねじ棒の回転によって行いうるようにした。なおしゅう動面にはグリースをうすく塗布し作動を円滑ならしめた。

摩擦抵抗値とその性質は振動実験の前後に、仕事ダイヤグラムをダンパテストによりかかせて確かめた。線図の一例を示すと第7図のとおりで、ほぼクローン

第6図 モデルスナック

第7図 ダンパ仕事線図の一例

第8図 供試振動系

摩擦と考えられるものである。

ダンパを振動系に組んだ状態は第8図のとおりで、その主要諸元は

おもりの目方 $M_g = 85 \text{ kg}$
 ばね定数 $k = 22.2 \text{ kg/cm}$
 $k_0 = 22.0 \text{ kg/cm}$
 同定数比 $\kappa = k/k_0 \approx 1.01$

である。

実験結果を点描した一例を示すと第9図および第10図のとおりで、前者は $\bar{\sigma} = 1.0$ 、および $\bar{\sigma} = 2.4$ の二つの場合にたいする実験値と理論曲線、後者は等価粘性の考え方による変位最適減衰値 $\bar{\sigma} \approx \pi/\sqrt{6}$ 時における実験値を厳密解、等価粘性解と対照したものである。これらの実験は厳密解にほぼ近い値をあたえており、等価粘性解における最適減衰が実際上最適な値となっていないことを示している。

結 言

1) 弾性支持されたクーロンダンパを、にないばねと並列に用いた系のばね下が単絃的変位により励振されるとき強制振動を厳密な方法で解いた。これを解く途中の過程で変数変換を用うれば振動質量が直接加

第9図 理論曲線と実験結果

第10図 等価粘性法による適正減衰値での実験結果

振される場合にたいする前報の解を利用することができる。

2) 前報より本報にわたる解析の結果、クーロンダンパ弾性支持系においては振動源がばね上にある場合の力の伝達率と、ばね下が変位により励振される場合の振動倍率は一般に合致しないものであることがわかった。

3) ばね定数比 $\kappa = 1$ の場合について厳密解と等価粘性解とを対照すると、減衰に無関係な定点を含む前後の範囲で振幅にかなりのひらきがある。

4) ばね定数比 $\kappa = 1$ の場合にたいし、モデルのスナッパと振動系により行った実験の結果は厳密解に近

い値を示し、また等価粘性の考え方よりえられる適正減衰値は實際上ほとんど意味をもたぬものであることが知られた。

最後に本研究実験に御協力下さった小島昌作氏、武田定彦氏はじめ村山忠男、林登喜雄両君に謝意を表する。

文 献

- (1) 山川, 本論文集 745 ページ.
- (2) 山川, 東京秋期講演大会前副, 講演番号 224 (昭33-10).
- (3) 山川, 本論文集 757 ページ.

寄 書

621.888.4

線形ばねによる間接減衰支持二形式について*

山 川 出 雲**

緒 言

振動する機械の防振支持または車体の 1 自由度懸架等において, ダンパをにないばねと並列に用いる在来方式は, 共振点附近で効果のある反面, 比較的高振動数域でのびり振動および衝撃性振動の伝達率または倍率が大きくなり好ましくない。

このような短所を補う一つの方法として, ダンパと線形ばねの直列系をにないばねと並列に用いる形式が提案され⁽¹⁾, かつ解析されているが⁽²⁾, 筆者はさらに一つの方法として線形ばねをダンパとにないばねの並列系と直列に用いる形式を提案し, 強制振動に対する両形式の得失を同一防振効果のもとに比較してみたのでその概要を述べ, あわせて在来系および中間質量を有する 2 自由度系などとの比較を試みる。

振動伝達度および倍率の式

以下かりにすでに提案されている第 1 図の形式を A 系, 今回提案の第 2 図の形式を B 系と名付け, 粘性ダンパの場合について比較考察する。まず, 図において M を振動質量, k_1, k_2, k をにないばね定数, k_0 を緩和ばね定数, c_a, c_b を減衰係数とし, (い), (は) にたいしては起振力として $P = P_0 \cos \omega t$ がそれぞれの質量に, (ろ), (に) にたいしては励振変位として $u = u_0 \cos \omega t$ がそれぞれのばね下に与えられるものとし, それらにたいする質量 M およびダンパピストンの変位を x, y とすると, これら諸系の強制振動は, 起振力および励振変位として $P = P_0 e^{i\omega t}$, および $u = u_0 e^{i\omega t}$, 解を $x = \lambda_1 e^{i\omega t}$, $y = \lambda_2 e^{i\omega t}$, ただし λ_1, λ_2 は複素振幅, と

おくことにより簡単に定まり A 系 (い) の伝達度および (ろ) の倍率は相等しく次のようになる。

$$V_a = \left| \frac{k\lambda_1 + i\omega c_a \lambda_2}{P_0} \right|_{(い)} = \left| \frac{\lambda_1}{u_0} \right|_{(ろ)} \\ = \sqrt{\frac{1 + 4\mu_a^2 \eta_a^2 (1 + \kappa_a)^2}{(1 - \eta_a^2)^2 + 4\mu_a^2 \eta_a^2 (1 + \kappa_a - \kappa_a \eta_a^2)^2}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに,

$$x_a = k/k_0, \quad \eta_a = \omega/n_a, \\ n_a = \sqrt{k/M}, \quad \mu_a = c_a/2\sqrt{kM} \quad \dots\dots\dots (2)$$

同様に B 系 (は) の伝達度および (に) の倍率は

$$V_b = \left| \frac{(k_2 + i\omega c_b) \lambda_2}{P_0} \right|_{(は)} = \left| \frac{\lambda_1}{u_0} \right|_{(に)} \\ = \sqrt{\frac{1 + 4\mu_b^2 \eta_b^2 / (1 + \kappa_b)^2}{(1 - \eta_b^2)^2 + 4\mu_b^2 \eta_b^2 (1 + \kappa_b - \kappa_b \eta_b^2) / (1 + \kappa_b)^4}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

第 1 図 支持形式 A

第 2 図 支持形式 B

* 昭和 32 年 10 月 14 日 創立 60 周年記念東京講演会において講演, 原稿受付 昭和 33 年 12 月 22 日.

** 正員, 群馬大学工学部 (桐生市天神町).