532.582.3 : 532.517

半球頭の柱体を軸方向に横切る流れ*

有江 幹男**, 飯田 誠 ***

Flow Across a Cylinder with Hemispherical Head

by Mikio ARIE and Sei-ichi IIDA

Since a theoretical treatment of the flow around a body with an arbitrary shape is usually difficult, only some of simple cases have been solved.

In this paper, it is shown that a uniform flow around a body can be treated theoretically by an analysis of the combined flow of distributed three-dimensional doublets and uniform flow, so far as the body is of an axisymmetrical shape and does not have any sudden change on its surface. As an example, a clew of determining the position of static holes of a Pitot-static tube is also given by applying the analysis to the flow around a cylinder with hemispherical head.

The analytical results obtained are compared with the combined flow of a three-dimensional source and uniform flow and also with an experimental result reported by Ower and Johansen.

1. 緒 言

任意の形状を有する物体が流れの中にある場合, その物体のまわりの流れを理論的に取扱うことは一般に困難であり, ごく簡単なもののみが解かれているにすぎない。

本論文は, 平行流の中におかれた物体が任意の軸対称の形状を有し, かつその表面の形状が急変部を有しない場合には, その軸上に適当な強さで分布した三次元の複う出点と平行流とを組み合わせることによって, この物体のまわりの流れを理論的に解析しうることを示すと同時に, 一例としてこの方法を半球頭の柱体のまわりの流れに適用してピトー静圧管における静圧孔の位置を決定する一指針を求めたものである。

2. 理 論 考 察

(a) 一般理論 一様な平行流の中で流れの方向に x 軸をとり, この軸上に複う出点を分布させて, それらの強さを適当に決定すれば軸対称の任意の形状を有する物体を横切る流れと同等な流れを具現することができる。

物体の先端 O を原点とし, x 軸と垂直に R 軸をとれば, 第1図に示すように平行流と軸対称形の物体と

の組合せを二次元的に表わすことができる。

流れの中の任意の一点 $P(x, R)$ における一様な平行流のみの場合の流れ関数 ψ_1 は

$$\psi_1 = -\frac{u_0 R^2}{2} \dots\dots\dots (1)$$

であり, 平行流がなくて三次元の複う出点の分布だけが存在する場合には P 点における流れ関数 ψ_2 は

$$\psi_2 = -\int_a^b \frac{m(t) R^2}{[(x-t)^2 + R^2]^{3/2}} dt \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここに

u_0 ; 一様な平行流の近寄り速度

$m(t)$; 複う出点が x 軸上で $t=a \sim b$ にわたり分布している場合の $x=t$ における複う出点の強さ

なるものとする。しからば, 平行流の中にかかる複う出点の分布が存在している場合の P 点における流れ関数 ψ は (1) 式と (2) 式との重畳により与えられるはずであるから

第1図 軸対称の物体を横切る流れ

* 昭利 33 年 10 月 5 日 北海道地方講演会において講演, 原稿受付 昭利 34 年 5 月 21 日。

** 正員, 北海道大学工学部(札幌市北 12 条西 8 丁目)。

*** 准員, 北海道大学大学院。

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_1 + \psi_2 \\ &= -\frac{u_0 R^2}{2} - \int_a^b \frac{m(t) R^2}{[(x-t)^2 + R^2]^{3/2}} dt \cdots (3)\end{aligned}$$

となる。いま $m(t) = u_0 m'(t)$ とすれば、 x および R 方向の分速度 u および v は

$$\left. \begin{aligned}u &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \\ &= u_0 \left[1 + \int_a^b m'(t) \frac{2(x-t)^2 - R^2}{[(x-t)^2 + R^2]^{5/2}} dt \right] \\ v &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= u_0 \int_a^b m'(t) \frac{3R(x-t)}{[(x-t)^2 + R^2]^{5/2}} dt\end{aligned} \right\} \cdots (4)$$

となり、更にこれらは

$$\left. \begin{aligned}\frac{R}{R_0} &= r, \quad \frac{x}{R_0} = X, \quad \frac{a}{R_0} = A \\ \frac{b}{R_0} &= B, \quad \frac{t}{R_0} = T, \quad m'(t) = \mu(T)\end{aligned} \right\} \cdots (5)$$

とおくことによって、次のような無次元式で表わすことができる。ただしここで、 R_0 は物体の形状を表わすために都合のよい代表寸法なるものとする。

$$\psi = -\frac{u_0 r^2(X)}{2} - u_0 \int_A^B \mu(T) \frac{r^2(X)}{[(X-T)^2 + r^2(X)]^{3/2}} dT = 0 \cdots (9)$$

なる関係を与える。したがって

$$\int_A^B \frac{\mu(T)}{[(X-T)^2 + r^2(X)]^{3/2}} dT = -\frac{1}{2} \cdots (10)$$

となる。結局物体の表面上で $\psi=0$ なる約束の境界条件から導かれた (10) 式を解いて $\mu(T)$ を定めることができる。軸対称形の物体のまわりの流れを解析できることになる。

(c) 積分方程式 (10) の一近似解法 (10) 式によって与えられる積分方程式の一般解を求めることは困難であるから次のような近似計算を行う。

(i) $\mu(T)$ の第一近似値 (10) 式において $\mu(T) = \mu(X)$ とおけば

$$\mu(X) = -\frac{r^2(X)}{2} \cdot \frac{\sqrt{(A-X)^2 + r^2(X)} \sqrt{(B-X)^2 + r^2(X)}}{(B-X)\sqrt{(A-X)^2 + r^2(X)} - (A-X)\sqrt{(B-X)^2 + r^2(X)}}$$

となるから、 $\mu(T)$ の第一近似値として

$$\mu_I(T) = -\frac{r^2(T)}{2} \cdot \frac{\sqrt{(A-T)^2 + r^2(T)} \sqrt{(B-T)^2 + r^2(T)}}{(B-T)\sqrt{(A-T)^2 + r^2(T)} - (A-T)\sqrt{(B-T)^2 + r^2(T)}} \cdots (11)$$

を採用する。

(ii) $\mu_I(T)$ の補正 第一近似値 $\mu_I(T)$ に対する補正量を $\Delta\mu_I(T)$ とすれば、かりに

$$\mu(T) = \mu_I(T) + \Delta\mu_I(X)$$

において、これを (10) 式に代入し

$$\Delta\mu_I(X) = -\left[\frac{1}{2} + \int_A^B \frac{\mu_I(T) dT}{[(X-T)^2 + r^2(X)]^{3/2}} \right] \cdot \left[\frac{r^2(X) \sqrt{(A-X)^2 + r^2(X)} \sqrt{(B-X)^2 + r^2(X)}}{(B-X)\sqrt{(A-X)^2 + r^2(X)} - (A-X)\sqrt{(B-X)^2 + r^2(X)}} \right] \cdots (12)$$

を求め、 $\mu(T)$ の第二近似値として

$$\mu_{II}(T) = \mu_I(T) + \Delta\mu_I(T) \cdots (13)$$

を採用する。

$$\left. \begin{aligned}\frac{u}{u_0} &= 1 + \int_A^B \mu(T) \frac{2(X-T)^2 - r^2}{[(X-T)^2 + r^2]^{5/2}} dT \\ \frac{v}{u_0} &= \int_A^B \mu(T) \frac{3r(X-T)}{[(X-T)^2 + r^2]^{5/2}} dT\end{aligned} \right\} \cdots (6)$$

したがって、流れの中の任意の一点 $P(x, R)$ における速度 c は

$$\frac{c}{u_0} = \sqrt{\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{u_0}\right)^2} \cdots (7)$$

で与えられ、この点における圧力 p はベルヌーイの式から直ちに求められて

$$\frac{p-p_0}{\rho u_0^2/2} = 1 - \left(\frac{c}{u_0}\right)^2 \cdots (8)$$

となる。ただし p_0 は物体から十分上流の点における圧力なるものとする。

(b) 境界条件 以上の解析を数値的に算定するためには分布している複ゆる出点の強さを決定しなければならない。物体の表面に沿っては流量が零であるから、便宜上物体の表面を形成すべき流線を $\psi=0$ とすることにすれば、物体の表面は $R=R(x)$ として表わしうるから、(5)式で定義した記号を用いると(3)式は

このような計算を数回くりかえして行うことによってえられる $\mu_N(T)$, ($N=I, II, III, \dots$) が最終の $\mu(T)$ を与えることになるのであるが, $\mu_N(T)$ の値に関する検討は (9) 式または (10) 式から導かれる

$$R_N^2(x) = -2R^2(x) \int_A^B \frac{\mu_N(T)}{[(X-T)^2 + r^2(X)]^{3/2}} dT \quad \dots\dots\dots (14)$$

によって算定される $R_N(x)$ と正しい物体の形状を与える $R(x)$ とを比較することによって行うことができる。ここに $R_N(x)$ は $\mu_N(T)$ なる強さの複ゆう出点の分布により形成される近似的な物体の形状を与えるものである。結局 $R_N(x) \approx R(x)$ となるような $\mu_N(T)$ が積分方程式 (10) を満足する $\mu(T)$ として採用されてよい。

3. 半球頭の柱体を軸方向に横切る流れ

流れの研究に当り, 静圧を測定する必要にしばしば遭遇する。静圧を求める最も簡単な方法は壁圧を測定することであるが, 場合によってはこのような方法を利用できないために, 静圧管を流れの中にそう入しななければならないことがある。このような時, 静圧孔は静圧管を形成する流線上の速度が測定せんとする近寄り速度とほとんど等しくなるような先端からきわめて後方の位置に設けることが理想的かも知れないが, それはピトー管を実用上不適当な長さとしてしまう懸念がある。

ピトー管に関する理論的解析の一方法は平行流とゆう出点との組合せにより, すでに古くから行われているところであるが, この時にはゆう出点の採用により

第2図 半球頭の柱体を横切る流れ

第3図 複ゆう出点の分布

頭部の形状が一義的に規定されてしまうため, 実際製作上に困難と思われるような特殊な形となることが避けられない。

前項までに述べたように平行流と複ゆう出点との組合せによれば, 任意の軸対称形の物体のまわりの流れを取扱うことができるから, ピトー管の頭部の形状として便利であると思われる半球頭を有する柱体をその軸方向に横切る流れを考察することは, ピトー管の設計に関する解析的な一資料を提供するものとして意義があろう。

前述の事項にならない半球頭を有する柱体のまわりの流れについて第2図に示すような記号を用いると, これまでに求めた各式の計算をそのまま適用できる。(11)式によって計算した複ゆう出点の強さ $\mu(T)$ の第一近似値, および (12) 式で求めた補正量の関係で5回補正した後ここで $\mu(T)$ の最終値として採用した値は第3図に示すような分布となる。これらの計算に当り必要となる a , b は前述のように複ゆう出点を分布せしめるべき範囲を与える数値である。 b の値については, 静圧孔を設けるべき点で少くともピトー管後尾の影響が無視しうるほど遠方にとればよく, 通常のピトー管の長さが $30R_0$ 程度であることより, ここでは $b=60R_0$ を採用してある。また a については $a=0$, $a=0.5R_0$, $a=1.0R_0$ の3種の値に関し $\mu_{II}(T)$ を算定し (14) 式によって得られる $R_N(x)$ を検討してみた結果, 頭部の形状が $a=0$, $a=0.5R_0$, $a=1.0R_0$ の順に正しい形状から逸脱し, $a=0.5R_0$, $a=1.0R_0$ の場合には $\mu_{III}(T)$ まで補正しても容易に頭部が正しい形状に近似しえないことが確かめられたので $a=0$ を採用してある。

第3図に示したような $\mu(T)$ の値を (14) 式に代入すれば, これらに対応する $R_N(x)$ が求まり物体の近似的な形状を与える。第4図には $\mu(T)$ の第一近似値による形状と最終値としてここに採用した $\mu(T)$ の分布による形状を示し, かつ半球頭の正しい形状と比較してあるが, 最終値として採用した $\mu(T)$ の分布は十分な近似形状を与えるものと考えられる。

このようにして求められた複ゆう出点の分布を (6)

第4図 半球頭柱体の形状

式および (7) 式に代入すれば半球頭の柱体を横切る流れの速度分布が求められ、これらをさらに (8) 式に代入すれば圧力分布も算定することができる。第 5 図および第 6 図にこの柱体表面上における速度分布と圧力分布に関する計算結果を示してある。

Ower および Johansen は種々の形状を有するピトー静圧管に関する実験結果を発表しているが、これらの中で半球頭の柱体に関する実験結果と本論文で求めた理論値とを第 7 図に比較してある。実際に静圧孔の位置として用いられる附近ではわずかの差で一致していることが認められよう。なお第 7 図には平行流とゆう出点との組合せによって得られる頭部の柱体に関する理論値も Handbuch der Experimental Physik より転記して比較してあるが、柱体の頭部で断面が一樣になった点から測って直径の 3 倍附近より下流では本論文で計算した理論値とほとんど一致する結果となっている。換言すれば従来ピトー管で静圧孔の位置として選定される附近においては、頭部の形状は製作に都合のよい半球頭を利用して理論的になんら支障がないことになる。しかし頭部に近づくにつれて、実測値は少いけれどもゆう出点と平行流との組合せによる理論値は、本論文で述べた平行流と複ゆう出点との組合せによる結果よりも当然の結果として実際値からはずれて行く傾向をもつことも第 7 図からうかがえる。

結論として、第 6 図および第 7 図から判定できるように静圧孔の位置は先端から直径の 4~5 倍程度以上、下流の点に設けると頭部の形状にはそれほどこだわらなくても合理的な静圧を測定しようという結果になった。

数値計算に当り助力を受けた山口弘君ならびに文献の入手に対し協力を受けた東大白倉教授に対し謝意を表する。

参 考 文 献

- (1) 有江, 北海道大学工学部紀要, **10**, 2(昭 31), 211.
- (2) E. Ower & F.C. Johansen, *Report and Memoranda*,

第 5 図 半球頭柱体の表面上における速度分布

第 6 図 半球頭柱体の表面上における圧力分布

第 7 図 圧力分布および速度分布の比較
頭部で断面一樣となった点よりの距離 x/D
— 実験結果 (Ower & Johansen)
--- 理論値 (本論文)
---- 理論値 (Handbuch der Experimental Physik)

- No. 981 (1925-8), 1, Aeronautical Research Committee (British).
- (3) Wien Harms, *Handbuch der Experimental Physik*, N, 1(1931), 493, Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H.