539. 4. 013. 3:624. 043. 7:539. 382

不連続箇所を有する平板の平面応力*

(第2報, 片側にすみを丸めた長方形出張りを有する場合)

野村 恭雄**

Plane Stress of the Belt which has the Discontinuity Part

(2nd Report, The Case Having the Rectangular Projection Rounded off the Corner on One Side)

by Yasuo NOMURA

In the preceding report, we solved numerically the plane stresses by using the Taylor series from Schwarz-Christoffel's transformation, when the belt has a rectangular projection on one side.

In this report, alike the first report, using the special method for the convergence of the series, we calculate the edge stresses of the belt having the corner of the rectangular projection rounded off to avoid the stress-concentration at the convex sharp corner. And we got the good result of this numerical calculation by checking with the experiments of the photoelasticity-photograph and the wire strain gauge.

1. 緒言

前報⁽¹⁾においては片側に長方形出張りを有する帯板が無遠慮で引張りを受ける問題を Schwarz-Christoffel の等角写像を用いて単位円に写像し, 写像関数を Taylor 級数にて表示し, これから二次元問題の範囲で応力境界値問題を解く方法をとって, Taylor 級数に展開する場合の機械的な計算方法や, 写像関数, 応力関数などの収束をよくする特別な方法をとることによって, 従来ほとんど数値計算が不可能とされていたところのこの種の凸角や凹角を有する複雑な形状の平面応力問題も, 項数を少し多くする労はあっても, 容易に数値計算が可能であることを示した。しかしてかかる長方形出張りのような不連続箇所の基部すなわち切欠き部は 90° の鋭い切欠きとなっていて, この点では応力集中係数は無限大となるのであって, 普通はこの角のところを丸めて応力集中を避けているのである。そこで今回は帯板の長方形出張りのすみを丸めた場合を, 前報と全く同様にして解いた。

Schwarz-Christoffel の写像関数において, 角に丸味をつける方法は既に宮本慶己氏⁽²⁾によって公にされており, ここではこの方法によったが, なお中原一郎, 笹野 浩両氏⁽³⁾によっても四角棒の角を丸めたときのねじりの問題に応用せられ, 菊川 真氏⁽⁴⁾もまた

これと異なった方法を発表しておられる。

そうしてすみを丸めた長方形出張りを有する場合の写像関数を前報と同様な方法で Taylor 級数に展開し, またこの場合も長方形出張りの角の点や無限遠点に特異点を有するため, 級数の収束はわるく, このときもこれら特異点を加味したある項をかけて計算することによって, 収束は非常によく, 縁応力は容易に求められる。

こうしてえられた結果を今回は光弾性実験と抵抗線ひずみ計によって検討し, これらの計算値が良好なる値を示していることを確かめた。

2. 写像関数

第2図のような幅 $2k$, 高さ h , 曲率半径 ρ なるすみを丸めた長方形出張りを有する幅 $b=1$ の帯板を考え, z 平面において y 軸に關し対称であるとする。

Schwarz-Christoffel の等角写像を用いて, z 平面の図形を ζ 平面の単位円に写像するには, 前報と同

第1図

* 昭和34年4月1日 第36期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和34年4月1日。

** 正員, 山口大学工学部(宇部市常盤台)。

第 2 図

第 3 図

第 1 表

z 平面	ζ 平面
A(z ₁)	ζ _A = e ⁱ⁰ = 1
B(z ₂)	ζ _B = e ^{iα₀} = e ^{i(k+c)}
C(z ₃)	ζ _C = e ^{iα₁} = e ^{i(k/2+c)}
D(z ₄)	ζ _D = e ^{iα₂}
D'(z ₅)	ζ _{D'} = e ^{i(π-α₂)} = -e ^{iα₂}
C'(z ₆)	ζ _{C'} = e ^{i(π-α₁)} = -e ^{iα₁} = e ^{i(k+c)}
B'(z ₇)	ζ _{B'} = e ^{i(π-α₀)} = -e ^{iα₀} = e ^{i(3/2 k+c)}
A'(z ₈)	ζ _{A'} = e ^{iπ} = -1

様に一般には

$$\frac{d}{d\zeta} \log \frac{dz}{d\zeta} = - \sum_i \frac{\lambda_i}{\zeta - \zeta_i} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで $\pi\lambda_i$: z 平面の多角形の外角で表わされる.

ここですみを丸める方法について一般的な考察を行ってみる. 第 3 図において $z_1 z_0 z_2$ の角を丸めようとする
と (1) 式の右辺において

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \sum_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\Delta\lambda}{\zeta - \zeta(\lambda)} = \int_0^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\zeta - \zeta(\lambda)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる.

すなわち, こうすることにより, z 平面上の点 z における無限小の角変位 $\pi \cdot \Delta\lambda$ によって $\Delta\lambda \rightarrow 0$ として積分表示することができ, z 平面上の z_1, z_2 は ζ 平面の単位円上の ζ_1, ζ_2 に対応することとなり, z_0 の外角が $\pi \cdot \lambda_1$ となっている. ゆえに z 平面の曲線の形が与えられると ζ は λ の関数となって

$$\zeta(\lambda) = e^{i(k\lambda+c)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となり (2) 式は積分できる.

そこで第 2 図において, 第 1 表のように, z 平面と ζ 平面の各点を対応せしめると (3) 式の関係から, 第 1 表より

第 1 象限においては

$$k=2(\alpha_0-\alpha_1), \quad C=2\alpha_1-\alpha_0$$

第 2 象限においては

$$k=2(\alpha_0-\alpha_1), \quad C=\pi+2\alpha_1-3\alpha_0$$

$$\dots\dots\dots (4)$$

となる.

したがって (2), (4) 式を用いて (1) 式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \log \frac{dz}{d\zeta} &= - \left[\frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{\zeta+1} + \frac{\frac{1}{2}}{\zeta-e^{i\alpha_2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\zeta+e^{-i\alpha_2}} + \int_1^{1/2} \frac{d\lambda}{\zeta-\zeta(\lambda)} + \int_{3/2}^1 \frac{d\lambda}{\zeta-\zeta(\lambda)} \right] \\ &= - \left[\frac{1}{\zeta^2-1} + \frac{\frac{1}{2}}{\zeta-e^{i\alpha_2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\zeta+e^{-i\alpha_2}} + \int_1^{1/2} \frac{d\lambda}{\zeta-e^{i(2\alpha_1-\alpha_0)}e^{ik\lambda}} + \int_{3/2}^1 \frac{d\lambda}{\zeta+e^{i(2\alpha_1-3\alpha_0)}e^{ik\lambda}} \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

そこで積分の項だけを考えて

$$\begin{aligned} \int_1^{1/2} \frac{d\lambda}{\zeta - e^{i(2\alpha_1 - \alpha_0)} e^{ik\lambda}} + \int_{3/2}^1 \frac{d\lambda}{\zeta + e^{i(2\alpha_1 - 3\alpha_0)} e^{ik\lambda}} &= \frac{-1}{\zeta} + \frac{1}{2(\alpha_0 - \alpha_1)i} \log \frac{(\zeta - e^{i\alpha_0})(\zeta + e^{-i\alpha_1})}{(\zeta - e^{i\alpha_1})(\zeta + e^{-i\alpha_0})} \\ &= \frac{1}{2(\alpha_0 - \alpha_1)i\zeta} \{ \log(1 - e^{-i\alpha_0}\zeta) + \log(1 + e^{i\alpha_1}\zeta) - \log(1 - e^{-i\alpha_1}\zeta) - \log(1 + e^{i\alpha_0}\zeta) \} \\ &= \frac{1}{2(\alpha_0 - \alpha_1)i\zeta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{ (-1)^{n-1} e^{in\alpha_1} - e^{in\alpha_0} - (-1)^{n-1} e^{in\alpha_0} + e^{-in\alpha_1} \} \zeta^n \\ &= \frac{1}{2(\alpha_0 - \alpha_1)i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n'}{n} \zeta^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n''}{n} \zeta^{n-1} \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} a_n' &= (-1)^{n-1} \cos n\alpha_1 + i(-1)^{n-1} \sin n\alpha_1 - \cos n\alpha_0 + i \sin n\alpha_0 - (-1)^{n-1} \cos n\alpha_0 \\ &\quad - i(-1)^{n-1} \sin n\alpha_0 + \cos n\alpha_1 - i \sin n\alpha_1 = \{-1 - (-1)^{n-1}\} \cos n\alpha_0 \\ &\quad + i\{1 - (-1)^{n-1}\} \sin n\alpha_0 + \{1 + (-1)^{n-1}\} \cos n\alpha_1 - i\{1 - (-1)^{n-1}\} \sin n\alpha_1 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} n \text{ が奇数なるとき} \quad a_n' &= 2(\cos n\alpha_1 - \cos n\alpha_0) \\ n \text{ が偶数なるとき} \quad a_n' &= 2(\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_1) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\left. \begin{aligned} n \text{ が奇数なるとき} \quad a_n'' &= \frac{i(\cos n\alpha_1 - \cos n\alpha_0)}{\alpha_1 - \alpha_0} \\ n \text{ が偶数なるとき} \quad a_n'' &= \frac{\sin n\alpha_1 - \sin n\alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)'$$

したがって (5) 式は

$$\frac{d}{d\zeta} \log \frac{dz}{d\zeta} = - \left[\frac{1}{\zeta^2 - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{\zeta - e^{i\alpha_2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\zeta + e^{-i\alpha_2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n''}{n} \zeta^{n-1} \right]$$

ゆえに

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{C}{1 - \zeta^2} e^{-1/2 \{ \log(\zeta - e^{i\alpha_2}) + \log(\zeta + e^{-i\alpha_2}) \}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n''}{n} \zeta^n \dots\dots\dots (7)$$

このうち

$$\begin{aligned} &e^{-1/2 \{ \log(\zeta - e^{i\alpha_2}) + \log(\zeta + e^{-i\alpha_2}) \}} \\ &= e^{-1/2 \{ i\alpha_2 + i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\alpha_2}}{n} \zeta^n - i\alpha_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{in\alpha_2}}{n} \zeta^n \}} \\ &= e^{-1/2 \cdot i\pi} \cdot e^{-1/2n \cdot \{ e^{-in\alpha_2} - (-1)^{n-1} e^{in\alpha_2} \} \zeta^n} = -ie^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n} \end{aligned}$$

ここで

$$a_n = \frac{\{1 - (-1)^{n-1}\} \cos n\alpha_2 - i\{1 + (-1)^{n-1}\} \sin n\alpha_2}{2n}$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} n \text{ が奇数なるとき} \quad a_n &= \frac{-i \sin n\alpha_2}{n} \\ n \text{ が偶数なるとき} \quad a_n &= \frac{\cos n\alpha_2}{n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)'$$

ゆえに (7) 式は

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{-Ci}{1 - \zeta^2} e^{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n} = \frac{-C'}{1 - \zeta^2} e^{\sum_{n=1}^{\infty} A_n' \zeta^n} \dots\dots\dots (8)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} C' &= -Ci \\ n \text{ が奇数なるとき } A_n &= \frac{-i}{n} \sin n\alpha_2 + \frac{i}{n^2} \frac{\cos n\alpha_1 - \cos n\alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \\ n \text{ が偶数なるとき } A_n &= \frac{1}{n} \cos n\alpha_2 + \frac{1}{n^2} \frac{\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)'$$

今ここで $\alpha_1 - \alpha_0$ の場合を考えると、この極限は丸味がなくなって 90° の鋭い切欠きの前報の場合となる。すなわち

$$\alpha_1 - \alpha_0 = \Delta\alpha \quad \text{とおいて}$$

$$\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_1 = -2 \sin \frac{n}{2} \cdot \Delta\alpha \cdot \cos \frac{n}{2} (\alpha_1 + \alpha_0) \approx -n \Delta\alpha \cos n\alpha_0$$

$$\cos n\alpha_0 - \cos n\alpha_1 = 2 \sin \frac{n}{2} \cdot \Delta\alpha \cdot \sin \frac{n}{2} (\alpha_1 + \alpha_0) \approx n \cdot \Delta\alpha \cdot \sin n\alpha_0$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} n \text{ が奇数のとき} \\ A_n &= \frac{-i}{n} \sin n\alpha_2 + \frac{i}{n^2} \frac{n \cdot \Delta\alpha}{\Delta\alpha} \sin n\alpha_0 = \frac{i}{n} (\sin n\alpha_0 - \sin n\alpha_2) \\ n \text{ が偶数のとき} \\ A_n &= \frac{1}{n} \cos n\alpha_2 + \frac{1}{n^2} \frac{(-n) \Delta\alpha}{\Delta\alpha} \cos n\alpha_0 = \frac{1}{n} (\cos n\alpha_2 - \cos n\alpha_0) \end{aligned} \right\}$$

ゆえに α_2 を α_1 とかき改めると 90° の鋭い切欠きを有する長方形出張りの前報の式 (3) と一致する。したがって前報の場合がわかっておれば、丸味を有するときには、丸味のところだけを考慮して、これを前報の結果に加えればよいことになる。

次に (8) 式において $e^{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n}$ を ζ のべき級数に展開すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= \frac{C'}{1-\zeta^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \\ \text{ただし} \\ b_0 &\equiv 1, \\ b_n &: a_1, a_2, \dots, a_n \text{ の関数} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

となり、さらに (9) 式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= C' \sum_{n=0}^{\infty} C_n \zeta^n \\ \text{ただし} \\ C_0 &\equiv 1 \\ n \text{ が奇数なるとき } C_n &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} b_n \\ n \text{ が偶数なるとき } C_n &= \sum_{n=0,2,4}^{\infty} b_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

となって (10) 式から

$$z = C' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} \zeta^{n+1} \dots\dots\dots (11)$$

となり、写像関数 $z(\zeta)$ は ζ の Taylor 級数によって表わされる。

ここで (8) 式の $e^{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n}$ のような形を ζ のべき

級数に展開する方法は、前報と全く同様に機械的な計算方法に従えば容易にできる。

定数 C' を決定するには、(9) 式から第 2 図において

$$\begin{aligned} z_1 - z_{10} &= i = \lim_{\zeta \rightarrow 1} C' \int_{1-0}^{1+0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n}{1-\zeta^2} d\zeta \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{C'}{2} \int_{1-0}^{1+0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \left\{ \frac{1}{1-\zeta} + \frac{1}{1+\zeta} \right\} d\zeta \end{aligned}$$

積分を $\zeta=1$ の近くで考えると、第 4 図において

$$\int_{1-0}^{1+0} \frac{\zeta^n}{1+\zeta} d\zeta = 0 \quad (n \geq 0)$$

何となれば

$$1 - \zeta = re^{i\theta} \quad \text{とおくと} \quad d\zeta = -rie^{i\theta}$$

$$\therefore \lim_{r \rightarrow 0} \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1-re^{i\theta})^n}{2-re^{i\theta}} (-rie^{i\theta}) d\theta = 0$$

また

$$\begin{aligned} \int_{1-0}^{1+0} \frac{\zeta^n}{1-\zeta} d\zeta &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1-re^{i\theta})^n}{re^{i\theta}} (-rie^{i\theta}) d\theta \\ &= \pi i \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

第 4 図

$$\text{ゆえに} \quad i = \frac{C'}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \pi_i$$

$$\therefore C' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{b_n \cdot \pi} \dots\dots\dots (12)$$

となり、前報の C と今回の C' は全く同じこととなる。

したがって (11) 式から

$$\left. \begin{aligned} k + \rho &= R \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{b_n \cdot \pi} \cdot \frac{C_n}{n+1} e^{i(n+1)\alpha_0} \\ 1 + \rho &= I \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{b_n \cdot \pi} \cdot \frac{C_n}{n+1} e^{i(n+1)\alpha_1} \\ 1 + h &= I \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{b_n \cdot \pi} \cdot \frac{C_n}{n+1} e^{i(n+1)\alpha_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

となり、これから $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ が理論的に h, k, ρ される。

の関数として求まる。しかし一般には困難であるから、前報と同様に $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ に適当な値をいれて h, k, ρ を求める。

3. 応力境界値

(11) 式の写像関数から二次元問題の範囲で応力境界値問題をとくには、前報と同様に菊川氏⁽⁵⁾の用いられた複素応力関数と同様な方法によって求める。

すなわち z 平面の領域 D における平面応力成分は二つの解析関数 $\varphi(z), \psi(z)$ によって次のように表わ

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} + \widehat{yy} &= 2[\varphi'(z(\zeta)) + \overline{\varphi'(z(\zeta))}] = 4R \cdot \varphi'(z(\zeta)) \\ \widehat{xx} - \widehat{yy} + 2i\widehat{xy} &= -[\{z(\zeta) + \bar{z}(\zeta)\} \varphi''(z(\zeta)) + \overline{\varphi''(z(\zeta))} + \psi'(z(\zeta))] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで領域 D を写像関数 (11) 式 $z = z(\zeta)$ によって ζ 平面内の単位円 $|\zeta| = 1$ の内部に写像して

$$\zeta = e^{i\tau} \dots\dots\dots (15)$$

なる直交曲線座標 (ν, τ) をとると、 $\nu = 0$ は ζ 平面の単位円 K となり、これは z 平面の境界曲線を示す。さて

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(z) \cdot z'(\zeta) &= F(\zeta) \\ \psi'(z) \cdot z'(\zeta) &= G(\zeta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

とおくと (14) 式から

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\nu\nu} + \widehat{\tau\tau} &= 4R \cdot \frac{F(\zeta)}{z'(\zeta)} \\ \widehat{\nu\nu} + i\widehat{\tau\nu} &= \frac{1}{z'(\zeta)} \left[F(\zeta) + \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{z(\zeta) + \bar{z}(\frac{r^2}{\zeta})}{\bar{z}'(\frac{r^2}{\zeta})} \bar{F}(\frac{r^2}{\zeta}) \right\} + \left(-\frac{r^2}{\zeta} \right) \bar{G}(\frac{r^2}{\zeta}) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ただし ζ についての微分は r を定数、 ζ は r に無関係なる独立変数と考えて微分するものとし、—のついているものはその共役なる関数とする。

したがって応力境界値問題を解くには、与えられた境界応力 $\widehat{\nu\nu}(\tau), \widehat{\tau\nu}(\tau)$ から (17) 式が $|\zeta| = r = 1$ でも成立するとして $z'(\zeta) \neq 0$ とすると

$$\{\widehat{\nu\nu}(\tau) + i\widehat{\tau\nu}(\tau)\} z'(e^{i\tau}) = \left[F(\zeta) + \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{z(\zeta) + \bar{z}(\frac{1}{\zeta})}{\bar{z}'(\frac{1}{\zeta})} \bar{F}(\frac{1}{\zeta}) \right\} + \frac{-1}{\zeta^2} \bar{G}(\frac{1}{\zeta}) \right]_{\zeta=e^{i\tau}} \dots\dots\dots (18)$$

を満足するような

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_k \zeta^k \\ G(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} G_k \zeta^k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

の係数 F_k, G_k を求むればよいことになる。そこで前報と同じように

$$\frac{z(\zeta) + \bar{z}(\frac{1}{\zeta})}{\bar{z}'(\frac{1}{\zeta})} = Z(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_k \zeta^k \dots\dots\dots (20)$$

において

$$\{\widehat{\nu\nu}(\tau) + i\widehat{\tau\nu}(\tau)\} z'(e^{i\tau}) = H(\zeta)|_{\zeta=e^{i\tau}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_k \zeta^k \dots\dots\dots (21)$$

なる境界応力関数から、これらをそれぞれ (18) 式に代入すれば前報の (27) 式の応力境界値問題における基礎方程式が求まる。

しかし、前報でのべたように境界曲線に無限遠をもつ場合には上のままでは満足されないから、無限遠における異常応力関数を考えて

$$F_{\infty}(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-\zeta^2}, \quad G_{\infty} = \frac{1}{2\pi} \frac{-3}{1-\zeta^2} \dots\dots\dots (22)$$

これに対応する境界応力関数として

$$\begin{aligned} H_{\infty}(\sigma) &= \left[F_{\infty}(\zeta) + \frac{d}{d\zeta} \left\{ Z(\zeta) \bar{F}_{\infty} \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\} + \frac{-1}{\zeta^2} \bar{G}_{\infty} \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right]_{\zeta=\sigma} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1-\zeta^2} + \frac{d}{d\zeta} \left\{ Z(\zeta) \frac{-1}{1-\zeta^{-2}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-1}{\zeta^2} \frac{-3}{1-\zeta^{-2}} \right]_{\zeta=\sigma} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-2}{1-\zeta^2} + \frac{d}{d\zeta} \left\{ Z(\zeta) \frac{1}{1-\zeta^{-2}} \right\} \right]_{\zeta=\sigma} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d}{d\zeta} \left\{ \left(Z(\zeta) - (1-\zeta^{-2}) \log \frac{1+x}{1-x} \right) \left(\frac{1}{1-\zeta^{-2}} \right) \right\} \right]_{\zeta=\sigma} \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

を考える。そうすると無限遠で引張りがはたらいいてい
る以外にはなんらの力が作用してないのであるから、
求める境界応力関数 $H(\sigma)$ は

$$H(\sigma) = -H_{\infty}(\sigma) \dots\dots\dots (24)$$

となり、縁応力 $\widehat{\tau\tau}$ は (17) 式から $\widehat{\nu\nu}=0$ であるから

$$\widehat{\tau\tau} = 4R \cdot \left\{ \frac{F(e^{i\tau}) + F_{\infty}(e^{i\tau})}{z'(e^{i\tau})} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

となる。

したがって応力集中係数 α_s は

$$\alpha_s = \frac{\widehat{\tau\tau}_{\max}}{\widehat{\tau\tau}_{\infty}} = \widehat{\tau\tau}_{\max} \dots\dots\dots (26)$$

となり $\zeta=\sigma$ における曲率半径を ρ とすると

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{z'(\sigma)} \left\{ 1 + R \cdot \left[\sigma \frac{z''(\sigma)}{z'(\sigma)} \right] \right\} \dots\dots\dots (27)$$

となる。

(20) 式または (22) 式から自由境界における縁応力 $\widehat{\tau\tau}$ を求めるときは $F(\zeta)$ および $z'(\zeta)$ の収束は、このような特異点をもつようなときには非常にわるいことは前報の場合と全く同様である。そこで

$$\left. \begin{array}{l} \text{無限遠点の極に対しては: } (1-\zeta^2) \\ \text{凸角の点の分岐点に対しては:} \\ \quad \{(\zeta-\zeta_2)(\zeta-\zeta'_2)\} \end{array} \right\}$$

を (20) 式の分母、分子にかける。すなわち

$$X(\zeta) = (1-\zeta^2) \{(\zeta-\zeta_2)(\zeta-\zeta'_2)\}$$

なる $X(\zeta)$ をかけることによって $F(\zeta)$, $z'(\zeta)$ の収束は非常によくなる。これを図示したのが第 5 図 (a) (b) である。

(24) 式の曲率半径を計算するときも同様な方法をとることはもちろんである。

4. 数 値 計 算

(11) 式の関係において

(a)

(b)

第 5 図

第 2 表

位置	α	0°	25°	30°	33°	35°	37°	40°	45°	60°	90°	270°	315°	$\widehat{\tau\tau}_{\max}$
x	∞		0.673	0.597	0.588	0.575	0.554	0.561	0.546	0.506	0	0	0.382	
y		1.000	1.005	1.036	1.035	1.049	1.056	1.059	1.110	1.401	1.417	0	0	
$\widehat{\tau\tau}$		1.000	1.023	1.504	2.297	3.246	2.847	1.941	0.184	0	0.021	0.915	0.978	3.246

$2k/b=1.092$, $h/b=0.417$, $\rho/b=0.110$ するとき $\alpha_s = \widehat{\tau\tau}_{\max}/xx = 3.246$

$$\alpha_0=30^\circ, \quad \alpha_1=45^\circ, \quad \alpha_2=60^\circ$$

とにおいて $z(\zeta)$ を 40 項まで計算すると

$$\left. \begin{aligned} k &= 0.546 \\ h &= 0.417 \\ \rho &= 0.110 \end{aligned} \right\}$$

となる。

そうしてこの数値計算による点をプロットしたのが第6図の右半分の点であり、長方形出張りの凸角の部はいくらか丸味をおびている。これはもちろん無限級数の項の打ち切りによって生じた結果であり、ここは当然90°の角となるべきである。このときの写像面の単位円周上における α の位置に対する z 平面上の座標の値を示したのが第2表の上部である。

そうして自由境界における縁応力 $\widehat{\tau\tau}$ を計算したのが第2表の下部である。この点をプロットしたのが第6図の左半分の白点である。したがって、最大応力集中は丸味の始まるすぐ近くに生じ、その値は

$$\alpha_s = \frac{\widehat{\tau\tau}_{\max}}{xx_{\infty}} = xx_{\max}(35^\circ) = 3.246$$

となる。

また図から求めた曲率半径 ρ は

$$\rho = 0.110$$

であり、(24) 式の計算から求めると、35° の点で

$$1/\rho = 10.504 \quad \therefore \quad \rho = 0.0952$$

となって、いくらか小さく出ている。

5. 実 験

以上の数値計算の結果を検討するいみで、光弾性実験および抵抗線ひずみ計による実験を行った。

光弾性実験は前報と全く同様に行い、加工効果のおこらぬよう、また試験片にモーメントのかからぬように行った。この結果の等色写真が第7図であり、これから自由境界における縁応力は求められる。

抵抗線ひずみ計による実験は厚さ6mmのアルミニウム合金板(JIS, H 104, A2P4-T6)を用い、数値計算の尺度を基準に第8図のような試験片をつくり、ゲージを図中の No. で示した位置にはりつけた。これらのゲージのうち No. 7, 8, 9, 10 および反対側の同数のものは、帯板の中央部で引張った場合この

無限遠において 1 kg/mm^2 の力で引張った場合の縁応力値
● 実験値, ○ 理論値

第 6 図

第 7 図

ゲージの位置: 1~12

ただし 9, (10) はうらおもてに, 2~6, 7, 8, 11 は左右対称の位置にはる

第 8 図

試験片にモーメントのかからぬよう、ひずみ計で調整するためのものであり、引張装置は荷重の偏心を調節できるボール入りの球面座⁽⁶⁾を用いた。またひずみゲージは標点距離3mmの紙ゲージS131Sをポリエステル系の接着剤を用いてかなり高い圧力を加えてはった。

光弾性実験の結果は計算値と比べて少しばかり大きい値を示したが、ほとんど近い値であり、この値は第

6 図の左半分の黒点である。しかしひずみ計の示す値はその標点距離の応力の平均値であるから、丸味のところのように応力こう配のはげしいところでは当然計算値より低い値を示しているが、その傾向は光弾性の場合や計算値とほとんど同じである。この結果からみると数値計算の結果はだいたい良好なる値をえている。

6. 結 語

以上 Schwarz-Christoffel の等角写像を単位円に写像する方法によって写像関数を Taylor 級数で表わし、この写像関数から複素応力関数を Taylor 級数に展開して未知定数を定める応力境界値問題の方法で、前報の片側に長方形出張りを有する平板の場合について、その凹角部の応力集中をさけるため普通用いられているところのすみを丸めた場合について計算した。この際も前報と同じように写像関数を表わす方法に、機械的方法を用いることによって収束のため相当項までとる手数を容易にかつ正しく行えるようにし、また級数収束に関しては、収束をわるくしている特異点を加味した項をかけることによって、項の打ち切りによる誤差の少くなるような方法をとった。

こうすることによって、凸角や凹角を有するような複雑な形をした不連続箇所を有する平板の平面応力問

題は必ず数値的にもとけることとなり、光弾性実験および抵抗線ひずみ計など実験と比較して、良好なる値をえている。

なおこの研究は大阪大学教授 菊川 真博士に終始御指導をうけ、また大阪大学教授 太田友弥博士、山口大学 久保敏彦講師にも、いろいろと御指導御助言を賜わった。また実験については、光弾性では大阪大学 松浦義一助教授、同 村井信二氏、木村尙里氏、実験装置を快く貸与された神戸大学 進藤明夫氏、光弾性写真については理化学研究所 西田正孝博士、抵抗線ひずみ計実験については大阪大学研究生 (滋賀短大) 佐藤芳久助教授にいろいろと御助力、御助言を仰いだ。あわせてこれらの方々に厚く感謝する次第である。

最後に本研究は昭和 33 年度科学研究費各個研究による研究成果の一部であることを付記する。

文 献

- (1) 野村, 本論文集 1075 ページ.
- (2) 宮本, 二次元問題 (昭 26), 149, 修教社.
- (3) 中原, 笹野, 第 32 期定時総会講演会前刷 講演番号 115 (昭 30-4-7).
- (4) 菊川, 第 5 回応用力学連合講演会前刷 講演番号 117 (昭 30-9).
- (5) M. Kikukawa, *Proc. 4th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* 1954 (1955), 149.
- (6) 菊川, 佐藤, 江口, 昌谷, 関西支部第 204 回講演会前刷 講演番号 105 (昭 34-3-18).

討 論

〔質問〕 本問題は従来多くの研究者から注目されていたにもかかわらず、数値計算の収束が悪いため未解決であったと思う。本論文はこの点を解決する一方法を提示したものとして興味がある。

(1) 出張りのすみを丸める曲線の形状、曲線上の各点の曲率の値は応力集中に大きい影響を持つと考えられる。数値計算をされた例ではこれらがどのようにになっているか。また第 2 図 B 点が $\alpha = \alpha_0 = 30^\circ$ に対応すると思うが、第 2 表の数値はこれでよいか。

(2) この種の上下非対称図形では引張力が大になり、変形が大きくなると上下の変形の差により面内曲げを生じやすいと考えられる。光弾性実験材料は弾性定数が小さいのでこの影響は大きく、私も片側に半円切欠きをもつ帯板の引張実験を行った際苦労した。光弾性実験の際この点についてどのような考慮をされたか。

(玉手 統)

〔回答〕 1. すみを丸めた場所における曲率半径は (2), (3) 式からわかるように、完全なる円弧の一部としては与えられず、各点においてその値は異なっている。ここで数値計算した結果では、 ζ 平面の単位

円における $\alpha = 30^\circ, 33^\circ, 35^\circ, 37^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ であって、その平均値が 0.110 となり、これらをプロットした点はだいたい半径 0.110 の円周上にのっている。

(25) 式から計算した曲率半径は $\widehat{\tau\tau}_{\max}$ の点すなわち $\alpha = 35^\circ$ の点の値で、このとき図から求めた値は 0.100 となっている。

2. 第 2 図 B 点の値すなわち $\alpha = 30^\circ$ の点における y 座標の値は指摘のように厳密には帯板の幅 $b = 1.000$ と等しくなるべきです。しかしこれは写像関数 $z(\zeta)$ なる無限級数をここでは有限項 (この場合は 40 項) で打ち切ったため、当然その値は 1.000 を前後する値を示すであろうことは容易に想像される。第 2 表によるとこの値が 1.036 となって少し大きく出ているが、一応数値計算の結果ではこのようにでたので、そのまま記した。

3. 光弾性実験において曲げの影響がこのような非対称図形では当然考えられる。しかし幸いに神戸大学 進藤明夫氏と大阪大学大学院 木村尙里氏の共同研究「引張りをうける段付板の弾塑性応力のち緩法による解析」の際両氏の考案された引張装置はこの点について

ピン継手を採用して曲げのわからぬようにしている。簡単に述べると附図1のように二重てこによって荷重を腕比 b/a だけ拡大できるようにし A 点はピン継手を用い、かつ調整用ねじがついており試験片に荷重をかけて一様な縁応力を示すところの帯板の一樣部が一樣な明るさになるよう、すなわちモーメントがかかっておればここにしま模様はいるのでそうさせないように調整ねじで調整して、目でみながら全く曲げのわからない荷重をかけるようにしてある。そうして相当大きい荷重をかけるため、試験片のつかみ部には前後にアルミ板を接着剤にてはりつけ、これに 4~5 mm の穴を3箇所あけて引張用三角板とともにボルトでしめて引張るという風にしてある。こうすれば目でみながらしま模様が対称にでるよう調整しながらできるのでこの目的は達せられる。

なお追加実験として同様な形状における抵抗線ひずみ計の引張実験を行った。このときは球面座による引張装置を用い、帯板の一樣幅の応力一樣となる点の左右両翼の上、下縁および帯板の一樣幅の中央部の表裏にそれぞれひずみ計をはりつけ、このゲージの値が等しくなるよう球面座を四方から調整するようにして曲げを防ぐようにした。

【質問】 (1) 第6図の右半に境界形状を黒丸で示してあるが、この黒丸は z 平面の角度で何度に対応するか、また上下直線縁に点が少いようですが、この辺の実際の形はどうなるか。

(2) 計算された寸法の近くでは板幅の変化はあまり α に関係せず $\rho:h:k$ がかなり影響すると思うが、この点について今後の研究で系統的な資料が得られると、一層有益と思う。(石田 誠)

【回答】 1. k, h, ρ は理論上 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ の関数として表わされているが、計算上ではこの $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ の値を定めて k, h, ρ を求めた。したがって第6図の右半の丸は α のいろんな点で計算したものをプロットすべきで、この曲率がどのようになるかと

附 図 1

いうことが大切だと思うので数値計算では $\alpha=30^\circ, 33^\circ, 35^\circ, 37^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ ($\alpha=30^\circ\sim45^\circ$ の間がいわゆる丸められている) を求めたが図では $30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ の点のみを記した。 30° の右にある点は $\alpha=25^\circ$ の点で長方形突出部の角が 60° 、中央点が 90° 、下縁の中央は 270° 、その右は 315° となっている。

なお上下両縁に点の少いのはここでは当然直線となるべきですから、そこは少ししか求めていない。ただ α が 0° の点は z 平面の無限遠点に当り、これは z 平面の A 点、E 点だから (すなわち z 平面上の図形は無限遠点でつながった多角形と考えるから) 計算すれば当然帯板の直線縁上にのらず、多角形となるような位置を示すと思うので、 25° 以下、 315° 以上は計算せず、 $25^\circ, 315^\circ$ の点で直線をひいた。

2. この方法によると α の値を与えて、ただ一組の k, ρ, h が出るわけで、指摘のように実際に役立つようにするには今少し多くのデータが必要です。そこでさらに計算をすすめて設計公式なるものを導出する考えていろいろな h, k, ρ における応力集中係数を求めてみようと思っている。

ニュース

黒鉛の多孔性の改良

イギリス航空省の創意を、イギリス政府の原子力機関の委嘱で開発した、黒鉛の多孔性を減少する技術をホーカー・シドレー社が発表した。

通常の黒鉛は細粉のコークスにピッチのような結合剤を、適当な割合に配合して圧縮あるいは押し出して次に 2800°C に加熱するが、この方法ではできた黒鉛が多孔性のものになる。最近、高温ガス冷却原子炉用に多孔性のきわめて低い黒鉛の需要が高まってきた。炭素分 61% をもつフルフルル・アルコールに各種の物質を添加したものを加え、注意深く熱処理を施し、

黒鉛の気孔中に炭素を残すようにして多孔性をいちじるしく減少する。改良黒鉛の用途は広い。この黒鉛は特殊セメントで接合して、高温炭化の後でも不透過性を保持する。

黒鉛製熱交換器はすでに化学工業で用いられているが反応温度は $160\sim170^\circ\text{C}$ に限られ、黒鉛に浸透させた樹脂が、この温度以上では分解して液体の不浸透性を失うが、新製品の黒鉛では高温でもその心配はない。(Chemical Trade Journal. 145 [69] 1159)

(日本科学技術情報センター提供)