624. 042. 8 : 624. 072. 2:539. 384. 019. 1

はりの衝撃に関する研究*

戸部俊美**

On the Impact of Beam

by Toshimi TOBE

Problems of lateral vibrations and the dynamic loads produced in a beam struck by a falling body have been treated by many authors, but in their theories only the impact caused by a spherical ball moving at a given velocity was discussed. The problem of impact caused by a falling body with a cylindrical contact surface has not been treated for the reason of its complication. The relative approach in a cylinder-contact has a complicated mathematical form as compared with the case of a ball-contact, but it is very important problem in practice. In this paper two methods are developed to treat the cylinder-contact problem; (a) numerical method and (b) collocation method. The collocation method leads to a reasonable and sufficiently approximate solution without difficulty. Numerical examples and the effects of non-dimensional characteristic coefficients (k_1 , k_2 , k_3 , and k_M) are treated and the time dependency of deflection of the beam is calculated.

1. 緒言

はりの衝撃および衝撃荷重(力)に基づくはりの振動は、多くの人々により理論的に解明されている。しかしながら、これらは球による衝撃の場合のみを取扱っており、円筒状物体による衝撃の問題は、まだ解析されておらぬようである。

衝撃現象および衝撃による振動の様相は、球の衝撃の場合の解析から知ることができるが、実際の応用面(平歯車の動荷重⁽¹⁾等)においては、本報告において取扱うような円筒接触面を有する場合も重要であると思われる。また接触面の形状の差異が、その結果において、いかなる相違を示すかということも興味のあることである。

衝撃の問題においては、衝撃をうけた後の振動の状態を知ることが大切であるが、衝撃時の荷重変化、その作用時間を知ることが最も重要であると思われるので、Timoshenko⁽²⁾の方法を用いることとし、接触点の変形(相対接近量)の計算には、Lundberg⁽³⁾の計算結果を採用した。以下の取扱いにおいては、衝撃円筒の軸ははりの軸と直交するものとし、また衝撃波の影響は考慮していないので、この意味においては近似的なものである。本報告においては、数値積分によ

る解と、Collocation 法による近似解とを求めた。

2. 相対接近量(relative approach) α について

弾性接触論における相対接近量の計算の中で、最も代表的なものは Föppl および Lundberg のものである。ここでは有限円筒による衝撃をも取扱うために Lundberg の計算結果を用いることにする。すなわち、相対接近量 α は次式

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\theta} \frac{P}{a} \phi_0 \left(\frac{b}{a} \right) \\ \phi_0 \left(\frac{b}{a} \right) &= \frac{2}{\pi} \left[1.8864 + \log_e \frac{a}{b} \right] \\ b &= \left[\frac{16}{\pi} \cdot \frac{R}{\theta} \cdot \frac{P}{a} \right]^{1/2} \\ \frac{1}{\theta} &= \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ \theta_i &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。ここに、 P は 2 物体を互におしつける力、 b は接触幅、 a は接触面の奥行き、 R_1 , R_2 は 2 物体の接触面の曲率半径(いまの場合は $R=R_1$, $R_2=\infty$)、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。

衝撃の問題においては、 P は時間とともに変るので、これを求めることが一つの重要な問題である。

(1) 式を整理し、無次元化すれば次式のように表わすことができる。

* 昭和 29 年 11 月 28 日 東京秋期講演大会において講演、原稿受付 昭和 34 年 2 月 5 日。

** 正員、東北大学工学部(仙台市平丁)

$$\left. \begin{aligned} \alpha^* &= p(t) [k_1 - \log_e p(t)] \\ p(t) &= \frac{1}{\pi \Theta} \cdot \frac{P}{a^2} \\ k_1 &= 2 \times 1.8864 - \log_e \frac{16R}{a} \\ \alpha^* &= \alpha/a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)'$$

3. 衝撃の基礎方程式

はりの軸方向を x 軸, 衝撃点の座標を x_0 , 衝撃体の変位を w_c , はりのたわみを w とし, それぞれ はりの静止位置を基準にして測ることとする. 衝撃後の物体の運動は, m^* をその質量とすれば,

$$m^* \frac{d^2 w_c}{dt^2} = -P(t) \dots\dots\dots (2)$$

で与えられ, $P(t)$ は衝撃体と はり の間に作用する力である.

第1図 変位と相対接近量の関係

$$w = \frac{g}{\rho F} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{b_m} g_m(x_0) g_m(x) \int_0^t \frac{1}{\alpha_m} P(\tau) \sin \alpha_m(t-\tau) \cdot d\tau \dots\dots\dots (9)$$

w_0 は $x=x_0$ とおくことにより,

$$w_0 = \frac{g}{\rho F} \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_0^t \frac{1}{\alpha_m} P(\tau) \sin \alpha_m(t-\tau) \cdot d\tau \dots\dots\dots (10)$$

となる. ここに,

$$\left. \begin{aligned} c_m &= \frac{g_m^2(x_0)}{b_m}, \\ \int_0^l g_m(x) g_r(x) \cdot dx &= \begin{cases} b_m, & r=m \\ 0, & r \neq m \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

にして, l は はり の長さを示す.

(4) 式に (1), (3), (10) 式を代入して整理すれば, 次のようになる.

$$k_1^* P(t) [k_2^* - \log_e P(t)] = vt - \int_0^t K(t-\tau) \cdot P(\tau) \cdot d\tau \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} k_1^* &= \frac{1}{\pi a \Theta}, & k_2^* &= 2(1.8864 + \log_e a^{3/2} c^{-1}) \\ c &= \left[\frac{16R}{\pi \Theta} \right]^{1/2}, & K(t) &= \frac{t}{m^*} + \frac{g}{\rho F} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\alpha_m} \sin \alpha_m t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$t=0$ において, $w_c=0$, $\dot{w}_c=v$ として (2) 式を積分すれば,

$$w_c = vt - \frac{1}{m^*} \int_0^t (t-\tau) \cdot P(\tau) \cdot d\tau \dots\dots\dots (3)$$

となる. ここに v は物体の衝撃速度である.

力の作用点における はり のたわみを w_0 ($x=x_0$ における w) とすれば, α はつぎのようになる.

$$\alpha = w_c - w_0 \dots\dots\dots (4)$$

(4) 式中の w_0 はまた次式の解として求められるものである.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_2 I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\rho F}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(t) \delta(x-x_0) \dots\dots\dots (5)$$

式中, I は はり の慣性能率, ρ は密度, F は断面積, $\delta(x)$ は Dirac の δ 関数である.

この方程式を解くに当り, Duhamel の方法を用いることとすれば,

$$w = \int_0^t G(x, t-\tau) P(\tau) d\tau \dots\dots\dots (6)$$

とおき, $G(x, t)$ はつぎの微分方程式および初期条件を満足するように定めなければならない.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_2 I \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) + \frac{\rho F}{g} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= 0 \\ G(x, 0) &= 0, \quad \left[\frac{\rho F}{g} \frac{\partial G}{\partial t} \right]_{t=0} = \delta(x-x_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

(7) 式の解 $G(x, t)$ をつぎの形におく.

$$G(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m g_m(x) \sin \alpha_m t \dots\dots\dots (8)$$

$g_m(x)$ は直交関数であるとし, δ 関数の性質を用いると, a_m は簡単に決定され, w は次式で与えられる.

(12) 式が衝撃荷重 $P(t)$ を決定する基礎方程式である。これは、非線形の積分方程式であり、解析的に解くことは困難である。この方程式の解を求めるには、Timoshenko の用いた数値積分法によるか、Galerkin 法、Collocation 法等の近似解法を用いることができる。しかしながら、Galerkin 法は実際には繁雑であり、Collocation 法が簡単で、しかも十分な近似値を与えることが知られた。

以上の取扱いにおいて、 $g_m(x)$ 、 α_m はその境界条件によって定まるものであり、次節において述べる。

4. c_m , a_m について

α_m は固有値であり、各種境界条件に対する値は、各種の著書に記載されているものであるから、以下の取扱いに必要な両端支持の場合に対してのみ、記述することにする。すなわち両端支持はりに対し、

$$\left. \begin{aligned} g_m(x) &= \sin \frac{m\pi x}{l}, & \alpha_m^2 &= \frac{m^4 \pi^4 g E_2 I}{\rho l^4 F}, \\ b_m &= \frac{1}{2} l, & c_m &= \frac{2}{l} \sin^2 \frac{m\pi x_0}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

となる。さらにいま、はりの中央 $x_0 = l/2$ に衝撃をうけるものとすれば、 $g_m(x_0)$ はつぎのように簡単になる。

$$g_m^2(x_0) = \left(\sin \frac{\pi}{2} m \right)^2 = \begin{cases} 1, & m = 1, 3, 5 \dots \\ 0, & m = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

5. 数 値 解 法

数値計算によって、(12) 式の解を求めるには、 w_0 の積分を和の形に書きかえる必要がある。

両端支持はりの w_0 は (14) 式を用いて

$$w_0 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{l^2}{b^* \pi^2} \frac{2g}{\rho F l} \int_0^t P(\tau) \sin \frac{b^* m^2 \pi^2}{l^2} (t-\tau) \cdot d\tau \dots\dots\dots (15)$$

となる。ここに、 b^* は

$$b^* = \left[\frac{g E_2 I}{\rho F} \right]^{1/2}$$

である。(15) 式中の積分を和の形で表わすために、時間 $0 \sim t$ 区間を $t_1 = t/n$ に分割し、さらにこの区間においては $P(t)$ は近似的に平均値 $P_1', P_2', \dots, P_n'$ をとるものと仮定する。このようにすれば、(15) 式の積分はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \int_0^t P(\tau) \sin \frac{b^* m^2 \pi^2}{l^2} (t-\tau) \cdot d\tau &\approx \frac{l^2}{b^* \pi^2 m^2} \left[P_1' \left\{ \cos \frac{b^* \pi^2 m^2}{l^2} (t-t_1) - \cos \frac{b^* \pi^2 m^2}{l^2} t \right\} \right. \\ &\quad \left. + P_2' \left\{ \cos \frac{b^* \pi^2 m^2}{l^2} (t-2t_1) - \cos \frac{b^* \pi^2 m^2}{l^2} (t-t_1) \right\} + \dots + P_n' \left\{ 1 - \cos \frac{b^* \pi^2 m^2}{l^2} t_1 \right\} \right] \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\left. \begin{aligned} B_n &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \cos \frac{b^* \pi^2 m^2}{l^2} \cdot n\tau \left\{ \dots\dots\dots (17) \right. \\ \Delta_{n-1}^n &= B_{n-1} - B_n \end{aligned} \right\}$$

とおくことにより、(16) 式は簡単化される。要するに B_n の関数表があれば、その第 1 階差から w_0 を求めることができることになる。

衝撃体の変位 w_c は (3) 式で、また相対接近量 α は (4) 式にて与えられるから、これらの諸式と (15) 式を組合わせて、つぎのような操作を繰返しながら、 P_n を求める。すなわち、始めの区間 ($n=1$) においては、最初衝撃体の速度変化を無視し、 $\alpha = vt_1$ と仮定し、(1)' 式の P に相当する値 P_1 を求める。この P_1 は $t=t_1$ すなわち第 1 の区間の終りにて生ずる力と考えられる。ゆえに、この区間において平均値 P_1'

$= P_1/2$ を有するものと仮定して、 w_c および w_0 を求め、 $\alpha = w_c - w_0$ から再び P_1 を求める。このような操作を繰返して、 P_1 が許容誤差の範囲内で一致するまで計算を繰返す。つぎに、 $n=2$ の区間の終りにおける圧力 P_2 を決定するためには、始めに第 1 および第 2 の区間の圧力 P' は一定であり、 P_1 に等しいものと仮定して第 1 近似値を求める。また、 P_1 を用いて w_c , w_0 を求め、これから P_2 を決定する。このようにして第 1 近似の P_2 が求められたならば、つぎに第 1 の区間では $P_1' = P_1/2$ 、第 2 の区間では $P_2' = (P_1 + P_2)/2$ をとるものとして再び計算を行い、 P_2 に対する第 2 近似値を求める。この計算を繰返して、 P_2 の値が許容誤差範囲に収まるまで、計算を行う。以下同様にして、 $P_3, \dots, P_n$ を求めるのである。

以下に示す数値解法の例は、球の衝撃の場合の

第1表 第一次衝撃における衝撃力と変位

$n(\tau')$	$\dot{w}_c$ cm/s	w_c cm	w_0 cm	P_m kg	P_m' kg
0	1	0	0	0	0
1	0.999 07	5.553×10^{-7}	1.616×10^{-9}	0.114	0.057
2	0.996 19	1.109×10^{-6}	8.005	0.239	0.176
3	0.991 28	1.661	2.220×10^{-8}	0.363	0.301
4	0.984 35	2.210	4.699	0.484	0.423
5	0.975 43	2.754	8.363	0.609	0.546
6	0.964 51	3.293	1.367×10^{-7}	0.727	0.668
7	0.951 73	3.826	2.047	0.840	0.783
8	0.936 97	4.350	2.437	0.960	0.903
9	0.920 47	4.866	3.934	1.055	1.011
10	0.902 45	5.372	5.152	1.150	1.103
11	0.882 84	5.869	6.535	1.248	1.199
12	0.861 84	6.353	8.134	1.322	1.285
13	0.839 57	6.826	9.894	1.403	1.363
14	0.816 06	7.286	1.183×10^{-6}	1.473	1.438
15	0.791 55	7.733	1.395	1.530	1.500
16	0.766 13	8.165	1.624	1.582	1.556
17	0.739 92	8.584	1.870	1.626	1.604
18	0.713 06	8.987	2.134	1.660	1.643
19	0.685 70	9.376	2.421	1.689	1.675
20	0.657 93	9.749	2.712	1.710	1.700
21	0.629 89	10.107	3.025	1.722	1.716
22	0.601 72	10.449	3.351	1.726	1.724
23	0.573 55	10.775	3.691	1.722	1.724
24	0.545 50	11.086	4.043	1.711	1.716
25	0.517 68	11.381	4.406	1.695	1.703
26	0.490 18	11.661	4.779	1.670	1.682
27	0.463 60	11.926	5.161	1.643	1.656
28	0.436 86	12.176	5.552	1.605	1.624
29	0.410 99	12.412	5.948	1.562	1.583
30	0.385 85	12.633	6.352	1.515	1.538
31	0.361 48	12.841	6.082	1.464	1.489
32	0.338 01	13.035	7.170	1.408	1.463
33	0.315 53	13.217	7.586	1.345	1.377
34	0.294 10	13.386	8.004	1.285	1.315
35	0.273 61	13.544	8.423	1.216	1.251
36	0.254 30	13.690	8.842	1.148	1.182
37	0.236 12	13.826	9.248	1.080	1.114
38	0.218 99	13.953	9.672	1.008	1.044
39	0.203 11	14.070	10.080	0.935	0.972
40	0.188 26	14.179	10.487	0.861	0.898
41	0.174 81	14.280	10.878	0.785	0.823
42	0.161 98	14.373	11.291	0.708	0.747
43	0.150 42	14.460	11.678	0.636	0.672
44	0.140 02	14.541	12.023	0.572	0.604
45	0.130 68	14.617	12.387	0.496	0.539
46	0.123 03	14.687	12.755	0.431	0.468
47	0.115 99	14.754	13.109	0.364	0.398
48	0.110 40	14.817	13.472	0.294	0.329
49	0.105 23	14.877	13.825	0.228	0.261
50	0.101 51	14.934	14.156	0.165	0.196

第2表 第二次衝撃における衝撃力と変位

$n(\tau)$	$\dot{w}_c$ cm/s	w_c cm	w_0 cm	P_n kg	P_n' kg
142	0.105 10	52.154×10^{-6}	54.241×10^{-6}	0	
143	0.099 44	52.238	51.455	0.166	0.083
144	0.061 09	52.461	49.400	0.718	0.469
145	0.017 38	52.521	47.667	1.149	0.961
146	0.124 94	52.324	46.156	1.487	1.318
147	0.246 55	51.808	45.631	1.489	1.488
148	0.359 26	50.966	45.646	1.270	1.380
149	0.449 00	49.844	45.910	0.920	1.095
150	0.515 95	48.504	46.404	0.470	0.695
151	0.540 33	47.037	46.904	0.025	

Timoshenko の解と比較するために、同一の諸元

$$E=2.2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \rho=7.96 \text{ g/cm}^3, a=1 \text{ cm},$$

$$F=1 \text{ cm}^2, R=1 \text{ cm}, v=1 \text{ cm/s},$$

$$T=2b^*l^2/\pi=1 \times 10^{-3} \text{ s}, l=15.35 \text{ cm},$$

$$M_g=122.2 \text{ g}, m_g^*=33.34 \text{ g}, m^*/M=0.273$$

を用いている。

第一次衝撃の計算には、 $t_1=\tau'=T/1800=5.5556 \times$

第3表 最大たわみの近傍のたわみの
変化する状態

$n(\tau)$	w_0 cm
92	85.849×10^{-6}
93	86.883
94	87.337
95	87.157
96	86.432
97	85.251
98	83.767

第2図 第一次衝撃における衝撃荷重
および変位の時間的变化 第3図 第二次衝撃における衝撃荷重
および変位の時間的变化

10^{-7} s を用いて積分を行った。ここに、 T ははりの基礎振動の周期である。

また、 P_n , w_c , w_0 等の計算結果を第1表に示してある。第一次衝撃後のはりのたわみ、第二次衝撃の計算には、 $t_1=\tau=T/360=2.778 \times 10^{-6} \text{ s}$ を用いた。これら計算の結果を第2表および第3表に示してある。また、 τ を時間の尺度として、第2図、第3図にその様

相を示した。

これらの計算によれば、第一次の衝撃は 10.5τ で終り、第二次衝撃は 142.7τ から始まり、 151.1τ で終了する。 P の最大値は第一次のとき 1.72 kg 、第二次のとき 1.55 kg となる。 w_0 の最大は 94.3τ でおこり、

$$(w_0)_{\max} = 8.734 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

である。

これらの結果を球の衝撃の場合と比較すれば、この場合には第二次の衝撃がおこっていない。さらに $P_{\max}$ は円筒の場合の方が約 3 倍ほど大きく、接触時間は $10.5/56.4$ の割合で短かく、はりの最大たわみは $8.734/11.24$ の割合で円筒の衝撃の場合の方が小さいことが知られる。その主たる原因は $P \sim \alpha$ の関係の相異に基くものである。

6. Collocation 法⁽⁴⁾

前述の数値解法によって、常に問題を取扱うことは、その計算が繁雑であるため不便であるので、簡単に衝撃時間 (duration of impact) や最大衝撃力を知る近似解法について考えよう。その方法として、第一に考えられるのは Galerkin 法であるが、実行してみるとその積分が繁雑であり、前述の数値解法に劣らぬ手数を要する。これに対し、以下に述べる Collocation 法は、Eringen が衝撃問題の解法に用いたものであるが、計算の簡単な割に、十分な精度で解を求めることができる利点がある。

基礎方程式 (12) を無次元化して、

$$L(\eta) \equiv p(\eta) [k_1 - \log_e p(\eta)] - k_2 \eta + \int_0^\eta K(\eta - \zeta) p(\zeta) \cdot d\zeta \quad \dots\dots\dots (18)$$

とおく。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, & \eta &= \frac{t}{T}, & k_1 &= 2 \times 1.8864 - \log_e \frac{16R}{a}, \\ k_2 &= \frac{v_0 T}{a}, & k_3 &= \frac{\pi a \Theta T^2}{m^*}, & k_M &= \frac{m^*}{M}, \\ K(\eta) &= k_3 \left[\eta + k_M \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* \frac{1}{\omega_m} \sin \omega_m \eta \right], \\ c_m^* &= \frac{\bar{g}_m^2(\xi_0)}{\bar{b}_m}, & p(\eta) &= \frac{P}{\pi a R \Theta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

式中、 M ははりの質量である。

Collocation 法を用いるために、衝撃荷重の作用時間を η_d 、荷重の無次元振幅を A とし、 $p(\eta)$ をつぎのように仮定する。

$$p(\eta) = AX(\eta) \quad \dots\dots\dots (20)$$

さらに、 $X(\eta)$ はつぎの条件を満足するものと仮定

する。

$$\left. \begin{aligned} X(0) &= X(\eta_d) = 0 \\ X(\eta_d/2) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

その上、 $\eta = \eta_d/2$ において、

$$\left. \begin{aligned} L(\eta) &= 0 \\ \frac{\partial p(\eta)}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

の条件が成り立つものとの条件をつけ加える。いま、

$$S(\eta) = \int_0^\eta K(\eta - \zeta) X(\zeta) \cdot d\zeta \quad \dots\dots\dots (23)$$

とおき、(21) および (22) 式を用いれば、

$$A = k_2 S_{,\eta}^{-1} \left(\frac{\eta_d}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta_d}{2} &= S_{,\eta}^{-1} \left(\frac{\eta_d}{2} \right) \left[k_1 - \log_e \left\{ k_2 S_{,\eta}^{-1} \left(\frac{\eta_d}{2} \right) \right\} \right] \\ &\quad + S \left(\frac{\eta_d}{2} \right) \\ S_{,\eta} &= \frac{d}{d\eta} \cdot S(\eta), \quad S_{,\eta}^{-1} = 1/S_{,\eta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

から、 A および η_d が求まる。

(21) 式を満足する $X(\eta)$ の形を、最も簡単な、

$$X(\eta) = \sin \frac{\pi}{\eta_d} \cdot \eta \quad \dots\dots\dots (26)$$

と仮定して計算を進める。(26) 式を (23) 式に代入して積分を行うと、

$$\left. \begin{aligned} S \left(\frac{\eta_d}{2} \right) &= k_3 \left[\left(\frac{\eta_d}{2} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + k_M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^*}{\left(\frac{\pi}{\eta_d} \right)^2 (1 - \lambda_m^2)} \left\{ \frac{1}{\lambda_m} \sin \frac{\pi}{2} \lambda_m - 1 \right\} \right] \\ \lambda_m &= \frac{\omega_m \eta_d}{\pi} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

単純支持はりに対しては、(27) 式は簡単になり

$$\left. \begin{aligned} S(\bar{\eta}) &= k_3 \left(\frac{\eta_d}{\pi} \right)^2 [d_1 + 2k_M \cdot V_1] \\ S_{,\eta}(\bar{\eta}) &= k_3 \left(\frac{\eta_d}{\pi} \right) [d_2 + 2k_M \cdot V_2] \\ d_1 &= \frac{\pi}{2} - 1, \quad d_2 = 1, \quad \bar{\eta} = \eta_d/2, \quad \lambda_1 = 4\bar{\eta} \\ V_1 &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{1 - m^4 \lambda_1^2} \left[\frac{1}{m^2 \lambda_1} \sin \frac{\pi}{2} m^2 \lambda_1 - 1 \right], \\ V_2 &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{1 - m^4 \lambda_1^2} \cos \frac{\pi}{2} m^2 \lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

V_1 , V_2 の値は Eringen⁽⁵⁾ の数値を用いることができる。(28) 式を用いて、(25) 式を解き、 $\eta_d/2$ を求

め、つぎに (24) 式から A を求めることができる。

前と同様に、Timoshenko の数値例の諸元を用いると、

$$k_1 = 1.000\ 21, \quad k_2 = 0.001$$

$$k_3 = 1.115\ 7 \times 10^5, \quad k_M = 0.272\ 83$$

となる。この場合の結果はつぎのごとくである。

$$\eta_d/2 = 0.012\ 3,$$

$$A = 4.70 \times 10^{-7}$$

すなわち、

$$P_{\max} = 1.785\ \text{kg}$$

$$t_d = 2.46 \times 10^{-5}\ \text{s} = 8.86\ \tau$$

これらの結果を、5. の数値解と比較すれば、 $P_{\max}$ の値はほとんどよく一致しているが t_d の誤差は大きい。しかしながら、 $t_d/2$ すなわち最大荷重を生ずる時間はほとんどよく一致していて、後半の差異が大きいことを示している。

第2図から明らかのように、 $P_{\max}$ 後の P の変化は、前半に比して長く尾を引く傾向から考えれば、正弦曲線と仮定した本例の t_d は厳密解よりも短くなることは当然である。

以上の結果から、Collocation 法は $P_{\max}$ および $t_d/2$ の十分な近似値を与えることが知られた。

7. 諸定数の衝撃経過におよぼす影響

両端単純支持の場合について、諸定数の変化する場合、衝撃力 P (すなわち A)、衝撃作用時間 $t_d(\eta_d)$ の変化する状態を、Collocation 法を用いてしらべてみよう。

支持条件の与えられた場合、衝撃現象は4定数 k_1 , k_2 , k_3 および k_M によって決定される。

(19) 式より明らかのように、 k_1 は衝撃物体の形状(接触部分の曲率 R)を表わす定数であり、 k_2 は衝撃速度を、 k_3 は材料から定まる一つの等価質量と衝撃質量の比、 k_M は衝撃物体の質量とはりの質量の比を表わしている。

以下、 k_1 , k_2 等の変化につれて、 A , η_d がいかに変化するかを簡単に調べてみよう。

(1) k_M の影響 $k_1 = 1.000\ 2$, $k_2 = 0.001$, $k_3 = 0.507\ 32 \times 10^5$ として k_M の変化に伴う A および $\eta_d/2$ の変化の状態を、第4図に示す。 k_M が大きくなると A は大となり、常識と一致する。また η_d も k_M とともに大となるが、これは α が大となるためと考えることができる。

(2) k_1 の影響 $k_M = 0.6$, $k_2 = 0.001$, $k_3 = 0.507\ 32 \times 10^5$, $T = 1 \times 10^{-3}\ \text{s}$ に固定して、 k_1 の変化に対する状態は第5図のようである。

第4図 k_M の A および η_d におよぼす影響

第5図 $R/a(k_1)$ の影響

第6図 k_2 と A との関係

$$k_M = 0.6, k_1 = 1.0002, k_3 = 5.073 \times 10^4$$

第 7 図 k_2 と η_d との関係

$$k_M = 0.6, k_1 = 1.0002, k_2 = 0.001$$

第 8 図 k_3 と A , η_d との関係

(3) k_2 の影響 これは 衝撃速度の影響を示すものである。

$k_1 = 1.0002$, $k_3 = 0.50732 \times 10^5$, $k_M = 0.6$ に対するものである。その結果は、第 6, 7 図に示すように、 k_2 の大 (衝撃速度が大) となるにつれて、 A は大となり、 η_d は減小することを示している。

(4) k_3 の影響 これは主として、 θ すなわち E および ν の影響を示すものである。言い換えれば材料のこわさの影響をあらわす。ここでは

$$k_1 = 1.0002, k_2 = 0.001, k_M = 0.6$$

と定めてある。この場合の結果は第 8 図に示してある。 k_3 が大となるとともに、 η_d は小さくなるが、このことは常識と一致する。 A について調べてみると、これもまた k_3 とともに減少している。しかしながら P の値はこの場合には直ちに A に比例するわけではなく、 P の大小は必ずしも A とは同一とはならぬ。

このことを次の例について考えてみよう。

いま m^* を一定として考えれば、 k_3 の大なることは、 $\pi a \theta T^2$ の大なることである。すなわち、定数 c を導入して次のように表わすことができる。

$$k_3 = c \pi a \theta T^2$$

いま、 $T = 1 \times 10^{-3} \text{ s}$ と仮定すれば、(19) 式より、

$$P_{\max} = \frac{10^6}{c} R k_3 A$$

$k_3 = 5 \times 10^5$ のときは

$$P_{\max} = \frac{4.5R}{c} \times 10^4$$

また $k_3 = 5 \times 10^3$ のときは

$$P_{\max} = \frac{1.5R}{c} \times 10^4$$

であって、この場合には

$$[A]_{k_3=5 \times 10^3} > [A]_{k_3=5 \times 10^5}$$

にもかかわらず、

$$[P_{\max}]_{k_3=5 \times 10^3} < [P_{\max}]_{k_3=5 \times 10^5}$$

となる。換言すれば、 E の大なる材料の方が、 E の小なるものよりも、同一の衝撃に対して $P_{\max}$ が大となることを示している。

8. 第二次衝撃発生条件

衝撃の場合には、その衝撃速度とはりの弾性的性質との関係によって、第一次衝撃のみで終る場合と、第二次衝撃を生ずる場合とがある。 $P(t)$ の形態も、常に単調なものではなく、あるときは二つの山に、またある場合にはらくだのこぶのようにその様相を異にする。これらのことは厳密に基礎方程式を積分する以外に方法はないが、ここではただこの第二次衝撃が発生するか否かの判定のめやすを求めてみよう。

第二次衝撃発生条件は $\eta = \eta_d$ において

$$\frac{dw_c}{d\eta} > 0 \quad (29)$$

でなければならぬ。(26) 式を用いて (29) 式を書きかえると、第二次衝撃発生条件は

$$\frac{2A\eta_d}{\pi} < \frac{k_2}{k_3} \quad (30)$$

となる。しかしながら、この (30) 式は Collocation 法によって得られる程度の近似に論拠をおいて求めたものであることを附言しておく。

9. 結 語

本報告においては、円筒接触面を有する物体の衝撃に関する問題を、Timoshenko 法および Collocation 法を用いて解いた。その結果によれば、

(1) Collocation 法による解法は, 本問題のような円筒接触面を有する場合にも, 十分な近似値を与え, 特に最大衝撃力は Timoshenko 法による解と非常によく合う。

(2) 最大衝撃力のおこる時刻もまたよく合うが, 衝撃時間 (duration of impact) には数%の誤差がある。

(3) 第二次衝撃発生条件は, 近似的に

$$\frac{2A\gamma_d}{\pi} < \frac{k_2}{k_3}$$

539.384.6:624.074.4:621.642.3

両端にて支持された横置貯そうの強さ*

と考えていい。

終りに, 本研究に対し御指導を賜った成瀬, 棚沢両教授に対し, 深じんの謝意を表する。

文 献

- (1) 戸部, 東京秋期講演大会前刷 講演番号 409, (昭 30-10).
- (2) Timoshenko, *Zt. f. Math. u. Phys.*, **62** (1914), 198.
- (3) Lundberg, *Farsch.*, **10**, 5 (1939), 201.
- (4) Sokolnikoff, *Mech. Theory of Elasticity* (1946), 317 & 323.
- Eringen, *J. Appl. Mech.*, **20**, 4 (1953), 461.
- (5) Eringen, (4) 参照.

溝 口 孝 喜**, 井 上 慶 之 助***

Strength of a Horizontal Reservoir Supported at Both Ends

by Koki Mizoguchi and Keinosuke INOUE

The strength of a horizontal reservoir supported at both ends and filled with a liquid of density γ is discussed, utilizing the fundamental differential equation introduced by K. Mizoguchi.

The same problem was discussed by I. A. Wojtaszak who used Timoshenko's method. i.e. solved three simultaneous partial differential equations assuming Fourier's series solutions.

His results, therefore, are expressed in infinite series, which are very slowly convergent for thin shells, moreover the end conditions due to his method do not satisfy the actual conditions because of assuming Fourier's series solutions.

All the results, in the present paper, can be obtained as closed forms, which practically satisfy the actual end conditions.

Fairly different conclusions from those of Wojtaszak's solutions are obtained, for instance the axial stress resultant and couple do not vanish at both ends and the maximum stresses do not always occur at the middle position.

1. 緒 言

両端にて支持され, 流体を満たされた横置貯そうの応力および変形状態は既に I. A. Wojtaszak がフーリエ級数解を仮定して三つの偏微分方程式を解く Timoshenko の方法にて解いているが, それはうすいかくに対しては収束がきわめて悪く, かつ級数解を仮定するために端における条件が実際の条件とは合わないという欠点がある。本研究では筆者の1人によってすでに導かれた基礎微分方程式を用いて解いているため解は閉形で表われ, またある種の実際の支持条件を満足するように解かれている。なお解が閉形のため各量の性質の検討が容易で, したがって Wojtaszak の結論とはかなり異なった結果を得ている。

2. 解 法

貯そうは第1図に示したようなものとし, 問題を簡単にするために次の諸仮定をおく。

1. 貯そうは流体で完全に満たされている。
2. 両端の板は剛体で, かくはこの板に完全に固定され, 板は両端で支持されている。
3. 貯そうに固定された両端の板と支持台との間には摩擦がない。

薄肉円筒の基礎微分方程式は筆者の1人により既に次のとおり導かれている⁽¹⁾。

第 1 図

* 昭和33年9月8日 第8回応用力学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和34年5月1日。

** 正員, 大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥東之町)。

*** 正員, 大阪府立大学大学院。