(1) Collocation 法による解法は, 本問題のような円筒接触面を有する場合にも, 十分な近似値を与え, 特に最大衝撃力は Timoshenko 法による解と非常によく合う。

(2) 最大衝撃力のおこる時刻もまたよく合うが, 衝撃時間 (duration of impact) には数%の誤差がある。

(3) 第二次衝撃発生条件は, 近似的に

$$\frac{2A\gamma_d}{\pi} < \frac{k_2}{k_3}$$

539.384.6:624.074.4:621.642.3

両端にて支持された横置貯そうの強さ*

と考えていい。

終りに, 本研究に対し御指導を賜った成瀬, 棚沢両教授に対し, 深じんの謝意を表する。

文 献

- (1) 戸部, 東京秋期講演大会前刷 講演番号 409, (昭 30-10).
- (2) Timoshenko, *Zt. f. Math. u. Phys.*, **62** (1914), 198.
- (3) Lundberg, *Farsch.*, **10**, 5 (1939), 201.
- (4) Sokolnikoff, *Mech. Theory of Elasticity* (1946), 317 & 323.
- Eringen, *J. Appl. Mech.*, **20**, 4 (1953), 461.
- (5) Eringen, (4) 参照.

溝 口 孝 喜**, 井 上 慶 之 助***

Strength of a Horizontal Reservoir Supported at Both Ends

by Koki Mizoguchi and Keinosuke INOUE

The strength of a horizontal reservoir supported at both ends and filled with a liquid of density γ is discussed, utilizing the fundamental differential equation introduced by K. Mizoguchi.

The same problem was discussed by I. A. Wojtaszak who used Timoshenko's method. i.e. solved three simultaneous partial differential equations assuming Fourier's series solutions.

His results, therefore, are expressed in infinite series, which are very slowly convergent for thin shells, moreover the end conditions due to his method do not satisfy the actual conditions because of assuming Fourier's series solutions.

All the results, in the present paper, can be obtained as closed forms, which practically satisfy the actual end conditions.

Fairly different conclusions from those of Wojtaszak's solutions are obtained, for instance the axial stress resultant and couple do not vanish at both ends and the maximum stresses do not always occur at the middle position.

1. 緒 言

両端にて支持され, 流体を満たされた横置貯そうの応力および変形状態は既に I. A. Wojtaszak がフーリエ級数解を仮定して三つの偏微分方程式を解く Timoshenko の方法にて解いているが, それはうすいかくに対しては収束がきわめて悪く, かつ級数解を仮定するために端における条件が実際の条件とは合わないという欠点がある。本研究では筆者の1人によってすでに導かれた基礎微分方程式を用いて解いているため解は閉形で表われ, またある種の実際の支持条件を満足するように解かれている。なお解が閉形のため各量の性質の検討が容易で, したがって Wojtaszak の結論とはかなり異なった結果を得ている。

2. 解 法

貯そうは第1図に示したようなものとし, 問題を簡単にするために次の諸仮定をおく。

1. 貯そうは流体で完全に満たされている。
2. 両端の板は剛体で, かくはこの板に完全に固定され, 板は両端で支持されている。
3. 貯そうに固定された両端の板と支持台との間には摩擦がない。

薄肉円筒の基礎微分方程式は筆者の1人により既に次のとおり導かれている⁽¹⁾。

第 1 図

* 昭和33年9月8日 第8回応用力学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和34年5月1日。

** 正員, 大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥東之町)。

*** 正員, 大阪府立大学大学院。

$$\begin{aligned}
& A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{4B}{a^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{6C}{a^4} \frac{\partial^3 w}{\partial x^4 \partial \theta^4} + \frac{8-2\nu^2}{a^4} \frac{\partial^3 w}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{6L}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
& + \frac{4}{a^6} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right] + \frac{1}{a^8} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^8} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right] \\
& = \frac{1}{D} \left[A \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + \frac{2}{a^2} U \frac{\partial^4 p}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{B}{a^4} \frac{\partial^4 p}{\partial \theta^4} \right] + \frac{1}{D} \left[\frac{\nu A}{a} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{(1+\nu)(2-\nu)}{12(1-\nu)a} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right. \\
& \quad \times \frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial \theta^2} - \frac{V}{a^3} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)a^3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial \theta^4} \left. \right] \\
& - \frac{1}{D} \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial \theta} - \frac{(2+\nu)}{a^2} \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 q}{\partial x^2 \partial \theta^3} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{12a^4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 q}{\partial \theta^5} - \frac{1}{a^4} \frac{\partial^3 q}{\partial \theta^3} \right] \dots\dots\dots (1)
\end{aligned}$$

ここに w は半径方向の変位, h は かく の厚さ, ν はポアソン比である. また

$$\left. \begin{aligned}
A &\equiv 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2, \quad B \equiv 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2, \quad C \equiv 1 + \frac{1-\nu^2}{72} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \\
L &\equiv 2(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 A, \quad U \equiv 1 + \frac{1+(1-\nu)^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \\
V &\equiv 1 - \frac{\nu}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

今の場合 $p = \gamma a(1 - \cos \theta)$, $f = q = 0$ である. ここに γ は液体の密度 (単位体積の重さ) とする. 満たすべき周囲条件は第1図を参照し次のとおりになる.

$x = \pm l$ において

$$\left. \begin{aligned}
1) \quad & \int_0^\pi T_x a d\theta = \int_0^{2a} p b dz = \int_0^\pi \gamma a(1 - \cos \theta) \cdot a \sin \theta \cdot a \sin \theta d\theta \\
& = \gamma a^3 \int_0^\pi \sin^2 \theta (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{1}{2} \pi \gamma a^3 \\
2) \quad & \int_0^\pi (T_x a - M_x) \cos \theta d\theta = \gamma a^3 \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta (1 - \cos \theta) d\theta = -\frac{\pi \gamma a^3}{8} \\
3) \quad & w = 0, \quad v = 0 \\
4) \quad & u = \pm a \zeta \cos \theta \mp \xi, \quad \frac{dw}{dx} = \mp \zeta \cos \theta
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに ζ, ξ は定数で ζ は端における回転角, ξ は端における中央の伸びである. (3) の 4) 式における $\pm$ 符号は上方が $x = -l$ に対応し, 下方が $x = +l$ に対応することを意味する. この周囲条件で解が唯一的に定まることはエネルギーの式から証明できる⁽²⁾.

$p = \gamma a$, $p = -\gamma a \cos \theta$ に対する (1) 式の解を w_1, w_2 とすれば次式をうる⁽³⁾.

$$\left. \begin{aligned}
w_1 &= c + \kappa_1 \Re A \lambda_0^4 \cos \lambda_0 x + \kappa_2 \Im (\zeta) \\
w_2 &= -k x^4 \cos \theta + A_1 x^2 \cos \theta + B_1 \cos \theta \\
& + \kappa_3 \Re \left[A \lambda_1^4 + \frac{2}{a^2} U \lambda_1^2 + \frac{B}{a^4} \right] \cos \lambda_1 x \cos \theta + \kappa_4 \Im (\zeta)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに $k = \frac{\gamma a(h/a)^2}{288(1-\nu^2)BD}$

λ_0, λ_1 は次式で定められる複素数である.

$$\left. \begin{aligned}
\lambda_0^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 h^2} &= 0 \quad \text{または} \quad \lambda_0 = \alpha_0(1+i) \quad \text{とすれば} \\
\alpha_0^2 &= \sqrt{3(1-\nu^2)} / ah, \quad A \lambda_1^4 + \frac{4B}{a^2} \lambda_1^2 + \frac{12(1-\nu^2)B^2}{a^2 h^2} = 0 \\
\text{または} \quad \lambda_1 &= \alpha + i\beta \quad \text{とすれば} \\
\alpha^2 &= \frac{B}{Aa^2} \left[\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)} A - 1 \right] \\
\beta^2 &= \frac{B}{Aa^2} \left[\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)} A + 1 \right]
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$\Re$ は次に続く複素関数の実数部を意味し, $\Im(\zeta)$ は同一関数の虚数部を意味する. また $c, A_1, B_1, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ は周囲条件から定まる任意定数である. (4) 式の w_1, w_2 に対応する u_1, v_1 および u_2, v_2 は u, w および v, w の関係式から次のように求めることができる⁽⁴⁾.

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\nu} \left[\frac{\gamma a^2 h^2}{12D} - \frac{c}{a} \right] x - \kappa \Re \frac{\nu A}{a} \lambda_0^3 \sin \lambda_0 x - \kappa_2 \Im(\zeta) \\ v_1 &= 0 \\ u_2 &= 4ak [x^3 + 6(2+\nu)a^2x] \cos \theta - 2aA_1x \cos \theta \\ &\quad - \kappa_3 \Re \frac{\lambda_1}{a} \left[\left\{ \nu - \frac{2-3\nu+3\nu^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \lambda_1^2 - \frac{B}{a^2} \right] \sin \lambda_1 x \cos \theta - \kappa_4 \Im(\zeta) \\ v_2 &= k \left[x^4 - 12\nu a^2 x^2 - \frac{G}{B} a^4 \right] \sin \theta - A_1(x^2 - 2\nu a^2) \sin \theta - B_1 \sin \theta \\ &\quad - \kappa_3 \Re \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda_1^4 + \frac{1}{a^2} \left\{ (2+\nu) + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \lambda_1^2 + \frac{B}{a^4} \right] \cos \lambda_1 x \sin \theta \\ &\quad - \kappa_4 \Im(\zeta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{ここに} \quad G \equiv 4 \{ 6(1+2\nu) + \nu(1-\nu)(h/a)^2 \}$$

(4), (6) の各式を応力と変位の各関係式⁽⁵⁾に代入すれば各内力およびモーメントが次のとおり求められる.

$$\left. \begin{aligned} T_{x1} &= \frac{1}{\nu} \left\{ \gamma a^2 - \frac{12(1-\nu^2)cD}{ah^2} \right\} \\ T_{\theta 1} &= \frac{12D}{h^2} \left[\frac{\gamma a^2 h^2}{12D} + \kappa_1 \frac{A}{a} (1-\nu^2) \Re \lambda_0^4 \cos \lambda_0 x + \kappa_2 \frac{A}{a} (1-\nu^2) \Im(\zeta) \right] \\ S_1 &= 0, \quad M_{x1} = -D [\kappa_1 A \Re \lambda_0^6 \cos \lambda_0 x + \kappa_2 A \Im(\zeta)] \\ M_{\theta 1} &= -\nu D [\kappa_1 A \Re \lambda_0^6 \cos \lambda_0 x + \kappa_2 A \Im(\zeta)], \quad \mathfrak{M}_1 = 0 \\ T_{x2} &= \frac{12D}{h^2} \left\{ 12ka \left[(1-\nu^2)x^2 + \left\{ 2(2+\nu) - \frac{\nu G}{12B} \right\} a^2 \right] - 2aA_1(1-\nu^2) \right. \\ &\quad \left. + \kappa_3 \Re \frac{1}{a} \left[\frac{(2-\nu)}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda_1^4 + \frac{B}{a^2} (1-\nu^2) \lambda_1^2 \right] \cos \lambda_1 x + \kappa_4 \Im(\zeta) \right\} \cos \theta \\ T_{\theta 2} &= \frac{12D}{h^2} \left\{ 12ka^3 \left[2\nu(2+\nu) - \frac{G}{12B} \right] + \kappa_3 \Re \frac{1}{a} \left[1-\nu^2 - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. \times \lambda_1^4 \cos \lambda_1 x + \kappa_4 \Im(\zeta) \right\} \cos \theta \\ S_2 &= \frac{6(1-\nu)D}{h^2} \left\{ -48(1+\nu)ka^2x + \kappa_3 \Re \lambda_1 \left\{ \frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda_1^4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2(1+\nu)B}{a^2} \lambda_1^2 \right\} \sin \lambda_1 x + \kappa_4 \Im(\zeta) \right\} \sin \theta \\ M_{x2} &= D \left\{ -12(1-\nu^2)ka^2x + \left\{ 2(1-\nu^2)A_1 + \frac{\nu G}{B} ka^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \kappa_3 R \lambda_1^2 \left\{ A \lambda_1^4 + \frac{1}{a^2} (2U + \nu V) \lambda_1^2 + \frac{(1-\nu^2)B}{a^4} \right\} \cos \lambda_1 x - \kappa_4 \Im(\zeta) \right\} \cos \theta \\ M_{\theta 2} &= D \left\{ \frac{G}{B} ka^2 - \kappa_3 \Re \lambda_1^2 \left\{ \nu A \lambda_1^4 + \frac{1}{a^2} (2\nu U + V) \lambda_1^2 \right\} \cos \lambda_1 x - \kappa_4 \Im(\zeta) \right\} \cos \theta \\ \mathfrak{M}_2 &= \frac{(1-\nu)D}{a} \left\{ 24\nu ka^2x + \kappa_3 \Re \lambda_1 \left\{ V \lambda_1^4 - \frac{\nu B}{a^2} \lambda_1^2 \right\} \sin \lambda_1 x + \kappa_4 \Im(\zeta) \right\} \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= \frac{6(1-\nu)D}{h^2} \left\{ -48(1+\nu)ka^2x + \kappa_3 \Re \lambda_1 \left\{ \frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda_1^4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2(1+\nu)B}{a^2} \lambda_1^2 \right\} \sin \lambda_1 x + \kappa_4 \Im(\zeta) \right\} \sin \theta \\ M_{x2} &= D \left\{ -12(1-\nu^2)ka^2x + \left\{ 2(1-\nu^2)A_1 + \frac{\nu G}{B} ka^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \kappa_3 R \lambda_1^2 \left\{ A \lambda_1^4 + \frac{1}{a^2} (2U + \nu V) \lambda_1^2 + \frac{(1-\nu^2)B}{a^4} \right\} \cos \lambda_1 x - \kappa_4 \Im(\zeta) \right\} \cos \theta \\ M_{\theta 2} &= D \left\{ \frac{G}{B} ka^2 - \kappa_3 \Re \lambda_1^2 \left\{ \nu A \lambda_1^4 + \frac{1}{a^2} (2\nu U + V) \lambda_1^2 \right\} \cos \lambda_1 x - \kappa_4 \Im(\zeta) \right\} \cos \theta \\ \mathfrak{M}_2 &= \frac{(1-\nu)D}{a} \left\{ 24\nu ka^2x + \kappa_3 \Re \lambda_1 \left\{ V \lambda_1^4 - \frac{\nu B}{a^2} \lambda_1^2 \right\} \sin \lambda_1 x + \kappa_4 \Im(\zeta) \right\} \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

(4), (6) 式を (3) 式に代入し, 任意定数を求めるにまず

$$T_{x1} = \frac{1}{\nu} \left[\gamma a^2 - \frac{12(1-\nu^2)cD}{ah^2} \right] \dots\dots\dots (9)$$

また $\int_0^\pi (T_x) d\theta = \int_0^\pi (T_{x1}) d\theta$ であるから (4) の第1式と (3) の 1), 3) 式より

$$\left. \begin{aligned} c + \kappa_1 \Re A \lambda_0^4 \cos \lambda_0 l + \kappa_2 \Im (\zeta) &= 0 \\ \kappa_1 \Re \lambda_0^5 \sin \lambda_0 l + \kappa_2 \Im (\zeta) &= 0 \\ \frac{2\pi}{\nu} \left[\gamma a^2 - \frac{12(1-\nu^2) c D}{a h^2} \right] &= \pi a^2 \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

次に (4) 式の第 2 式および (6) 式の第 3 式を (3) 式の 3), 4) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} -k l^4 + A_1 l^2 + B_1 + \kappa_3 \Re \left[A \lambda_1^4 + \frac{2}{a^2} U \lambda_1^2 + \frac{B}{a^4} \right] \cos \lambda_1 l + \kappa_4 \Im (\zeta) &= 0 \\ k \left[l^4 - 12\nu a^2 l^2 - \frac{G}{B} a^4 \right] - A_1 (l^2 - 2\nu a^2) - B_1 \\ - \kappa_3 \Re \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \lambda_1^4 + \frac{1}{a^2} \left\{ (2+\nu) + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \lambda_1^2 + \frac{B}{a^4} \right] \cos \lambda_1 l - \kappa_4 \Im (\zeta) &= 0 \\ 4k [l^3 + 6(2+\nu) a^2 l] - 2A_1 l - \kappa_3 \Re \frac{\lambda_1}{a^2} \left[\left\{ \nu - \frac{2-3\nu+3\nu^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \lambda_1^2 - \frac{B}{a^2} \right] \sin \lambda_1 l \\ - \kappa_4 \Im (\zeta) &= -\zeta \\ -4k l^3 + 2A_1 l - \kappa_3 \Re \lambda_1 \left[A \lambda_1^4 + \frac{2}{a^2} U \lambda_1^2 + \frac{B}{a^4} \right] \sin \lambda_1 l - \kappa_4 \Im (\zeta) &= \zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

(10) 式の第 3 式から

$$c = \frac{(2-\nu) a^3 h^2 \gamma}{24(1-\nu^2) D} \dots\dots\dots (12)$$

(12) 式を (10) 式の第 1, 第 2 式に代入すれば

$$\kappa_1 = \Delta k_1 / \Delta_0, \quad \kappa_2 = \Delta k_2 / \Delta_0 \dots\dots\dots (13)$$

と求まり

$$\Delta_0 = \Re A \lambda_0^4 \cos \lambda_0 l \cdot \Im \lambda_0^5 \sin \lambda_0 l - \Im A \lambda_0^4 \cos \lambda_0 l \cdot \Re \lambda_0^5 \sin \lambda_0 l = A (\lambda_0 \bar{\lambda}_0)^4 \Im \lambda_0 \sin \lambda_0 l \cdot \cos \bar{\lambda}_0 l \dots\dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta k_1 &= -c \Im \lambda_0^5 \sin \lambda_0 l \\ \Delta k_2 &= c \Re \lambda_0^5 \sin \lambda_0 l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに $\bar{\lambda}_0$ は λ_0 の共役複素数である。

次に (11) 式の第 3 式と第 4 式を加え、第 1 式と第 2 式を加えると

$$\left. \begin{aligned} 24(2+\nu) a^2 l k - \kappa_3 \Re \lambda_1^3 \left[A \lambda_1^2 + \frac{2+\nu}{a^2} B \right] \sin \lambda_1 l - \kappa_4 \Im (\zeta) &= 0 \\ -12\nu a^2 l^2 k - \frac{G}{B} a^4 k + 2\nu a^2 A_1 + \kappa_3 \Re \left[V \lambda_1^4 - \frac{\nu B}{a^2} \lambda_1^2 \right] \cos \lambda_1 l + \kappa_4 \Im (\zeta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

(7) 式の第 1 式, 第 4 式, (8) 式の第 1 式, 第 4 式および周囲条件式 (3) の第 2 式より A_1 が次のとおり求まる。

$$A_1 = 6k l^2 + \frac{a^2 k}{B} \left\{ 27 + \frac{1+\nu-8\nu^2}{4(1+\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\}$$

(16) 式の第 2 式にこの A_1 を代入すれば

$$\kappa_3 \Re \left[V \lambda_1^2 - \frac{\nu B}{a^2} \right] \lambda_1^2 \cos \lambda_1 l + \kappa_4 \Im (\zeta) = \frac{6a^4 k}{B} (4I - \nu B) \dots\dots\dots (17)$$

$$\text{ここに} \quad I \equiv 1 + \frac{\nu}{6(1+\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2$$

(17) 式と (16) 式の第 1 式より

$$\kappa_3 = \Delta k_3 / \Delta_1, \quad \kappa_4 = \Delta k_4 / \Delta_1 \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \Re \left[V\lambda_1^2 - \frac{\nu B}{a^2} \right] \lambda_1^2 \cos \lambda_1 l \cdot \Im \left[A\lambda_1^2 + \frac{2+\nu}{a^2} B \right] \lambda_1^3 \sin \lambda_1 l \\
&\quad - \Im \left[V\lambda_1^2 - \frac{\nu B}{a^2} \right] \lambda_1^2 \cos \lambda_1 l \cdot \Re \left[A\lambda_1^2 + \frac{2+\nu}{a^2} B \right] \lambda_1^3 \sin \lambda_1 l \\
&= \Im \left[\left[V\bar{\lambda}_1^2 - \frac{\nu B}{a^2} \right] \bar{\lambda}_1^2 \cos \bar{\lambda}_1 l \cdot \left[A\lambda_1^2 + \frac{2+\nu}{a^2} B \right] \lambda_1^3 \sin \lambda_1 l \right] \\
&= (\lambda_1 \bar{\lambda}_1)^2 \Im \left[V\bar{\lambda}_1^2 - \frac{\nu B}{a^2} \right] \left[A\lambda_1^2 + \frac{2+\nu}{a^2} B \right] \lambda_1 \sin \lambda_1 l \cdot \cos \bar{\lambda}_1 l \\
&= (\lambda_1 \bar{\lambda}_1)^2 \Im \left[AV(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)^2 - \frac{\nu AB}{a^2} \lambda_1^2 + \frac{2+\nu}{a^2} B V\bar{\lambda}_1^2 - \frac{(2+\nu)\nu}{a^4} B^2 \right] \lambda_1 \sin \lambda_1 l \cos \bar{\lambda}_1 l \quad \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
\Delta k_3 &= \frac{6a^4 k}{B} \left\{ (4I - \nu B) \Im \left[A\lambda_1^2 + \frac{2+\nu}{a^2} B \right] \lambda_1^3 \sin \lambda_1 l \right. \\
&\quad \left. - 4(2+\nu)B \frac{l}{a^2} \cdot \Im \left[V\lambda_1^2 - \frac{\nu B}{a^2} \right] \lambda_1^2 \cos \lambda_1 l \right\} \\
\Delta k_4 &= -\frac{6a^4 k}{B} \left\{ (4I - \nu B) \Re \left[A\lambda_1^2 + \frac{2+\nu}{a^2} B \right] \lambda_1^3 \sin \lambda_1 l \right. \\
&\quad \left. - 4(2+\nu)B \frac{l}{a^2} \cdot \Re \left[V\lambda_1^2 - \frac{\nu B}{a^2} \right] \lambda_1^2 \cos \lambda_1 l \right\} \quad \dots\dots\dots (20)
\end{aligned} \right\}$$

ここに $\bar{\lambda}_1$ は λ_1 の共役複素数である. B_1 は円筒が剛体として移動した量を示す項であるから定める必要はない. また ζ, ξ は応力の式にはいらないから応力を求めるに当っては定める必要はない. 以上ですべて任意定数が定められたから問題はとけたことになる.

3. た わ み

最下面のたわみは次式で与えられる.

$$\begin{matrix} w & - & w \\ x=x & x=l & \\ \theta=\pi & \theta=\pi & \end{matrix} = \begin{matrix} [w_1 & - & w_1] \\ x=x & x=l & \end{matrix} + \begin{matrix} [w_2 & - & w_2] \\ x=x & x=l & \\ \theta=\pi & \theta=\pi & \end{matrix}$$

(4) 式の第1式より

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} w_1 & - & w_1 \\ x=x & x=l & \end{matrix} &= \kappa_1 \Re A \lambda_0^4 (\cos \lambda_0 x - \cos \lambda_0 l) + \kappa_2 \Im (\zeta) \\
&= \frac{cA}{A_0} \Im \bar{\lambda}_0^5 \sin \bar{\lambda}_0 l \cdot \lambda_0^4 (\cos \lambda_0 x - \cos \lambda_0 l) \\
&= \frac{cA}{A_0} (\lambda_0 \bar{\lambda}_0)^4 \Im \bar{\lambda}_0 (\cos \lambda_0 x - \cos \lambda_0 l) \sin \bar{\lambda}_0 l \\
&= \frac{cA}{A_0} (\lambda_0 \bar{\lambda}_0)^4 \Im \bar{\lambda}_0 (\cos \lambda_0 x \sin \bar{\lambda}_0 l - \cos \lambda_0 l \sin \bar{\lambda}_0 x) \\
&= \frac{cA}{A_0} (\lambda_0 \bar{\lambda}_0)^4 \cdot \frac{\alpha_0}{2} [(\sin 2\alpha_0 l + \sinh 2\alpha_0 l) - \omega_1(x) - \omega_2(x)] \\
&= c \cdot \frac{[(\sin 2\alpha_0 l + \sinh 2\alpha_0 l) - \omega_1(x) - \omega_2(x)]}{\sinh 2\alpha_0 l + \sin 2\alpha_0 l} \quad \dots\dots\dots (21)
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\omega_1(x) &\equiv \sin \alpha_0(l+x) \cosh \alpha_0(l-x) + \sin \alpha_0(l-x) \cosh \alpha_0(l+x) \\
\omega_2(x) &\equiv \cos \alpha_0(l+x) \sinh \alpha_0(l-x) + \cos \alpha_0(l-x) \sinh \alpha_0(l+x)
\end{aligned}$$

次に (4) 式の第2式より

$$\begin{aligned}
\frac{w_2}{x=x} - \frac{w_2}{x=l} &= k(x^4 - l^4) - A_1(x^2 - l^2) - \kappa_3 \Re \left[A\lambda_1^4 + \frac{2}{a^2} U\lambda_1^2 + \frac{B}{a^4} \right] (\cos \lambda_1 x - \cos \lambda_1 l) - \kappa_4 \Im(\zeta) \\
&= k(x^4 - l^4) - A_1(x^2 - l^2) - \frac{6a^4 k}{B} \frac{1}{A_1} \left[(4I - \nu B) \right. \\
&\quad \times \Im \left[A\bar{\lambda}_1^4 + \frac{2}{a^2} U\bar{\lambda}_1^2 + \frac{B}{a^4} \right] (\cos \bar{\lambda}_1 x - \cos \bar{\lambda}_1 l) \left[A\lambda_1^2 + \frac{2+\nu}{a^2} B \right] \lambda_1^3 \sin \lambda_1 l \\
&\quad \left. - \frac{4(2+\nu)Bl}{a^2} \Im \left[A\bar{\lambda}_1^4 + \frac{2}{a^2} U\bar{\lambda}_1^2 + \frac{B}{a^4} \right] (\cos \bar{\lambda}_1 x - \cos \bar{\lambda}_1 l) \left[V\lambda_1^2 - \frac{\nu B}{a^2} \right] \lambda_1^2 \cos \lambda_1 l \right] \\
&= kl^4 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right\} \left[5 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{a}{l} \right)^2 \frac{1}{B} \left\{ 27 + \frac{1+\nu-8\nu^2}{4(1+\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \right] - kl^4 \frac{\left(\frac{a}{l} \right)^4}{(1-\nu^2)B^2} \\
&\quad \times \left[\frac{(4I-\nu B) [(p_w \beta l + q_w \alpha l) \{t_1(x) - \sin 2\alpha l\} + (p_w \alpha l - q_w \beta l) \{t_2(x) - \sinh 2\beta l\}]}{(\tau \alpha l - \varphi \beta l) \sinh 2\beta l + (\varphi \alpha l + \tau \beta l) \sin 2\alpha l} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(2+\nu)}{a^2} Bl^2 [q_w' \{t_3(x) - \cosh 2\beta l - \cos 2\alpha l\} - p_w' t_4(x)] \right] \dots (22)
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
p_w &\equiv 3A \left\{ 24(1-\nu^2)^2 - 10(1-\nu^2)\nu^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 + \nu^4 \left(\frac{h}{a} \right)^4 \right\} \\
q_w &\equiv -\sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{(a/h)^2 A - 1}{A} \left\{ 12\nu(1-\nu^2) + (12+4\nu-10\nu^2-5\nu^3) \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{4-2\nu^2-\nu^3}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^4 \right\} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \\
p_w' &\equiv 144(1-\nu^2)^2 - 12\nu(1-\nu^2)(2+7\nu) \left(\frac{h}{a} \right)^2 + 6\nu^3(1+2\nu) \left(\frac{h}{a} \right)^4 \\
q_w' &\equiv 2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{(a/h)^2 A - 1}{A} \left\{ 2(1-\nu^2)(1+6\nu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{-22+22\nu-3\nu^2-29\nu^3}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 + \frac{11\nu(2-\nu^2+\nu^3)}{36(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^4 \right\} \\
t_1(x) &\equiv \sin \alpha(l-x) \cosh \beta(l+x) + \sin \alpha(l+x) \cosh \beta(l-x) \\
t_2(x) &\equiv \cos \alpha(l+x) \sinh \beta(l-x) + \cos \alpha(l-x) \sinh \beta(l+x) \\
t_3(x) &\equiv \cos \alpha(l+x) \cosh \beta(l-x) + \cos \alpha(l-x) \cosh \beta(l+x) \\
t_4(x) &\equiv \sin \alpha(l-x) \sinh \beta(l+x) + \sin \alpha(l+x) \sinh \beta(l-x) \\
\tau &\equiv 12(1-\nu^2) - \nu(4+7\nu) \left(\frac{h}{a} \right)^2 + \frac{\nu^3}{1-\nu} \left(\frac{h}{a} \right)^4 \\
\varphi &\equiv -4(1+\nu) \left(\frac{h}{a} \right)^2 \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{(a/h)^2 A - 1}{A} \left[1 - \frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]
\end{aligned} \dots (23)$$

たわみの式 (21), (22) において $x=0$ とおけば最下面中央のたわみ δ が得られる。

$$\begin{aligned}
\delta &= 2 \cdot c \frac{(\sinh \alpha_0 l - \sin \alpha_0 l)(\cosh \alpha_0 l - \cos \alpha_0 l)}{\sinh 2\alpha_0 l + \sin 2\alpha_0 l} \\
&\quad + kl^4 \left[5 + \left(\frac{a}{l} \right)^2 \frac{1}{B} \left\{ 27 + \frac{1+\nu-8\nu^2}{4(1+\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \right] - kl^4 \frac{2 \left(\frac{a}{l} \right)^4}{(1-\nu^2)B^2} \\
&\quad \times \left[\frac{(4I-\nu B)(\cosh \beta l - \cos \alpha l) [(p_w \beta l + q_w \alpha l) \sin \alpha l - (p_w \alpha l - q_w \beta l) \sinh \beta l]}{(\tau \alpha l - \varphi \beta l) \sinh 2\beta l + (\varphi \alpha l + \tau \beta l) \sin 2\alpha l} \right. \\
&\quad \left. - (2+\nu) B \left(\frac{l}{a} \right)^2 [q_w' \{2 \cos \alpha l \cosh \beta l - \cosh 2\beta l - \cos 2\alpha l\} - 2p_w' \sin \alpha l \sinh \beta l] \right] \dots (24)
\end{aligned}$$

$5kl^4$ はこの円筒全体を長さ $2l$, 両端自由支持された単純はりとなし、中央のたわみであるからその比を求めてみるに、今 $a/h > 30$ とし $l/a > 1$ なる範囲についてのみ考えれば $\cosh 2\beta l$, $\sinh 2\beta l$ はじんだ数と

なり十分な精度において $\cosh 2\beta l \cong \sinh 2\beta l$ としてよく, $\sin 2\alpha l$ は $\sinh 2\beta l$ に対して省略できるから次式をうる.

$$\begin{aligned} \delta/5kl^4 \cong & 1 + \frac{1}{5} \left[\frac{1}{B} \left\{ 27 + \frac{1+\nu-8\nu^2}{4(1+\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. - \frac{2(2+\nu)q_w'}{(1-\nu^2)B(\tau\alpha l - \varphi\beta l)} \right] \left(\frac{a}{l} \right)^2 \\ & + \frac{1}{5} \left[12(2-\nu)B \right. \\ & \left. + \frac{(4I-\nu B)(p_w\alpha l - q_w\beta l)}{(1-\nu^2)B^2(\tau\alpha l - \varphi\beta l)} \right] \left(\frac{a}{l} \right)^4 \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

今 $a/h=50$, $\nu=0.3$ とし, $\delta/5kl^4$ の値を l/a に関し図示すれば第2図のようになる.

4. 応 力

第 2 図

筆者の1人の前論文⁽⁶⁾から推定できるように各応力は波状を呈し, したがってその最大値は必ずしも中央または端に生ずるとは限らず Wojtaszak の断定⁽⁷⁾には疑問が持たれるので応力の検討には特に注意を払った. 求められた任意定数を(7), (8)式に代入すれば各応力およびモーメントの式が求められる. 念のためにこれらの式を力およびモーメントの平衡式に代入してみると満たされていることがわかる. まず T_θ について考えてみる.

$$\begin{aligned} T_{\theta 1} &= \gamma a^2 + \frac{12(1-\nu^2)cAD}{ah^2\Delta_0} \partial \bar{\lambda}_0^5 \sin \bar{\lambda}_0 l \cdot \lambda_0^4 \cos \lambda_0 x \\ &= \gamma a^2 + \frac{(2-\nu)a^2\gamma A}{2\Delta_0} (\lambda_0 \bar{\lambda}_0)^4 \partial \bar{\lambda}_0 \sin \bar{\lambda}_0 l \cos \lambda_0 x = \gamma a^2 - \frac{(2-\nu)}{2} \gamma a^2 \phi_0(x) \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \phi_0(x) \equiv & \frac{1}{\sinh 2\alpha_0 l + \sin 2\alpha_0 l} [\sin \alpha_0(l-x) \cosh \alpha_0(l+x) + \cos \alpha_0(l-x) \sinh \alpha_0(l+x) \\ & + \sin \alpha_0(l+x) \cosh \alpha_0(l-x) + \cos \alpha_0(l+x) \sinh \alpha_0(l-x)] \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

次に(8)式の第2式に(20)式を代入すると

$$\begin{aligned} T_{\theta 2} = & -\frac{1}{B^2} \left[1 - \frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \gamma a^2 \cos \theta + \frac{12D}{ah^2} \left[1 - \nu^2 - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \\ & \times \frac{6a^4k}{B} \cdot \frac{1}{\Delta_1} \left\{ (4I-\nu B) \partial \bar{\lambda}_1^4 \cos \bar{\lambda}_1 x \left[A\lambda_1^2 + \frac{2+\nu}{a^2} B \right] \lambda_1^3 \sin \lambda_1 l \right. \\ & \left. - \frac{4(2+\nu)Bl}{a^2} \partial \bar{\lambda}_1^4 \cos \bar{\lambda}_1 x \left[V\lambda_1^2 - \frac{\nu B}{a^2} \right] \lambda_1^2 \cos \lambda_1 l \right\} \cos \theta \end{aligned}$$

したがって最下面における値は

$$\begin{aligned} T_{\theta 2} = & \frac{1}{B^2} \left[1 - \frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \gamma a^2 - \frac{12D}{ah^2} \left[1 - \nu^2 - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \frac{6a^4k}{B} \cdot \frac{(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)^2}{\Delta_1} \left\{ (4I-\nu B) (\lambda_1 \bar{\lambda}_1) \right. \\ & \times \partial \left[A\lambda_1^2 + \frac{2+\nu}{a^2} B \right] \bar{\lambda}_1 \sin \lambda_1 l \cos \bar{\lambda}_1 x - \frac{4(2+\nu)Bl}{a^2} \partial \left[V\lambda_1^2 - \frac{\nu B}{a^2} \right] \bar{\lambda}_1^2 \cos \lambda_1 l \cos \bar{\lambda}_1 x \Big\} \\ = & \frac{1}{B^2} \left[1 - \frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \gamma a^2 - \frac{\gamma a^2}{2B^2} \left[1 - \frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \\ & \times \left[\frac{(4I-\nu B)\sqrt{3(1-\nu^2)}A}{(a/h)^2} \left(\frac{h}{a} \right) [(2\alpha l\sqrt{3(1-\nu^2)}(a/h)^2 A - 1 - \nu\beta l) t_1(x) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\nu\alpha l + 2\beta l\sqrt{3(1-\nu^2)}(a/h)^2 A - 1) t_2(x)] - 4(2+\nu)B \left(\frac{l}{a} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left[\nu \left(\frac{h}{a} \right)^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}(a/h)^2 A - 1 t_3(x) - \left\{ 6(1-\nu^2) - \nu^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} t_4(x) \right] \right] \right. \\ & \left. \times \frac{1}{(\tau\alpha l - \varphi\beta l) \sinh 2\beta l + (\varphi\alpha l + \tau\beta l) \sin 2\alpha l} \dots\dots\dots (28) \right. \end{aligned}$$

ここに $t_1(x)$, $t_2(x)$, $t_3(x)$, $t_4(x)$, τ , φ 等は (23) 式で定義される.

中央最下面における薄膜理論による円周方向の内力すなわち $2\gamma a^2$ を基準に取り, この比を取れば

$$\begin{aligned} \frac{T_\theta}{2\gamma a^2} &= \frac{T_{\theta 1}}{2\gamma a^2} + \frac{T_{\theta 2}}{2\gamma a^2} \equiv I_\theta \\ &= \frac{1}{2B^2} \left[1 + B^2 - \frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] - \frac{(2-\nu)}{4} \phi_0(x) - \frac{\left[1 - \frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]}{4B^2} \\ &\quad \times \left[\frac{(4I - \nu B) \sqrt{3(1-\nu^2)} A \left(\frac{h}{a} \right) [(2\alpha l \sqrt{3(1-\nu^2)} (a/h)^2 A - 1 - \nu \beta l) t_1(x) \right.}{(\tau \alpha l - \varphi \beta l) \sinh 2\beta l + (\varphi \alpha l + \tau \beta l) \sin 2\alpha l} \right. \\ &\quad \left. + (\nu \alpha l + 2\beta l \sqrt{3(1-\nu^2)} (a/h)^2 A - 1) t_2(x) \right] \\ &\quad \left. - 4(2+\nu) B \left(\frac{l}{a} \right)^2 \left[\nu \left(\frac{h}{a} \right)^2 \sqrt{3(1-\nu^2)} (a/h)^2 A - 1 t_3(x) - \left\{ 6(1-\nu^2) - \nu^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} t_4(x) \right] \right] \dots (29) \end{aligned}$$

いま $a/h=50$, $l/a=2$, $\nu=0.3$ の場合について計算してみるにこの場合

$$\alpha_0 l = 18.18, \quad \alpha l = 18.04, \quad \beta l = 18.28 \dots (30)$$

これらの $\sinh$, $\cosh$ の値はじん大となりかつ十分な精度において $\sinh \cong \cosh$ とみなし得る. したがって $x > 0$ の範囲で $\sinh \beta(l+x) \cong \cosh \beta(l+x) \cong \frac{e^{\beta(l+x)}}{2}$ としてよく, また $\sin 2\alpha l$ は $\sinh 2\beta l$ に対して省略できる. x がかなり l に近いところではこの近似式の精度はきわめて高く, x が中央に近いところでは波形がきわめて小さく無視しうる. 以上のことを考慮して精度の高い近似を行えば

I_θ の式として

$$\begin{aligned} I_\theta &\cong \frac{1}{2B^2} \left[1 + B^2 - \frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] - \frac{(2-\nu)}{4} [\sin \alpha_0(l-x) + \cos \alpha_0(l-x)] e^{-\alpha_0(l-x)} \\ &\quad - \frac{(2-\nu)}{4} [\sin \alpha_0(l+x) + \cos \alpha_0(l+x)] e^{-\alpha_0(l+x)} \\ &\quad - \frac{\left[1 - \frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]}{4B^2(\tau \alpha l - \varphi \beta l)} \left\{ \left[(4I - \nu B) \sqrt{3(1-\nu^2)} A \left(\frac{h}{a} \right) (2\alpha l \sqrt{3(1-\nu^2)} (a/h)^2 A - 1 - \nu \beta l) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4(2+\nu) B \left(\frac{l}{a} \right)^2 \left\{ 6(1-\nu^2) - \nu^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \right] \sin \alpha(l-x) + \left[(4I - \nu B) \sqrt{3(1-\nu^2)} A \left(\frac{h}{a} \right) (\nu \alpha l + 2\beta l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sqrt{3(1-\nu^2)} (a/h)^2 A - 1) - 4(2+\nu) B \left(\frac{l}{a} \right)^2 \nu \left(\frac{h}{a} \right)^2 \sqrt{3(1-\nu^2)} (a/h)^2 A - 1 \right] \cos \alpha(l-x) \right\} e^{-\beta(l-x)} \\ &\quad - \frac{\left[1 - \frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]}{4B^2(\tau \alpha l - \varphi \beta l)} [(\kappa) \sin \alpha(l+x) + (\kappa) \cos \alpha(l+x)] e^{-\beta(l+x)} \dots (31) \end{aligned}$$

端 $x=l$ 附近ではかなり波形が大きいので, その極値の位置を求める. (28) 式を x で微分し, それを零とおくことによりその位置を求め前と同様精度の高い近似を行えば, その位置はだいたい次のとおりになる.

$$\begin{aligned} \tan \alpha(l-x) &= \frac{\left\{ \begin{aligned} &2(4-\nu) \sqrt{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right) \left[(\alpha l + \beta l)(\alpha l - \beta l) \sqrt{3(1-\nu^2)} (a/h)^2 A - 1 - \nu \alpha l \cdot \beta l \right] \\ &+ 4(2+\nu) \left(\frac{l}{a} \right)^2 \left[\left\{ 6(1-\nu^2) - \nu^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \alpha l - \nu \sqrt{3(1-\nu^2)} (a/h)^2 A - 1 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \beta l \right] \end{aligned} \right\}}{\left\{ \begin{aligned} &2(2-\nu) \alpha_0 l (\tau \alpha l - \varphi \beta l) + (4-\nu) \sqrt{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right) \\ &\times \{ 4\sqrt{3(1-\nu^2)} (a/h)^2 A - 1 \alpha l \cdot \beta l + \nu (\alpha l + \beta l)(\alpha l - \beta l) \} \\ &+ 4(2+\nu) \left(\frac{l}{a} \right)^2 \left[\left\{ 6(1-\nu^2) - \nu^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \beta l - \nu \sqrt{3(1-\nu^2)} (a/h)^2 A - 1 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \alpha l \right] \end{aligned} \right\}} \end{aligned} \dots (32)$$

以上の式で数値計算を行えば第 3 図の I_θ のごとくなる. これをみれば中央より端の半分近くまではほとんど薄膜理論の値に一致し, この辺から少し波形が現われるようになり, 端より $0.18l$ の辺に薄膜理論の値より少し大きくなるところがあることがわかり予想どおり Wojtaszak の断定⁽⁷⁾ は誤りであることがわかった.

第 3 図

第 4 図

他の内力, モーメントも同様に求め得る.

$$\left. \begin{aligned} II &\equiv \frac{S}{\theta = -\pi/2} / 2\gamma a^2 & III_\theta &\equiv \frac{6M_\theta}{h} / 2\gamma a^2 \\ I_x &\equiv \frac{T_x}{\theta = \pi} / 2\gamma a^2, & III_x &\equiv \frac{6M_x}{h} / 2\gamma a^2 \\ IV &\equiv \frac{6M}{h} / 2\gamma a^2, & V_x &\equiv \frac{N_x}{\theta = \pi} / 2\gamma a^2 \\ VI &\equiv -\frac{w}{5kl^4} \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

第 3, 4 図にこれらの曲線を記入してある. これらの曲線はいずれも $a/h=50$, $l/a=2$, $\nu=0.3$ の場合である. これらの曲線を見れば, S の変化は端近くを除いてほとんど直線的である. N_x は端近くで少し増加する. M_θ , M_x は T_θ と同じように端近くで波形が現われ, M_θ はほとんど M_x に比例して変化する.

5. 結 言

Timoshenko の方法によれば, フーリエ級数解を仮定して三つの偏微分方程式を取扱わねばならない. しかもその収束がうすい かく に対してはきわめておそくかつ実際の支持条件を満足しない. Wojtaszak によれば T_θ , M_x , M_θ は中央で最大になると初めから断定

しているが, これによれば中央ではなく端または端に近いところで起っていることがわかる. また T_x , M_x は両端で零になるとしているが, この方法では零にはならずかなり大きい値になる. これは Wojtaszak は級数解を仮定して解いているため変形後 warping を起して端面が平面を保たない解となっているからである. すなわち実際には有り得ない支持条件を仮定して解いていることになるからである. なお両端の支持条件は貯そうの形式により種々であるが, それらはいずれも本研究と同一形式で解きうるが, Timoshenko 式の級数解を仮定する方法では, Wojtaszak の計算以外の支持条件に対しては解がきわめて困難である.

最後に, 本研究には文部省科学研究費の一部を使用させていただいたことを附記しておく.

文 献

- (1) 溝口, 機械学会論文集, 20, 95 (昭 29-7), 485 ページ (6) 式.
- (2) 同 上, 485 ページ (8), (9) および (10) 式.
- (3) 同 上, 486 ページ (12) 式.
- (4) 同 上, 486 ページ (15) 式.
- (5) 同 上, 484 ページ (2) 式.
- (6) 同 上, 489 ページ.
- (7) I.A. Wojtaszak, *Phil. Mag.*, series 7, 18 (1934), 1 107.