539. 38:624. 073. 1

タ イ ヤ の 力 学

(二重双曲形直交異方性長方形板の非一様引張解析)*

赤 坂 隆**

Mechanics of Tyre

(Analysis of Bi-Hyperbolic Type Anisotropic Rectangular Plate
under Non-Uniform Tension)

by Takashi AKASAKA

In the plane stress problems of bi-hyperbolic type anisotropic plate like the tyre carcass with inextensional cords, the whole region must be divided into several parts enclosed by some boundary segments and the pairs of characteristic lines, and finally, each solutions of displacements and stresses in the neighbouring parts have to be connected along the borderline.

Here, for an example, the rectangular anisotropic plate, in which a pair of sides is free and the other pair of sides is loaded by non-uniform tension, was analyzed.

As the results, it is observed that the local perturbation of stresses and displacements near the loaded gradually fades away as going farther from the ends.

1. 緒 言

タイヤにおけるコード不伸長の仮定によれば、その平板は二重双曲形直交異方性を示すことは前報告⁽¹⁾において述べたとおりである。ここではそのような特性をもつ長方形板の平面応力問題の一例について解析した。

この解析法において特記すべきことは、境界条件が異種（応力または変位）および不連続である場合、考える全領域は同種かつなめらかな境界条件をもつ境界と、その両端をとる特性曲線とによってかこまれた数個の小区域に分けられねばならぬことで、かくして別々に解析された解は特性曲線に沿う変位と応力の連続条件によって、つなぎ合わされることによって最後の結果をうる点である。

本解析例は一对の辺が自由べりで他の一对の辺に非一様な引張変位を与えた場合である。これは前報告において解析した無限長帯板の非一様引張りと同様の例であるが、解析法において顕著な相違のある点興味深い。また、この例を選んだのは引張実験における応力および変位の減衰効果を調べる目的のためである。

〔記 号〕

x, y : 直交座標 (ともにコード交角の二等分線方向)

2α : コード角

σ_x, σ_y, τ : 平面応力成分

E_x, E_y : ヤング率

u, v : 変位成分

φ, ψ, f, g : 任意関数

F : 応力関数

ξ, η : 特性曲線座標

$(\xi = x + \lambda y, \eta = x - \lambda y)$

$\lambda: \cot \alpha$

$\Gamma: 4\lambda^2/E_x$

a, b : 長方形板の長さおよび幅

$\mu = 2\pi m/\lambda b \quad (m=1, 2, \dots)$

$A_0, A, B, C_I, C_{II}, C_{III}, \Omega_1, \Omega_2$: 定数

$2h = a/2$

$\sigma_0 = E_x 2u_0/a$

σ_M : 平均応力

P : 引張力

2. 基礎方程式と境界条件

二重双曲形直交異方性板の応力関数 F は次のように表わされる。

$$F = \xi f_1(\eta) + \eta f_2(\xi) + g_1(\eta) + g_2(\xi) \quad \dots\dots\dots (1)$$

また、変位成分 u, v は、

$$\left. \begin{aligned} u &= -\Gamma [f_2(\xi) + f_1(\eta)] + C, \\ v &= \lambda \Gamma [f_2(\xi) - f_1(\eta)] + D \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

* 昭和 34 年 4 月 4 日 第 34 期通常総会講演会において第 4 報として講演、原稿受付 昭和 34 年 4 月 4 日。

** 正員、中央大学工学部 (東京都文京区小石川町 1 の 1)。

第1図 解析例と小領域

更に応力成分は(1)式より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= F_{,yy} = \lambda^2 [\xi f_1''(\eta) + \eta f_2''(\xi) \\ &\quad - 2f_1'(\eta) - 2f_2'(\xi) + \varphi(\eta) + \psi(\xi)], \\ \sigma_y &= F_{,xx} = \xi f_1''(\eta) + \eta f_2''(\xi) \\ &\quad + 2f_1'(\eta) + 2f_2'(\xi) + \varphi(\eta) + \psi(\xi), \\ \tau &= -F_{,xy} = \lambda [\xi f_1''(\eta) - \eta f_2''(\xi) \\ &\quad + \varphi(\eta) - \psi(\xi)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

とかける。ここに、

$$\varphi(\eta) \equiv g_1''(\eta), \quad \psi(\xi) \equiv g_2''(\xi) \dots\dots\dots(4)$$

さて、第1図に示した $a \times b$ なる長方形板において

$$a = 2\lambda b \dots\dots\dots(5)$$

なる関係のある 特別の場合 について考えることにする。しかるとき、境界条件;

$$(i) \quad x = \pm \frac{a}{2} \text{ にて,}$$

$$u = \pm u_0 \left(1 + \beta \cos \frac{2\pi m}{b} y \right) \dots\dots\dots(BC-1)$$

$$(ii) \quad y = \pm \frac{b}{2} \text{ にて,}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_y &= 0 \dots\dots\dots(BC-2) \\ \tau &= 0 \dots\dots\dots(BC-3) \end{aligned} \right.$$

および、 x 軸、 y 軸に対する対称性を考慮すれば、図示のように第1象限は3個の小区域に分けられる。これらをそれぞれ、R-I, II, III としよう。特に R-III は自由べりの境界をもつ領域である。

3. 変位成分

(i) R-I R-I では変位成分について (BC-1) と x 軸に対する対称条件を満足させねばならない。(2)式より、

$$\left(\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (u, v) = 0 \dots\dots\dots(6)$$

なるゆえ、 u_I (または v_I) の表示式として、(6)式の特解;

$$u_I = A_0 x + \sum_{\mu \neq 0} (A_\mu \sin \mu x + B_\mu \cos \mu x) \cos \mu \lambda y + C_I \dots\dots\dots(7)$$

を選ぶのが妥当である。(5)式を考慮し、(7)式を

(BC-1) と比較することにより、

$$u_I = C_I + \frac{1}{2} A_0 (\xi + \eta) + \frac{1}{2} A (\sin \mu \xi + \sin \mu \eta) + \frac{1}{2} B (\cos \mu \xi + \cos \mu \eta) \dots\dots\dots(8)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 \frac{a}{2} + C_I &= u_0, & \mu &= 2\pi m / \lambda b, \\ B &= u_0 \beta, & \left(\frac{a}{2} \mu &= 2\pi m \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 A_μ , B_μ の添字 μ を除去して単に A , B とした。他方、(2)式と(8)式を比較し、 u_I の x 軸に対する対称性および v_I の x 軸に対する逆対称性より

$$f_I = f_2 \equiv f_{II}, \quad D_I = 0 \dots\dots\dots(10)$$

をうるので、結局 R-I の変位は次のようにまとめられる。

$$\left. \begin{aligned} u_I &= -\Gamma [f_I(\xi) + f_I(\eta)] + C_I, \\ v_I &= \lambda \Gamma [f_I(\xi) - f_I(\eta)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 f_I は任意変数 ξ について

$$f_I(\xi) = -\frac{1}{2\Gamma} [A_0 \xi + A \sin \mu \xi + B \cos \mu \xi] \dots\dots\dots(12)$$

とかける。

(ii) R-II R-I と同様、 u_{II} , v_{II} の x 軸に対する対称、逆対称性を満足するから、

$$\left. \begin{aligned} u_{II} &= -\Gamma [f_{II}(\xi) + f_{II}(\eta)] + C_{II}, \\ v_{II} &= \lambda \Gamma [f_{II}(\xi) - f_{II}(\eta)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

と表わされる。他方、 v_{II} , u_{II} の y 軸 ($\xi = -\eta$) に対する対称、逆対称性より、

$$f_{II}'(\xi) = f_{II}'(-\xi), \quad f_{II}''(\xi) = -f_{II}''(-\xi) \dots\dots\dots(14)$$

および

$$f_{II}(\xi) = -f_{II}(-\xi) + C_{II}/\Gamma \dots\dots\dots(15)$$

を得る。

(iii) R-III

$$\left. \begin{aligned} u_{III} &= -\Gamma [f_2(\xi) + f_1(\eta)] + C_{III}, \\ v_{III} &= \lambda \Gamma [f_2(\xi) - f_1(\eta)] + D_{III} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

4. 変位の連続条件

$\eta = \eta_0 = a/4$ 上での R-I と R-III の変位の連続条件;

$u_I = u_{III}$, $v_I \equiv v_{III}$ より

$$f_2(\xi) = f_I(\xi) \dots\dots\dots(17)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{III} &= C_I + \Gamma [f_1(\eta_0) - f_I(\eta_0)], \\ D_{III} &= \lambda \Gamma [f_1(\eta_0) - f_I(\eta_0)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

を得る。同様に、 $\xi = \xi_0 = a/4$ 上での R-III, R-II の変位の連続条件; $u_{II} = u_{III}$, $v_{II} = v_{III}$ より、

$$f_I(\eta) = f_{II}(\eta) \dots\dots\dots(19)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{II} &= C_{III} + I' [f_{II}(\xi_0) - f_2(\xi_0)], \\ D_{II} &= \lambda I' [f_{II}(\xi_0) - f_2(\xi_0)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

かくして、(16) 式は、

$$\left. \begin{aligned} u_{III} &= -I' [f_I(\xi) + f_{II}(\eta)] + C_{III}, \\ v_{III} &= \lambda I' [f_I(\xi) - f_{II}(\eta)] + D_{III} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)'$$

とかきかえられる。したがって各領域の変位成分は f_I , f_{II} 関数にて表現されたことになる。

5. 応 力 成 分

(i) **R-I** 応力成分の一般表示式 (3) 式において、 x 軸に対する $\sigma_x \pm \lambda^2 \sigma_y$ の対称性および τ の逆対称性を考慮すると、容易に、

$$\varphi(\zeta) = \psi(\zeta) \equiv \varphi_I(\zeta) \dots\dots\dots (20)'$$

を得るので、応力成分は以下のようにかける。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xI} &= \lambda^2 [\eta f_I''(\xi) + \xi f_I''(\eta) - 2f_I'(\xi) - 2f_I'(\eta) + \varphi_I(\xi) + \varphi_I(\eta)], \\ \sigma_{yI} &= \eta f_I''(\xi) + \xi f_I''(\eta) + 2f_I'(\xi) + 2f_I'(\eta) + \varphi_I(\xi) + \varphi_I(\eta), \\ \tau_I &= \lambda [\xi f_I''(\eta) - \eta f_I''(\xi) + \varphi_I(\eta) - \varphi_I(\xi)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 $\varphi_I(\zeta)$ は未定である。

(ii) **R-II** 同じく x 軸に対する対称、逆対称条件より、(21) 式と同様な応力の表示式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xII} &= \lambda^2 [\eta f_{II}''(\xi) + \xi f_{II}''(\eta) - 2f_{II}'(\xi) - 2f_{II}'(\eta) + \varphi_{II}(\xi) + \varphi_{II}(\eta)], \\ \sigma_{yII} &= \eta f_{II}''(\xi) + \xi f_{II}''(\eta) + 2f_{II}'(\xi) + 2f_{II}'(\eta) + \varphi_{II}(\xi) + \varphi_{II}(\eta), \\ \tau_{II} &= \lambda [\xi f_{II}''(\eta) - \eta f_{II}''(\xi) + \varphi_{II}(\eta) - \varphi_{II}(\xi)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 y 軸に対する τ の逆対称条件より、

$$\varphi_{II}(\zeta) = \varphi_{II}(-\zeta) \dots\dots\dots (23)$$

すなわち $\varphi_{II}(\zeta)$ は偶関数なる結果を得る。

(iii) **R-III** この領域では座標軸に対する対称、逆対称条件は成立しないので、応力成分の表示式は (3) 式そのままであるが、(17), (19) 式を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xIII} &= \lambda^2 [\xi f_{II}''(\eta) + \eta f_I''(\xi) - 2f_{II}'(\eta) - 2f_I'(\xi) + \varphi_{III}(\eta) + \psi_{III}(\xi)], \\ \sigma_{yIII} &= \xi f_{II}''(\eta) + \eta f_I''(\xi) + 2f_{II}'(\eta) + 2f_I'(\xi) + \varphi_{III}(\eta) + \psi_{III}(\xi), \\ \tau_{III} &= \lambda [\xi f_{II}''(\eta) - \eta f_I''(\xi) + \varphi_{III}(\eta) - \psi_{III}(\xi)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

とかけるが、自由べりの条件、BC-2 および 3、すなわち、 $\xi - \eta = a/2$ 上にて、 $\sigma_{yIII} = \tau_{III} = 0$ を課すと、 φ_{III} , ψ_{III} は f_I , f_{II} によって次式のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{III}(\zeta) &= -(\zeta + 2h)f_{II}''(\zeta) - f_{II}'(\zeta) - f_I'(\zeta + 2h), \\ \psi_{III}(\zeta) &= -(\zeta - 2h)f_I''(\zeta) - f_I'(\zeta) - f_{II}'(\zeta - 2h) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

(25) 式を (24) 式に代入することにより、R-III の応力成分は f_I , f_{II} のみにて表わされることになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xIII} &= \lambda^2 [(\xi - \eta - 2h)[f_{II}''(\eta) - f_I''(\xi)] - 3[f_{II}'(\eta) + f_I'(\xi)] \\ &\quad - [f_I'(\eta + 2h) + f_{II}'(\xi - 2h)], \\ \sigma_{yIII} &= [(\xi - \eta - 2h)[f_{II}''(\eta) - f_I''(\xi)] + [f_{II}'(\eta) + f_I'(\xi)] \\ &\quad - [f_I'(\eta + 2h) + f_{II}'(\xi - 2h)], \\ \tau_{III} &= \lambda [(\xi - \eta - 2h)[f_{II}''(\eta) + f_I''(\xi)] - [f_{II}'(\eta) - f_I'(\xi)] \\ &\quad - [f_I'(\eta + 2h) - f_{II}'(\xi - 2h)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

6. 応 力 の 連 続

$\eta = \eta_0 = \frac{a}{4}$ なる面に垂直方向の応力を σ_N , せん断応力を τ_N とすれば、

$$\begin{cases} \sigma_N = \sin^2 \alpha [\sigma_x + \lambda^2 \sigma_y - 2\lambda \tau], \\ \tau_N = \sin^2 \alpha [\lambda(\sigma_x - \sigma_y) - (\lambda^2 - 1)\tau] \end{cases}$$

と表わされる. R-I, III におけるこれらの応力をそれぞれ σ_{NI} , τ_{NI} および σ_{NIII} , τ_{NIII} とすれば $\eta = \eta_0$ にて,

$$\sigma_{NI} = \sigma_{NIII}, \tau_{NI} = \tau_{NIII}$$

なる連続条件より, 容易に

$$(\xi - 2h)f_I''(\xi) + \varphi_I(\xi) + f_I'(\xi) + f_{II}'(\xi - 2h) = 0 \quad (27)$$

$$f_I'(\eta_0) = f_{II}'(\eta_0) \quad (28)$$

なる関係が導かれる.

同様に, $\xi = \xi_0 = a/4$ なる面に対しては

$$\begin{cases} \sigma_N' = \sin^2 \alpha [\sigma_x + \lambda^2 \sigma_y + 2\lambda \tau], \\ \tau_N' = \sin^2 \alpha [\lambda(\sigma_x - \sigma_y) + (\lambda^2 - 1)\tau] \end{cases}$$

なるゆえ, R-II, III におけるこれら応力の連続条件 $\sigma_{NII}' = \sigma_{NIII}'$, $\tau_{NII}' = \tau_{NIII}'$ より,

$$(\eta + 2h)f_{II}''(\eta) + \varphi_{II}(\eta) + f_{II}'(\eta) + f_I'(\eta + 2h) = 0 \quad (29)$$

$$f_I'(\xi_0) = f_{II}'(\xi_0) \quad (30)$$

を得る. ここで, (30) 式は, $\xi_0 = \eta_0 = \frac{a}{4}$ なることに

注意すると (28) 式と同一の式であることがわかる.

さて, (27), (29) 式を φ_I , φ_{II} についてとけば,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I(\zeta) &= -(\zeta - 2h)f_I''(\zeta) - f_I'(\zeta) \\ &\quad - f_{II}'(\zeta - 2h), \\ \varphi_{II}(\zeta) &= -(\zeta + 2h)f_{II}''(\zeta) - f_{II}'(\zeta) \\ &\quad - f_I'(\zeta + 2h) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

となり, かくして未知関数 $f_{II}(\zeta)$ の決定が最後の問題となる.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{II}(\zeta) &= \frac{1}{\Gamma a} \left[\frac{a}{2} A_0 - \Omega_1 + A \frac{a}{2} \mu \cos \mu \zeta + B(\mu \zeta \sin \mu \zeta - \cos \mu \zeta) \right], \\ \varphi_I(\zeta) &= \frac{1}{\Gamma a} \left[\frac{a}{2} A_0 - \Omega_1 + A \frac{a}{2} \mu \left[-\mu \left(\zeta - \frac{a}{2} \right) \sin \mu \zeta + \cos \mu \zeta \right] \right. \\ &\quad \left. + B \left[\frac{a}{2} \mu \left\{ -\mu \left(\zeta - \frac{a}{2} \right) \cos \mu \zeta - \sin \mu \zeta \right\} - \cos \mu \zeta \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

他方, (12), (18), (20), (34) および (35) 式から, 次の関係をうる.

$$\left. \begin{aligned} C_I &= \frac{1}{2} (2\pi mA - B) (-1)^m, \\ C_{III} &= \frac{1}{2} (C_{II} + C_I), \\ D_{III} &= \frac{\lambda}{2} (C_{II} - C_I) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

8. 変位の表示式

以上に決定せられた諸関数および諸定数を 3 領域における変位の表示式に代入してその関数形を決定する. まず, (11), (12) 式より,

7. $f_{II}(\zeta)$ の決定

さて, (31) 式の $\varphi_{II}(\zeta)$ の表示式にて, $\zeta \rightarrow -\zeta$ なる変換を行い, (14), (23) 式を考慮すると,

$$\begin{aligned} \varphi_{II}(\zeta) &= -(\zeta - 2h)f_{II}''(\zeta) - f_{II}'(\zeta) \\ &\quad - f_I'(2h - \zeta) \end{aligned}$$

とかける. これと (31) の第 2 式より, $\varphi_{II}(\zeta)$ を消去し, $4h = a$ なることに注意すれば,

$$f_{II}''(\zeta) = \frac{1}{a} \left[f_I' \left(\frac{a}{2} - \zeta \right) - f_I' \left(\frac{a}{2} + \zeta \right) \right] \quad (32)$$

をうる. これが $f_{II}(\zeta)$ の満足すべき微分方程式である. この右辺に (12) 式を代入し, $\mu a/2 = 2\pi m$ を考慮すると, (32) 式は次のように簡単な形になる.

$$f_{II}''(\zeta) = -\frac{B}{\Gamma a} \mu \sin \mu \zeta \quad (32)'$$

これを積分して,

$$f_{II}'(\zeta) = \frac{1}{\Gamma a} (B \cos \mu \zeta + \Omega_1) \quad (33)$$

$$f_{II}(\zeta) = \frac{1}{\Gamma a} \left(\frac{B}{\mu} \sin \mu \zeta + \Omega_1 \zeta + \Omega_2 \right) \quad (34)$$

(32)', (33) 式はともに (14) 式の条件を満足している. 積分定数 Ω_1 , Ω_2 はそれぞれ (28) および (15) 式より定まる. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{a}{2} A_0 - (-1)^m (B + 2\pi mA) \\ \Omega_2 &= \frac{a}{2} C_{II} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

かくして, (31) 式より, $\varphi_I(\zeta)$, $\varphi_{II}(\zeta)$ は次のように表示される.

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{I}} &= \frac{1}{2} [A_0(\xi + \eta) + A(\sin \mu\xi + \sin \mu\eta) + B(\cos \mu\xi + \cos \mu\eta)] + C_{\text{I}}, \\ v_{\text{I}} &= -\frac{\lambda}{2} [A_0(\xi - \eta) + A(\sin \mu\xi - \sin \mu\eta) + B(\cos \mu\xi - \cos \mu\eta)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

また, (13) 式より, (35) 式を考慮して,

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{II}} &= -\frac{1}{a} \left[\frac{B}{\mu} (\sin \mu\xi + \sin \mu\eta) + \Omega_1(\xi + \eta) \right], \\ v_{\text{II}} &= \frac{\lambda}{a} \left[\frac{B}{\mu} (\sin \mu\xi - \sin \mu\eta) + \Omega_1(\xi - \eta) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

(16)' 式より, (37) 式を考慮して,

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{III}} &= \frac{1}{2} [A_0\xi + A \sin \mu\xi + B \cos \mu\xi] - \frac{1}{a} \left[\frac{B}{\mu} \sin \mu\eta + \Omega_1\eta \right] + \frac{C_{\text{I}}}{2}, \\ v_{\text{III}} &= -\frac{\lambda}{2} [A_0\xi + A \sin \mu\xi + B \cos \mu\xi] - \frac{\lambda}{a} \left[\frac{B}{\mu} \sin \mu\eta + \Omega_1\eta \right] - \frac{\lambda C_{\text{I}}}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

以上において独立な未定定数は (9), (35), (37) 式を考慮すると, 1 個で未定のままである. このことは本解析において境界条件が不足であることを意味する.

この未定定数を A に選べば, A_0 , C_{I} , Ω_1 は次のように表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{2} A_0 &= u_0 \left[1 + \frac{\beta}{2} (-1)^m \right] - \frac{1}{2} (-1)^m 2\pi m A, \\ C_{\text{I}} &= -u_0 \beta \frac{1}{2} (-1)^m + \frac{1}{2} (-1)^m 2\pi m A, \\ \Omega_1 &= -u_0 \left[1 + \frac{3}{2} \beta (-1)^m \right] - \frac{1}{2} (-1)^m 2\pi m A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

かくして, 変位成分は任意定数 A を含む形で決定されたことになる. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{I}} &= u_0 \left[1 - \left\{ 1 + \frac{\beta}{2} (-1)^m \right\} \left(1 - \frac{2}{a} x \right) + \beta \cos \mu x \cos \mu \lambda y \right] \\ &\quad + A \left[\pi m (-1)^m \left(1 - \frac{2}{a} x \right) + \sin \mu x \cdot \cos \mu \lambda y \right], \\ v_{\text{I}} &= -\lambda u_0 \left[\left\{ 1 + \frac{\beta}{2} (-1)^m \right\} \frac{2}{a} \lambda y - \beta \sin \mu x \sin \mu \lambda y \right] \\ &\quad - \lambda A \left[-\left\{ \pi m (-1)^m \right\} \frac{2}{a} \lambda y + \cos \mu x \sin \mu \lambda y \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)'$$

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{II}} &= u_0 \left[\left\{ 1 + \frac{3}{2} \beta (-1)^m \right\} \frac{2x}{a} - \frac{\beta}{2\pi m} \sin \mu x \cos \mu \lambda y \right] + A \pi m (-1)^m \frac{2x}{a}, \\ v_{\text{II}} &= \lambda u_0 \left[-\left\{ 1 + \frac{3}{2} \beta (-1)^m \right\} \frac{2\lambda y}{a} + \frac{\beta}{2\pi m} \cos \mu x \cdot \sin \mu \lambda y \right] - \lambda A \pi m (-1)^m \cdot \frac{2\lambda y}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)'$$

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{III}} &= u_0 \left[-\beta \frac{1}{4} (-1)^m + \{ 1 + \beta (-1)^m \} \frac{2}{a} x - \beta (-1)^m \frac{\lambda y}{a} + \frac{\beta}{2} \cos \mu(x + \lambda y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{2} \frac{1}{2\pi m} \sin \mu(x - \lambda y) \right] + A \left[\frac{1}{2} (-1)^m \pi m + \frac{1}{2} \sin \mu(x + \lambda y) - \frac{2\pi m}{a} (-1)^m \lambda y \right], \\ v_{\text{III}} &= \lambda u_0 \left[\beta \frac{1}{4} (-1)^m + \beta (-1)^m \frac{x}{a} - \{ 1 + \beta (-1)^m \} \frac{2}{a} \lambda y - \frac{\beta}{2} \cos \mu(x + \lambda y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{2} \frac{1}{2\pi m} \sin \mu(x - \lambda y) \right] + \lambda A \left[(-1)^m \pi m \left(\frac{2x}{a} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \sin \mu(x + \lambda y) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)'$$

9. 応力の表示式

(i) **R-I** (12), (36) 式を (21) 式に代入し, (41) 式を考慮すると, R-I の応力成分は次のように計算される.

$$\frac{\sigma_x \text{I}}{\sigma_0} = 1 + \frac{3}{4} \beta (-1)^m + \beta \left[\begin{aligned} & m\pi(\mu\lambda y) \sin \mu x \cdot \sin \mu\lambda y + (m\pi)^2 \cos \mu x \cdot \cos \mu\lambda y \\ & - \frac{3}{2} \pi m \sin \mu x \cdot \cos \mu\lambda y - \frac{1}{4} \cos \mu x \cdot \cos \mu\lambda y \end{aligned} \right] \\ + \frac{A}{u_0} \left[\begin{aligned} & -\frac{\pi m}{2} (-1)^m - \pi m(\mu\lambda y) \cos \mu x \cdot \sin \mu\lambda y \\ & + (\pi m)^2 \sin \mu x \cdot \cos \mu\lambda y + \frac{3}{2} \pi m \cos \mu x \cos \mu\lambda y \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (42)$$

$$\frac{\sigma_y \text{I}}{\sigma_0} = \frac{\beta}{\lambda^2} \left[\begin{aligned} & \frac{1}{4} (-1)^m + \pi m(\mu\lambda y) \cos \mu x \cdot \sin \mu\lambda y + (\pi m)^2 \cos \mu x \cdot \cos \mu\lambda y \\ & + \frac{\pi m}{2} \sin \mu x \cdot \cos \mu\lambda y - \frac{1}{4} \cos \mu x \cos \mu\lambda y \end{aligned} \right] \\ + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{A}{u_0} \right) \left[\begin{aligned} & \frac{\pi m}{2} (-1)^m - \pi m(\mu\lambda y) \cos \mu x \cdot \sin \mu\lambda y \\ & + (\pi m)^2 \sin \mu x \cos \mu\lambda y - \frac{\pi m}{2} \cos \mu x \cos \mu\lambda y \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (43)$$

$$\frac{\tau \text{I}}{\sigma_0} = \frac{\beta}{\lambda} \left[\begin{aligned} & \pi m(\mu\lambda y) \cos \mu x \cdot \cos \mu\lambda y + (\pi m)^2 \sin \mu x \sin \mu\lambda y \\ & + \frac{\pi m}{2} \cos \mu x \sin \mu\lambda y - \frac{1}{4} \sin \mu x \sin \mu\lambda y \end{aligned} \right] \\ + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{A}{u_0} \right) \left[\begin{aligned} & \pi m(\mu\lambda y) \sin \mu x \cos \mu\lambda y - (\pi m)^2 \cos \mu x \sin \mu\lambda y \\ & + \frac{\pi m}{2} \sin \mu x \cdot \sin \mu\lambda y \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (44)$$

(ii) **R-II** 同様にして, (32)', (33), (36) 式を (22) 式に代入し, (41) 式を考慮することにより次式を得る.

$$\frac{\sigma_x \text{II}}{\sigma_0} = 1 + \beta \left[\begin{aligned} & \frac{5}{4} (-1)^m + \frac{\mu\lambda y}{2} \cos \mu x \sin \mu\lambda y - \frac{3}{4} \cos \mu x \cdot \cos \mu\lambda y \end{aligned} \right] \\ + \left(\frac{A}{u_0} \right) \left[\begin{aligned} & \frac{\pi m}{2} (-1)^m + \frac{\pi m}{2} \cos \mu x \cdot \cos \mu\lambda y \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (45)$$

$$\frac{\sigma_y \text{II}}{\sigma_0} = \frac{\beta}{\lambda^2} \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4} (-1)^m + \frac{\mu\lambda y}{2} \cos \mu x \sin \mu\lambda y + \frac{1}{4} \cos \mu x \cdot \cos \mu\lambda y \end{aligned} \right] \\ + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{A}{u_0} \right) \left[\begin{aligned} & \frac{\pi m}{2} \cos \mu x \cdot \cos \mu\lambda y - \frac{\pi m}{2} (-1)^m \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (46)$$

$$\frac{\tau \text{II}}{\sigma_0} = \frac{\beta}{\lambda} \left[\begin{aligned} & -\frac{\mu\lambda y}{2} \sin \mu x \cdot \cos \mu\lambda y - \frac{1}{4} \sin \mu x \sin \mu\lambda y \end{aligned} \right] + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{A}{u_0} \right) \frac{\pi m}{2} \sin \mu x \cdot \sin \mu\lambda y \dots\dots\dots (47)$$

(iii) **R-III** (12), (32)', (33) 式を (26) 式に代入することにより, R-III の応力成分は次のように整理される.

$$\frac{\sigma_x \text{III}}{\sigma_0} = 1 + \beta \left[\begin{aligned} & (-1)^m + \frac{\pi m}{4} \left(1 - \frac{4\lambda y}{a} \right) \{ 2\pi m \cos \mu(x+\lambda y) + \sin \mu(x-\lambda y) \} \\ & - \frac{3}{8} \{ \cos \mu(x-\lambda y) + 2\pi m \sin \mu(x+\lambda y) \} - \frac{1}{8} \{ \cos \mu(x+\lambda y) + 2\pi m \sin \mu(x-\lambda y) \} \end{aligned} \right] \\ + \left(\frac{A}{u_0} \right) \left[\begin{aligned} & \frac{(\pi m)^2}{2} \left(1 - \frac{4\lambda y}{a} \right) \sin \mu(x+\lambda y) + \frac{3}{4} \pi m \cos \mu(x+\lambda y) + \frac{\pi m}{4} \cos \mu(x-\lambda y) \end{aligned} \right] \dots\dots (48)$$

$$\frac{\sigma_y \text{III}}{\sigma_0} = \frac{\beta}{\lambda^2} \left[\begin{aligned} & \frac{\pi m}{4} \left(1 - \frac{4\lambda y}{a} \right) \{ 2\pi m \cos \mu(x+\lambda y) + \sin \mu(x-\lambda y) \} \\ & + \frac{1}{4} \sin \mu x \cdot \sin \mu\lambda y + \frac{\pi m}{2} \cos \mu x \cdot \sin \mu\lambda y \end{aligned} \right] \\ + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{A}{u_0} \right) \left[\begin{aligned} & \frac{(\pi m)^2}{2} \left(1 - \frac{4\lambda y}{a} \right) \{ 2\pi m \cos \mu(x+\lambda y) - \sin \mu(x-\lambda y) \} \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (49)$$

$$\frac{\tau_{\text{III}}}{\sigma_0} = \frac{\beta}{\lambda} \left[\frac{-\pi m}{4} \left(1 - \frac{4\lambda y}{a} \right) (2\pi m \cos \mu(x+\lambda y) - \sin \mu(x-\lambda y)) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \sin \mu x \sin \mu \lambda y + \frac{\pi m}{2} \cos \mu x \sin \mu \lambda y \right] \\ + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{A}{u_0} \right) \left[-\frac{(\pi m)^2}{2} \left(1 - \frac{4\lambda y}{a} \right) \sin \mu(x+\lambda y) + \frac{\pi m}{2} \sin \mu x \cdot \sin \mu \lambda y \right] \dots\dots\dots (50)$$

ただし、以上において、

$$\sigma_0 \equiv E_x 2u_0/a \dots\dots\dots (51)$$

とおいた。

10. 特別場合と変位・応力の減衰性

以上に求められた変位および応力の表示式において、 $A=\beta=0$ とおけば、

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{I}} &= u_{\text{II}} = u_{\text{III}} = u_0 2x/a, \\ v_{\text{I}} &= v_{\text{II}} = v_{\text{III}} = -u_0 \lambda y/b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x\text{I}} &= \sigma_{x\text{II}} = \sigma_{x\text{III}} = \sigma_0, \\ \sigma_{y\text{I}} &= \sigma_{y\text{II}} = \sigma_{y\text{III}} = \tau_{\text{I}} = \tau_{\text{II}} = \tau_{\text{III}} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

となり、単純引張状態を表わすことが確かめられる。他方、(38)' 式において、

$$\beta=0, A=(-1)^m u_0/\pi m \dots\dots\dots (54)$$

とおくと、

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{I}}/u_0 &= 1 + (-1)^m/\pi m \cdot \sin \mu x \cos \mu \lambda y, \\ v_{\text{I}}/\lambda u_0 &= -(-1)^m/\pi m \cdot \cos \mu x \sin \mu \lambda y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

を得るが、特に引張端； $x=a/2$ にて

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{I}}(y) &= u_0, \quad (\text{一定}) \\ v_{\text{I}}(y) &= -u_0 \frac{(-1)^m}{\pi m} \sin \pi m \frac{2y}{b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)'$$

となる。これは m 大なるとき引張端が固定されている状態に対する近似境界条件を意味する。

(39)', (40)' 式より同様にして

$$\frac{u_{\text{II}}}{u_0} = 2 \frac{2x}{a}, \quad \frac{v_{\text{II}}}{\lambda u_0} = -\frac{2y}{b} \dots\dots\dots (56)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{\text{III}}}{u_0} &= \frac{1}{2} + \frac{2x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{(-1)^m}{2\pi m} \sin \mu(x+\lambda y), \\ \frac{v_{\text{III}}}{\lambda u_0} &= -\frac{1}{2} + \frac{2x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{(-1)^m}{2\pi m} \sin \mu(x+\lambda y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

と計算される。第 2 図に $m \rightarrow \infty$ に対する変位成分の分布を示した。各領域は直線形変位をなすことおよび R-I は剛体状態になる点興味がある。

さらに、(42)~(50) 式および (54) 式より、この場合の応力成分は次のように整理される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{x\text{I}}}{\sigma_0} &= \frac{1}{2} + (-1)^m \frac{3}{2} \cos \mu x \cdot \cos \mu \lambda y - m\pi (-1)^m \left[4 \frac{\lambda y}{a} \cos \mu x \sin \mu \lambda y - \sin \mu x \cos \mu \lambda y \right], \\ \frac{\sigma_{x\text{II}}}{\sigma_0} &= \frac{3}{2} + (-1)^m \frac{1}{2} \cos \mu x \cos \mu \lambda y, \\ \frac{\sigma_{x\text{III}}}{\sigma_0} &= 1 + (-1)^m \left[\frac{3}{4} \cos \mu(x+\lambda y) + \frac{1}{4} \cos \mu(x-\lambda y) + \frac{\pi m}{2} \left(1 - \frac{4\lambda y}{a} \right) \sin \mu(x+\lambda y) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{y\text{I}}}{\sigma_0} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (-1)^m \cos \mu x \cos \mu \lambda y - (-1)^m \pi m \frac{4\lambda y}{a} \cos \mu x \cdot \sin \mu \lambda y + (-1)^m \pi m \sin \mu x \cdot \cos \mu \lambda y, \\ \frac{\sigma_{y\text{II}}}{\sigma_0} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (-1)^m \cos \mu x \cdot \cos \mu \lambda y, \\ \frac{\sigma_{y\text{III}}}{\sigma_0} &= \frac{\pi m}{2} (-1)^m \left(1 - \frac{4\lambda y}{a} \right) \sin \mu(x+\lambda y) + \frac{1}{2} (-1)^m \sin \mu x \sin \mu \lambda y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{\text{I}}}{\sigma_0} &= (-1)^m \pi m \frac{4\lambda y}{a} \sin \mu x \cos \mu \lambda y - \pi m (-1)^m \cos \mu x \sin \mu \lambda y + (-1)^m \frac{1}{2} \sin \mu x \sin \mu \lambda y, \\ \frac{\tau_{\text{II}}}{\sigma_0} &= \frac{1}{2} (-1)^m \sin \mu x \sin \mu \lambda y, \\ \frac{\tau_{\text{III}}}{\sigma_0} &= -\frac{1}{2} (-1)^m \pi m \left(1 - \frac{4\lambda y}{a}\right) \sin \mu(x + \lambda y) + \frac{1}{2} (-1)^m \sin \mu x \sin \mu \lambda y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

以上の応力表示式をみると R-I での応力の変動は R-III を経て R-II に至るにつれて次第に減衰し、一様応力状態に漸近するようすが看取される。特に、 $m=3$ なる場合について、これらの模様を第3図に示した。

さて、(42), (45), (48) 式の σ_x の表式から引張力 P を計算すると、

$$P = 2 \int_0^{b/2} \sigma_x dy = \left[1 + \frac{3}{4} \beta (-1)^m + \frac{A}{u_0} \frac{\pi m}{2} (-1)^m \right] b \sigma_0 \dots\dots\dots (61)$$

となる。ここで (54) 式の場合 $P = 1.5 b \sigma_0$ となるので、平均応力 σ_M は

$$\sigma_M = 1.5 \sigma_0 \dots\dots\dots (62)$$

に当る。 σ_0 が平均応力に一致しないのは、 σ_0 の定義式において $2u_0/a$ が平均ひずみになっていないことを意味する。

さて、以上の解析において $m \rightarrow \infty$ とすると変位成分は収束するが、応力成分は発散する傾向があることに注意せねばならない。

11. 有効ヤング率

中心線 x 軸上、 $\pm x$ なる位置に2本の標線を立てその2点間の平均引張ひずみ $\epsilon_M(x)$ と引張荷重 P による平均引張応力 σ_M に対して以下のように有効ヤング率 $E^*(x)$ を定義しよう。

$$E^*(x) \equiv \frac{\sigma_M}{\epsilon_M(x)} \dots\dots\dots (63)$$

ここで、 m が比較的大なるときを考え、 u_{I} , u_{II} に対する (55)', (56) 式を用いれば、

$$\epsilon_M(x) = \frac{u(x)}{x} = \begin{cases} \frac{u_{\text{I}}}{x} = \frac{u_0}{x} & \left(\frac{a}{4} \leq x \leq \frac{a}{2} \right) \\ \frac{u_{\text{II}}}{x} = \frac{4}{a} u_0 & \left(0 \leq x \leq \frac{a}{4} \right) \end{cases}$$

したがって、(51) 式； $\sigma_0/u_0 = 2E_x/a$ および (62) 式を考慮すれば、

$$(i) \quad \frac{a}{4} \leq x \leq \frac{a}{2}; \quad \frac{E_x^*}{E_x} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_0 x}{u_0} = \frac{3x}{a},$$

$$(ii) \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{4}; \quad \frac{E_x^*}{E_x} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{u_0} \frac{a}{4} = \frac{3}{4}$$

と表わされる。これを図示すると第4図のごとくなる。定義より E_x^* は実験値を意味するから、実験によ

って E_x を決定するためには、このような試験片および拘束条件に対しては標線を原点から $\pm a/3$ のところに設定せねばならないことになる。

12. 結 論

二重双曲形弾性板の混合境界値問題の一例として、長方形板の非一様引張問題を解析した。

特性曲線および境界線によってかこまれた小領域についての解を、特性曲線に沿う応力変位の連続条件によって結合する解析方式は、従来の円形弾性体に比べて特異なものである。

また、変位および応力分布をみると、小区域間の境界線(特性曲線)上で連続であるがなめらかでない点興味がある。更に境界附近における応力分布の変動は内部に行くにつれて

第2図 固定端場合の変形

(a) σ_x/σ_0 分布 ($m=3$) (b) σ_y/σ_0 分布 ($m=3$) (c) τ/σ_0 分布 ($m=3$)

第 3 図

第 4 図 E_x^*/E_x 曲線

次第に減衰する性質のあることが本例を通して吟味された。

なお、本例の変形（第 2 図参照）を実験的に検証することははなはだ興味ある課題であり、近く実施したいと思う。

本稿を終えるに当たり、日ごろ御激励と有益なる示唆を賜わっている東京大学航空学教室 林 毅教授に謝意を表するものである。

文 献

- (1) 赤坂, 中央大学工学部研究報告, B-4, 9 (昭和 34-4), 1.