文 献

- (1) W. Nusselt, *Forsch. Geb. Ing.-Wesen.*, Ht. 264(1923).
- (2) G. Eichelberg, *Engineering*, **148** (1939), 463 & **149** (1940), 267.
- (3) G. Eichelberg, *Forsch. Geb. Ing.-Wesen.*, Ht. 300 (1928), 61.
- (4) K. Hug, *Mitt. Inst. Thermodyn. u. Verbrennungsmotorenbau*, **1**(1937), Eidg. Technische Hochschule in Zürich.

- (5) M.A. Ibrahim, *Mitt. Inst. Thermodyn. u. Verbrennungsmotorenbau*, **5** (1945), Eidg. Technische Hochschule in Zürich.
- (6) H. Kocak, *Mitt. Inst. Thermodyn. u. Verbrennungsmotorenbau*, **9** (1950), Eidg. Technische Hochschule in Zürich.
- (7) K. Elser, *Mitt. Inst. Thermodyn. u. Verbrennungsmotorenbau*, **15** (1954), Eidg. Technische Hochschule in Zürich.
- (8) 原, 小栗, 機械学会論文集, **24**, 148 (昭 33-12), 991.

621.43.016.4:536.242

内燃機関における周期的熱伝達について*

(第 3 報, 作業ガス内の伝熱理論)

小 栗 達**

Periodic Heat Transfer in Internal Combustion Engines

(Part 3, Theory of Heat Conduction in the Working Gases)

by TATSU OGURI

There exist a great many theoretical researches on the periodic heat transmission in the internal combustion engines. Many of them discuss the problem only from the point of view of heat conduction in the solid wall, but there are few reports on the theory of heat conduction in the working gases. H. Pfriem and K. Elser have derived the energy equation of the gases especially in the boundary layer near the cylinder wall and solved it. But they have calculated only the heat transferred from the gas space to the wall under the condition that there were not any heat sources in the gases and the adiabatic compression and expansion were repeated.

It is the object of the present paper to introduce the term of heat quantity in the energy equation by applying the conception of the polytropic change. By this means we can calculate the heat flow from the gases to the combustion chamber wall, when the gas cycle is quite similar to the spark-ignition engine. In the latter part of the present report, the numerical calculation is achieved, and the calculated results are compared with my experimental results.

1. 緒 論

内燃機関における伝熱問題の理論的研究としては燃焼室周壁内の固体熱伝導論がいち早く発展し, わが国でも小林 明 教授ら⁽¹⁾の詳細な論文があるが, 作業ガス内の伝熱理論にはいまだ未開発の点が多い. この種研究の最初の試みはヘルツフェルト (A. Herzfeld)⁽²⁾によってなされあまり見るべき成果はあがらなかったが, プリーム (H. Pfriem)^{(4)~(6)}の出現によって著しく進歩した. 彼は作業ガスの非定常熱伝達について広範囲の研究を行ってこの分野の基礎を固めた. ついで

エルザ (K. Elser)^{(9)~(10)}がプリームの考えを補足した解を求め, 自身の実験結果と比較できるようになった. しかしこれら両者の研究はいずれもガス内部に熱発生がなく断熱圧縮, 断熱膨脹を繰返す半無限ガス空間ないし有限ガス空間から, これに接する金属冷却壁へ伝達される熱量を扱うだけに終わった.

本研究の目的は前二者の研究成果を拡張し, 実際の内燃機関サイクルに近い状態変化をするガス空間から金属冷却壁に伝達される熱量を理論的に算出せんとするものである. 計算の対象は圧縮, 膨脹の両行程に限られ, ガスの状態変化は下死点から上死点に向って断熱圧縮を受けた後上死点付近で定積変化に近い熱発生があり, 膨脹行程はやはり断熱という過程である. これをポリトロプ指数の変化に置き換えて解くことを

* 昭和 33 年 10 月 27 日 東京秋期講演大会, 昭和 34 年 4 月 3 日 第 36 期通常総会講演会および昭和 34 年 6 月 30 日 第 666 回講演会において講演, 原稿受付 昭和 34 年 7 月 1 日.

** 正員, 横浜国立大学工学部 (横浜市南区大岡町 702).

行った。

本論の後半は計算例で、前報⁽²⁾に示した火花点火機関の実験諸元を用い数値計算を行ったことの報告である。

2. 基礎方程式の誘導

使用記号をつぎのように決める。

j : 問題にしているガス素片単位重量あたりのエンタルピー kcal/kg, $v=1/\rho$: 同じくガス素片の比体積 m^3/kg , p : ガス圧力 kg/m^2 , T : 温度 $^\circ\text{K}$, c_p : ガスの定圧比熱 kcal/ $^\circ\text{C}$ kg, κ : 断熱指数, n : ポリトロップ指数, A : 仕事の熱当量 kcal/kg-m, R : ガス定数 $\text{kg-m}/^\circ\text{K}$ kg, W : ガス素片内部熱源による単位時間、単位容積あたりの熱発生 kcal/ m^3h , ω : 角周波数 rad/h, t : 時間 h, i : 虚数単位。

基礎方程式誘導にあたりまず次の仮定を置く。

- (a) ふく射による伝熱を無視する。
- (b) 作業ガスを完全ガスとみなす。
- (c) ガスから固体壁への熱伝達にあたって重要な過程は壁に接する薄い境界層の中で行われ、その層の厚さは壁面の曲率半径に比して十分に小さい。したが

って壁は平面と考えられ、ガスは壁のない側に無限のひろがりを持つものとする。

(d) 直角座標の x 軸を壁面垂直の外向き方向、 y 軸、 z 軸を壁面平行方向にとると、ガス素片は密度変化に伴う x 軸方向の運動 w_x のみが可能で、 y 軸、 z 軸方向の速度成分 w_y, w_z は w_x に比して無視できる大きさとする。したがって吸入、排気両行程のごときガス交換時期で、壁面に平行方向のガス流速が大なりと予想される時期を研究対象から除外する。

(e) ガス空間内には場所的に圧力差の生ずる現象たとえばデトネーションの発生などないものとし、圧力は時間のみの関数である。

(f) 壁面からの距離大にしてその影響を受けない一様ガス空間内では指数 n のポリトロップ変化が行われる。壁面に近づくにつれ漸次一様ガスの温度と異なりついに壁表面で壁面温度になる。

(g) ポリトロップ指数 n は時間（またはクランク角）のみの関数で、上死点前後の短期間で十分大きな絶対値を有し他の大部分で $n=\kappa$ となる。

これらを前提としガス素片単位重量について次のエネルギー式を得る。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x + w_x \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_x = \frac{v}{c_p} \left[\left\{ \frac{\partial \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} \right\}_t + W(x, t) \right] \quad (1)$$

この式は w_x 項の存在によってなお複雑であるが通常用いている空間座標の代りに実質点座標 (Massenpunkt koordinate, Lagrangesche Koordinate) を使用することによってその困難からは解放される。ある特定のガス素片を実質点座標 ξ によって表わすならば (1) 式は次の形をとる。この際、我々は問題のガス素片と一緒に運動するものと考えねばならぬ。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_\xi - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\xi = \frac{v}{c_p} \left[\left\{ \frac{\partial \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} \right)}{\partial \xi} \right\}_t \left(\frac{d\xi}{dx} \right) + W(x, t) \right] \quad (2)$$

壁面に平行な平面的形状を有する不変量のガス素片を想像しその厚さを dx とするならば、これはガスの比体積に比例する量である。したがって任意に選定できる不変の基準状態におけるそのガス層の厚さを $d\xi$ とすれば

$$d\xi/dx = v_1/v \quad (3)$$

なる関係がある。ただし添数 1 は基準状態の諸量につけられる。ゆえに (2) 式は次の形となる。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_\xi - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\xi = \frac{v}{c_p} \left[\frac{v_1^2}{v} \left\{ \frac{\partial \left(\frac{\lambda}{v} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} \right\}_t + W(x, t) \right] \quad (4)$$

更に $W(\xi, t) = v W(x, t)$ kcal/kg h とおき、ガス素片単位重量あたりの熱発生を表わすことにすれば (4) 式は

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_\xi - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\xi = \frac{v_1^2}{c_p} \frac{\partial \left(\frac{\lambda}{v} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} + \frac{1}{c_p} W(\xi, t) \quad (5)$$

となるが、指数 n を用いた

$$\sigma = \frac{T}{T_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-(n-1)/n} \quad (6)$$

を導入することにより従属変数を 1 個にできる。この σ は一般に時間と場所の関数である。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \frac{1}{T_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-(n-1)/n} \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{T_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-(n-1)/n} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{T_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-(n-1)/n} \left\{ -\frac{n-1}{n} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{n^2} \frac{\partial n}{\partial t} \ln \left(\frac{p}{p_1} \right) \right\} \dots (7b)$$

n にはオットーサイクルに近い変化を与える。すなわち一様ガス空間内の状態変化が上死点附近を除く圧縮および膨張の両行程にて断熱変化 ($n=\kappa$) であり、上死点附近では定積変化に近い熱発生があるものとする(第 1 図)。この際 n の絶対値はかなり大きな値に達し、その t に対する変化割合が n と同じオーダーにとどまるものと仮定すれば (7b) 式最後の項を省略できる。

$$\therefore \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{T_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-(n-1)/n} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{n-1}{n} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \dots (8)$$

また熱発生項に対して ξ に無関係に次の表現ができると仮定する。

$$W(\xi, t) = \frac{n-\kappa}{n-1} c_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{kcal/kg h} \dots (9)$$

すなわち一様ガス空間 $\partial T / \partial \xi = 0$ では指数 n のポリトロップ変化を起す一様分布の熱発生であり、壁面に近づくにつれて一様温度からかたよると場所的に異なる複雑な熱発生となる。(9) 式によって (5) 式を変形する。

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{n-1}{n} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{n-1}{n} \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{v_1^2}{c_p} \frac{\partial \left(\frac{\lambda}{v} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi}$$

両辺に $(1/T_1) (p/p_1)^{-(n-1)/n}$ を乗じ (7a), (8) 式を利用すると次式が得られる。

$$\frac{p_1}{p} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\kappa(n-1)}{n(\kappa-1)} \frac{v_1 T_1}{c_p} \frac{\partial \left(\frac{\lambda}{T} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} \dots (10)$$

この一般に非線形の二階微分方程式が実質点座標内でうずなし完全ガスの平面温度場を表わしている。ここで $n=\kappa$ とおけば $W(\xi, t)=0$ に相当し、プリームならびにエルザの基礎方程式と完全に一致する。

3. 方程式線形化の仮定

(10) 式の誘導にあたってはガス空間を平面状態場と仮定し、ガス素片層は互に入り乱れることなく平行位置を維持しつつ運動し、うずはないものとしている。しかし実際のシリンダ内ガスはか動運動をすると想像

されるから、なんらかの形でその影響を採り入れるべきである。ここでは熱伝導率に考慮を加えあわせて方程式の線形化にも役立たせる。

ガスのか動により、温度こう配に純熱伝導率を乗じた値以上の熱量が伝達されるであろうと想像し、か動ガスみかけの熱伝導率 λ を分子熱伝導率 λ_m とか動に原因する部分 λ_t との和であると評価す。

$$\lambda = \lambda_m + \lambda_t = \lambda_m (1 + \lambda_t / \lambda_m) \dots (11)$$

λ_m は広範囲にわたって圧力に無関係であり温度のみの関数であることが知られており、一方 λ_t は壁面からの距離に関係するものと見てよい。 λ_t について種々試みた結果⁽¹¹⁾、エルザが採った仮定を踏襲することにした。すなわち

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{T}{T_1} \left\{ 1 + \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-1/2} \frac{\xi}{\xi_1} \right\} \dots (12)$$

λ_1 は基準状態 1 におけるガスの分子熱伝導率であり、 ξ_1 は圧力 p が基準圧力 p_1 の時にか動に原因する熱伝導の分が分子熱伝導に等しくなるような壁面距離との意義がある。 ξ の代りに新しい無次元の座標 ζ を次式

$$\zeta = 1 + \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-1/2} \frac{\xi}{\xi_1} \dots (13)$$

により定義し (10) 式を変形する。

$$\frac{p_1}{p} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\kappa(n-1)}{n(\kappa-1)} \frac{v_1 T_1}{c_p} \frac{\partial \left(\frac{\lambda_1}{T_1} \zeta \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$$

(13) 式からは $\partial \zeta / \partial \xi = (1/\xi_1) (p/p_1)^{-1/2}$ が得られ、 c_p が不変で基準状態における値 c_{p1} に等しいとすれば

第 1 図

$$\frac{1}{a_1} \frac{n(\kappa-1)}{(n-1)\kappa} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{\xi_1^2} \left(\zeta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \right) \quad \dots\dots\dots(14)$$

ただし $a_1 = \lambda_1 v_1 / c_{p1}$ m^2/h は基準状態 1 におけるガスの温度伝導率である。

4. 熱 流

ガスから壁に向かって流れる熱量(すなわち x の負の方向)を正にとれば, ある任意のガス層素片 ξ における熱流の瞬時値 q は次式で表わされる。

$$q = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

(3), (6), (12) および (13) の諸式を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1 \zeta}{\xi_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1/2} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \\ &= \frac{\lambda_1 T_1 \zeta}{\xi_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1/2 + (n-1)/n} \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

壁表面における値は $\zeta=1$ において求められる。

$$\begin{aligned} q_w &= \frac{\lambda_1}{\xi_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1} \\ &= \frac{\lambda_1 T_1}{\xi_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1/2 + (n-1)/n} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1} \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

5. 周期的状態場に対する解

(14) 式を次の境界条件のもとに積分する。

$$\zeta \rightarrow \infty \text{ にて } T \propto p^{-(n-1)/n} = T_1 p_1^{-(n-1)/n}$$

$$\zeta \rightarrow 1 \text{ にて } T = T_w$$

定常部分の特解は $\zeta(\partial^2 \sigma / \partial \zeta^2) + (\partial \sigma / \partial \zeta) = 0$ からまず $\sigma_I = \text{const.}$ が得られる。この定数を 1 とおけば

$$T p^{-(n-1)/n} = T_1 p_1^{-(n-1)/n}$$

すなわち純然たるポリトロプ変化となり, 温度と圧力とが壁面からの距離に無関係の結合をしている。

$\zeta \rightarrow \infty$ の条件はこの解で満足される。つぎの特解として $\sigma_{II} = K \ln \zeta$ すなわち

$$\frac{T}{T_1} = K \left(\frac{p}{p_1} \right)^{(n-1)/n} \ln \left\{ 1 + \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-1/2} \frac{\xi}{\xi_1} \right\}$$

これによれば任意の壁面距離における熱流 q は (15) 式から次式で表わされる。

$$f(t) = F(\omega t) = 1 + \frac{\varepsilon}{\pi(\kappa-1)} + \frac{2}{\pi(\kappa-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin m\varepsilon \cos m\omega t \quad \dots\dots\dots(20)$$

ゆえに (18) 式の解は

$$\chi = e^{-i\alpha_1 \beta^2 \{ (1 + \varepsilon/\pi(\kappa-1))t + 2/\{\omega\pi(\kappa-1)\} \sum_{m=1}^{\infty} 1/m^2 \sin m\varepsilon \sin m\omega t \}} \quad \dots\dots\dots(21)$$

つぎに ϕ については $z = 2\beta\xi_1\sqrt{i\zeta}$ と置くことによって

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\phi}{dz} + \phi = 0$$

第 2 図

$$q = (K\lambda_1 T_1 / \xi_1) (p/p_1)^{1/2 + (n-1)/n}$$

すべてのガス素片における q が壁面距離に無関係に同一となる。しかし $\zeta \rightarrow \infty$ まで延びるガス空間を考えているので, 温度が有限にとどまるべきことから積分定数 $K=0$ とする。

非定常項を入れた積分については

$$\sigma(\zeta, t) = \phi(\zeta)\chi(t)$$

とおく。

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} \frac{n(\kappa-1)}{(n-1)\kappa} \frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{dt} \\ = \frac{1}{\xi_1^2 \phi} \left(\zeta \frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} + \frac{d\phi}{d\zeta} \right) \quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

各辺を定数と置くにあたり, 周期的解を求めていることから $-i\beta^2$ とする。

$$\frac{1}{a_1} \frac{n(\kappa-1)}{(n-1)\kappa} \frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{dt} = -i\beta^2 \quad \dots\dots\dots(18)$$

$n(\kappa-1)/\{(n-1)\kappa\}$ は時間 t h またはクランク角 ωt rad の関数である。

$$f(t) = \frac{(n-1)\kappa}{n(\kappa-1)} = F(\omega t) \quad \dots\dots\dots(19)$$

と置きこの関数をフーリエ展開する。ガス空間における熱発生が機関上死点の前後対称に ε rad であるとし, n の変化が第 1 図のごとくであれば $F(\omega t)$ は第 2 図で示される。厳格に言えば上死点 $\omega t=0$ は除外すべきであるが, これを含めた関数として取扱う。

と表わされる零次のベッセル方程式となる。その一般解を $\phi = Z_0(2\beta\xi_1\sqrt{i\zeta})$ と示せば

$$\sigma_{\text{III}} = Z_0(2\beta\xi_1\sqrt{i\zeta})e^{-i\alpha_1\beta^2\left[\left\{1+\varepsilon/\pi(\kappa-1)\right\}t+2/\left\{\omega\pi(\kappa-1)\right\}\sum_{m=1}^{\infty}1/m^2\sin m\varepsilon\sin m\omega t\right]}$$

解を総合して次式を得る。

$$\sigma = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} Z_0(2\beta_{\nu}\xi_1\sqrt{i\zeta})e^{-i\alpha_1\beta_{\nu}^2\left[\left\{1+\varepsilon/\pi(\kappa-1)\right\}t+2/\left\{\omega\pi(\kappa-1)\right\}\sum_{m=1}^{\infty}1/m^2\sin m\varepsilon\sin m\omega t\right]} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ガス空間内状態は機関の熱力学的サイクルにつれて周期的変動をするので、周期 2π rad として $\nu\omega t$ のフーリエ級数に展開できる。(22) 式の周期的解をそれに結びつけるために β_{ν} に次の関係を与える。ただし四サイクル機関においては吸入、排気両行程を除外して圧縮、膨脹両行程だけが繰返されるとする。

$$a_1\beta_{\nu}^2\left\{1+\frac{\varepsilon}{\pi(\kappa-1)}\right\} = \nu\omega \quad (\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\dots\dots) \quad \dots\dots\dots (23)$$

周期的解の意味は固体壁の影響によってガス空間温度場がポリトロプ変化よりいかにたよるかを示すものであり、壁面より大きくへだたった地点 $\zeta \rightarrow \infty$ にて消失すべき性質を持つ。したがってハンケル関数表示をとり (22) 式を次のように書く。

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{T}{T_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-(n-1)/n} \\ &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} H_0^{(1)} \left(2\xi_1 \sqrt{\frac{i\nu\omega\zeta}{a_1} \frac{\pi(\kappa-1)}{\pi(\kappa-1)+\varepsilon}} \right) e^{-i\nu\left[\omega t+2/\left\{\pi(\kappa-1)+\varepsilon\right\}\sum_{m=1}^{\infty}1/m^2\sin m\varepsilon\sin m\omega t\right]} \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\nu} H_0^{(2)} \left(2\xi_1 \sqrt{\frac{-i\nu\omega\zeta}{a_1} \frac{\pi(\kappa-1)}{\pi(\kappa-1)+\varepsilon}} \right) e^{i\nu\left[\omega t+2/\left\{\pi(\kappa-1)+\varepsilon\right\}\sum_{m=1}^{\infty}1/m^2\sin m\varepsilon\sin m\omega t\right]} \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここに

$$\Psi = 2\xi_1 \sqrt{\frac{\omega}{a_1} \frac{\pi(\kappa-1)}{\pi(\kappa-1)+\varepsilon}} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\Theta(\theta) = \omega t + \frac{2}{\pi(\kappa-1)+\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin m\varepsilon \sin m\omega t = \theta + \frac{2}{\pi(\kappa-1)+\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin m\varepsilon \sin m\theta \quad \dots\dots\dots (26)$$

とおく。 $\zeta \rightarrow \infty$ において

$$\sigma_{\infty} = (T_{\infty}/T_1) (p/p_1)^{-(n-1)/n} = 1$$

であるから (24) 式を σ_{∞} で割ることにより次式を得る。

$$T/T_{\infty} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} H_0^{(1)} (\Psi\sqrt{\nu i\zeta}) e^{-i\nu\Theta(\theta)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\nu} H_0^{(2)} (\Psi\sqrt{-\nu i\zeta}) e^{i\nu\Theta(\theta)} \quad \dots\dots\dots (27)$$

この式は任意の壁面距離にあるガス層温度 T を T_{∞} との比で表わしている。壁面温度 T_w は $\zeta=1$ から容易求められる。

$$T_w/T_{\infty} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} H_0^{(1)} (\Psi\sqrt{\nu i}) e^{-i\nu\Theta(\theta)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\nu} H_0^{(2)} (\Psi\sqrt{-\nu i}) e^{i\nu\Theta(\theta)} \quad \dots\dots\dots (28)$$

つぎにこれらを物理的意義のある実数形式に改める。 U_{ν} , V_{ν} を定数とし

$$A_{\nu} = (U_{\nu} - iV_{\nu})/2, \quad B_{\nu} = (U_{\nu} + iV_{\nu})/2$$

とおけば

$$H_0^{(1)} (\Psi\sqrt{\nu i\zeta}) = R_{\nu} H_0^{(1)} (\Psi\sqrt{\nu i\zeta}) + iI_{\nu} H_0^{(1)} (\Psi\sqrt{\nu i\zeta})$$

$$H_0^{(2)} (\Psi\sqrt{-\nu i\zeta}) = R_{\nu} H_0^{(1)} (\Psi\sqrt{\nu i\zeta}) - iI_{\nu} H_0^{(1)} (\Psi\sqrt{\nu i\zeta})$$

であるから (27) 式は

$$\begin{aligned} T/T_{\infty} &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\{U_{\nu} R_{\nu} H_0^{(1)} (\Psi\sqrt{\nu i\zeta}) + V_{\nu} I_{\nu} H_0^{(1)} (\Psi\sqrt{\nu i\zeta})\} \cos \nu\Theta(\theta) \right. \\ &\quad \left. + \{U_{\nu} I_{\nu} H_0^{(1)} (\Psi\sqrt{\nu i\zeta}) - V_{\nu} R_{\nu} H_0^{(1)} (\Psi\sqrt{\nu i\zeta})\} \sin \nu\Theta(\theta) \right] \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

また (28) 式は次のように変形される。

$$T_w/T_\infty = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\{U_\nu R_e H_0^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i}) + V_\nu I_m H_0^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i})\} \cos \nu\theta(\theta) + \{U_\nu I_m H_0^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i}) - V_\nu R_e H_0^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i})\} \sin \nu\theta(\theta) \right] \dots\dots\dots (30)$$

熱流密度を求めるには(29)式から

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2} \frac{T_\infty \Psi}{\sqrt{\zeta}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\nu} \left[\{U_\nu R_e \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i \zeta}) + V_\nu I_m \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i \zeta})\} \cos \nu\theta(\theta) + \{U_\nu I_m \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i \zeta}) - V_\nu R_e \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i \zeta})\} \sin \nu\theta(\theta) \right]$$

(15)式を用いる

$$q = -\lambda_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1/2} T_\infty \sqrt{\frac{\omega}{a_1} \frac{\pi(\kappa-1)\zeta}{\pi(\kappa-1)+\varepsilon}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\nu} \left[\{U_\nu R_e \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i \zeta}) + V_\nu I_m \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i \zeta})\} \cos \nu\theta(\theta) + \{U_\nu I_m \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i \zeta}) - V_\nu R_e \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i \zeta})\} \sin \nu\theta(\theta) \right] \dots\dots\dots (31)$$

壁面熱流は上式において $\zeta=1$ とおけば求められる。熱伝達率を $\alpha = q_w/(T_\infty - T_w)$ と定義すれば次式を得る。

$$\alpha = -\lambda_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1/2} \frac{1}{1 - (T_w/T_\infty)} \sqrt{\frac{\omega}{a_1} \frac{\pi(\kappa-1)}{\pi(\kappa-1)+\varepsilon}} \times \sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\nu} \left[\{U_\nu R_e \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i}) + V_\nu I_m \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i})\} \cos \nu\theta(\theta) + \{U_\nu I_m \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i}) - V_\nu R_e \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i})\} \sin \nu\theta(\theta) \right] \dots\dots\dots (32)$$

6. 数値計算例

前報に示した四サイクル単シリンダ、はん用火花点火機関についての実験諸元を用いて数値計算を行う。機関回転数 850 rpm で圧縮、膨脹だけを繰返すものとし $\omega = 89.01 \times 3600$ rad/h とおく。

6.1 $\theta(\theta)$ について (26)式により $\theta(\theta)$ と θ との関係を求める。断熱指数は圧縮側と膨脹側の平均をとって 1.29, 熱発生時期を上死点について対称としクランク角表示で $2\varepsilon = 20^\circ = 0.3490$ rad とす。 $\nu=35$ までの計算で第3図を得た。

6.2 ξ_1 の決定 本計算に先立って行った予備計算⁽¹²⁾において(12)式の ξ_1 は全くの仮定により 0.1×10^{-3} m とされたが、ここではそれをもとにやや合理的な決定をする。壁面に直接触れているガスの諸量に W をつけて表わすと、基準状態 1 は任意に選べる一定状態であるから温度については $T_1 = T_w$, 圧力 p_1 については指圧線図上で $T_\infty = T_w$ になる時の値をとる。したがって

$a_1 = \lambda_1 / (c_{p1} \gamma_1)$, $\gamma_1 = p_1 / (RT_w)$, $\gamma_w = \gamma_1 p / p_1$, $\lambda_1 = \lambda_w$, $c_{p1} = c_{pw}$ なることを考慮すると

$$a_1 = \{\lambda_w / (c_{pw} \gamma_w)\} (p/p_1) = a_w p / p_1$$

きわめて概略を論ずることにし(32)式の第一次振動項だけとる。

第3図

$$\alpha = \lambda_w \sqrt{\frac{\omega}{a_w}} \sqrt{\frac{\pi(\kappa-1)}{\pi(\kappa-1)+\varepsilon}} \times \left[\frac{\{U_1 R_e \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{i}) + V_1 I_m \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{i})\} \cos \theta(\theta) + \{U_1 I_m \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{i}) - V_1 R_e \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{i})\} \sin \theta(\theta)}{\{U_1 R_e H_0^{(1)}(\Psi\sqrt{i}) + V_1 I_m H_0^{(1)}(\Psi\sqrt{i})\} \cos \theta(\theta) + \{U_1 I_m H_0^{(1)}(\Psi\sqrt{i}) - V_1 R_e H_0^{(1)}(\Psi\sqrt{i})\} \sin \theta(\theta)} \right] \dots\dots\dots (33)$$

前報にならいピストン行程 L を用いて $N_u = \alpha L / \lambda_w$, $P_e' = \omega L^2 / a_w$ とおき, 予備計算により知った定数係数 $U_1 = 0.5090$, $V_1 = 0.5846$ から $U_1 = V_1$ とおくと (33) 式は

$$\frac{N_u}{\sqrt{P_e'}} = \sqrt{\frac{\pi(\kappa-1)}{\pi(\kappa-1)+\varepsilon}} \left\{ \frac{\{R_e \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi \sqrt{i}) + I_m \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi \sqrt{i})\} \cos \Theta(\theta) + \{I_m \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi \sqrt{i}) - R_e \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi \sqrt{i})\} \sin \Theta(\theta)}{\{R_e H_0^{(1)}(\Psi \sqrt{i}) + I_m H_0^{(1)}(\Psi \sqrt{i})\} \cos \Theta(\theta) + \{I_m H_0^{(1)}(\Psi \sqrt{i}) - R_e H_0^{(1)}(\Psi \sqrt{i})\} \sin \Theta(\theta)} \right\} \dots (34)$$

となる。クランク角 $\theta = 0^\circ$ (上死点), 30° , 90° , 120° などについて実測値 $N_u / \sqrt{P_e'}$ を求め, 一方上式右辺の Ψ を広範囲に変化させて計算し実測値と一致する点を見出す。一致点が互に近い Ψ 値でまとまればその Ψ から ξ_1 を求めることができる。第 4 図はこの目的のためえがかれたものでハッチを施した箇所が一致点である。都合の悪いことに同一クランク位置について二箇所またはそれ以上現われるが, 小さい Ψ 値が適当と考えた。一致点は必ずしもよくはまとまらないので中間の $\Psi = 0.10$ を採った。これに対する ξ_1 は $0.0264 \times 10^{-3} \text{ m}$ である。

6.3 壁面熱流密度 燃焼室表面における周期的温度振動の振幅は一様ガス空間内温度変動に比べて著しく小さく無視できる程度である。壁表面に直接触れているガスの温度 T_w を壁面温度に等しいとすればこれも一定値となる。(30) 式の Σ 内は $\Theta(\theta)$ について純然たる調和関数であるから基本振動の 1 周期にわたっての平均値は零となる。したがって

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{T_\infty} d\Theta(\theta) = \frac{1}{T_w} \dots (35)$$

となり, 冷却条件によって異なるであろう壁面温度を考慮する余地が残らず, ガス温度 T_∞ の変化過程から決定されるという重大な欠点を現わした。しかしこの方法によって T_w を求めることにする。前報に示した 4/4 負荷時の T_∞ から $1/T_\infty$ を求めてクランク角 θ 上に図示すれば第 5 図となる。【この関係を (26) 式または第 3 図を介して $\Theta(\theta)$ 上に示したのが第 6 図であり, この図上で T_w を求めると $T_w = 837^\circ \text{ K}$ が得られる。

つぎに T_w/T_∞ を $\Theta(\theta)$ についてフーリエ展開する。ここでは 1 周期 72 等分のフーリエ解析用紙型を用い

$$T_w/T_\infty = 1 + \sum_{\nu=1}^{35} \{a_\nu \cos \nu \Theta(\theta) + b_\nu \sin \nu \Theta(\theta)\} \dots (36)$$

の a_ν , b_ν を得る。これと (30) 式の第 35 次項までの係数をそれぞれ相等しいと置くことにより (U_ν , V_ν) がいっせいに求まる。

$$\left. \begin{aligned} a_\nu &= U_\nu g_\nu + V_\nu h_\nu \\ b_\nu &= U_\nu h_\nu - V_\nu g_\nu \end{aligned} \right\} \dots (37)$$

第 4 図

第 5 図

第 6 図

ただし $g_\nu = R_e H_0^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i})$, $h_\nu = I_m H_0^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i})$, $\nu = 1 \sim 35$
 である。したがって壁面熱流密度は直ちに得られる。

$$q_w = -\lambda_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1/2} T_\infty \sqrt{\frac{\omega}{a_1} \frac{\pi(\kappa-1)}{\pi(\kappa-1)+\varepsilon}} \sum_{\nu=1}^{35} \{C_\nu \cos \nu \vartheta(\theta) + D_\nu \sin \nu \vartheta(\theta)\} \\ = -\lambda_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1/2} T_\infty \sqrt{\frac{\omega}{a_1} \frac{\pi(\kappa-1)}{\pi(\kappa-1)+\varepsilon}} \Phi \quad (38)$$

ただし

$$l_\nu = R_e \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i}), \quad m_\nu = I_m \sqrt{i} H_1^{(1)}(\Psi\sqrt{\nu i}) \\ C_\nu = \sqrt{\nu} (U_\nu l_\nu + V_\nu m_\nu), \quad D_\nu = \sqrt{\nu} (U_\nu m_\nu - V_\nu l_\nu) \\ \Phi = \sum_{\nu=1}^{35} \{C_\nu \cos \nu \theta(\theta) + D_\nu \sin \nu \theta(\theta)\}$$

第1表に計算結果を一括してあげた。また Φ を $\theta(\theta)$ 上に示したのが第7図, θ 上になおしたのが第8図, さらにこれをもとに q_w を求めたのが第9図である。図中に実測値とあるのは前報に示したピストン中央表面での測定値である。

6.4 基礎式の適用範囲 基礎方程式(14)は壁面を基点として十分大きな距離まで成立する。ただし, しばしば言及したように吸入, 排気両行程を除外している。(29)式の温度場式において $\zeta = 2, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 100$ を与え $\theta(\theta) = 0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 60^\circ,$

$\pm 90^\circ, \pm 120^\circ, \pm 150^\circ$ すなわち, それぞれ $\theta = 0^\circ, \pm 7.9^\circ, \pm 37.0^\circ, \pm 72.8^\circ, \pm 108.5^\circ, \pm 144.3^\circ$ について $\sum_{\nu=1}^{35}$ の計算を行い, 結果を第10図に示した。

横軸 ζ 表示のため直観を害するが壁面近傍の温度場を知る参考になる。たとえば $\zeta = 100$ は $\xi_1 = 0.0264 \text{ mm}$ ならば基準圧力 $p = p_1 (6.16 \text{ kg/cm}^2 \text{ abs})$ において $\xi = 2.61 \text{ mm}$ の距離を与える。これ以上の ζ に対する計算は数表の都合で行わないがきわめて平坦な過程をへて T_∞ になるものと思われる。

第 7 図

第 8 図

第 9 図

第 10 図

7. 結 言

(1) 本報告は内燃機関における燃焼室の壁面流入熱量を作業ガス内エネルギー式の解から算出せんとする

研究である。ガスの状態変化を内燃機関サイクルにできるだけ近接させることにつとめ、断熱変化と燃焼による熱発生の過程をポリトロップ指数 n の変化に置き換えて目的を達した。

第 1 表

ν	a_ν	b_ν	g_ν $ReH_0^{(1)}$ $\times (\phi\sqrt{\nu_i})$	h_ν $ImH_0^{(1)}$ $\times (\phi\sqrt{\nu_i})$	U_ν	V_ν	I_ν $Re\sqrt{i}H_1^{(1)}$ $\times (\phi\sqrt{\nu_i})$	m_ν $Im\sqrt{i}H_1^{(1)}$ $(\phi\sqrt{\nu_i})$	C_ν	D_ν
1	-0.2105	-0.6574	0.4946	-1.541	0.3470	0.2480	0.0929	-6.34	-1.5401	-2.2230
2	0.0841	0.2191	0.4902	-1.322	-0.1249	-0.1100	0.1159	-4.47	0.6749	0.8076
3	0.0165	-0.1213	0.4850	-1.193	0.0921	0.0236	0.1308	-3.63	-0.1275	-0.5844
4	0.0555	0.1449	0.4826	-1.103	-0.0918	-0.0904	0.1419	-3.134	0.5406	0.6010
5	-0.0414	-0.0754	0.4792	-1.034	0.0447	0.0607	0.1508	-2.794	-0.3643	-0.2996
6	0.0022	0.0883	0.4759	-0.977	-0.0721	-0.0374	0.1581	-2.541	0.2048	0.4632
7	-0.0473	-0.0727	0.4727	-0.929	0.0416	0.0721	0.1644	-2.342	-0.4286	-0.2892
8	0.0128	0.0432	0.4696	-0.888	-0.0321	-0.0314	0.1698	-2.183	0.1785	0.2133
9	-0.0230	-0.0682	0.4667	-0.851	0.0502	0.0546	0.1746	-2.050	-0.3096	-0.3372
10	0.0303	0.0350	0.4639	-0.819	-0.0165	-0.0464	0.1789	-1.938	0.2751	0.1274
11	-0.0121	-0.0416	0.4610	-0.790	0.0326	0.0343	0.1827	-1.840	-0.1897	-0.2199
12	0.0278	0.0448	0.4584	-0.763	-0.0270	-0.0526	0.1860	-1.756	0.3024	0.1981
13	-0.0217	-0.0221	0.4557	-0.739	0.0085	0.0346	0.1892	-1.680	-0.2037	-0.0750
14	0.0158	0.0387	0.4531	-0.716	-0.0287	-0.0401	0.1920	-1.613	0.2215	0.2021
15	-0.0291	-0.0259	0.4505	-0.696	0.0071	0.0464	0.1947	-1.552	-0.2734	-0.0778
16	0.0143	0.0206	0.4480	-0.6765	-0.0114	-0.0287	0.1970	-1.497	0.1628	0.0908
17	-0.0232	-0.0304	0.4456	-0.6584	0.0153	0.0456	0.1993	-1.447	-0.2593	-0.1286
18	0.0239	0.0146	0.4432	-0.6414	0.0020	-0.0359	0.2013	-1.401	0.2151	0.0187
19	-0.0149	-0.0213	0.4409	-0.6254	0.0116	0.0319	0.2031	-1.359	-0.1787	-0.0968
20	0.0265	0.0199	0.4386	-0.6102	-0.0009	-0.0441	0.2050	-1.320	0.2594	0.0456
21	-0.0188	-0.0104	0.4363	-0.5957	-0.0037	0.0288	0.2066	-1.283	-0.1728	-0.0055
22	0.0189	0.0201	0.4341	-0.5822	-0.0066	-0.0374	0.2081	-1.249	0.2125	0.0750
23	-0.0257	-0.0106	0.4319	-0.5691	-0.0100	0.0376	0.2095	-1.217	-0.2297	0.0206
24	0.0160	0.0107	0.4297	-0.5567	0.0018	-0.0273	0.2109	-1.186	0.1607	0.0176
25	-0.0236	-0.0147	0.4275	-0.5449	-0.0044	0.0398	0.2121	-1.159	-0.2355	-0.0165
26	0.0220	0.0053	0.4254	-0.5335	0.0140	-0.0301	0.2133	-1.132	0.1892	-0.0479
27	-0.0172	-0.0111	0.4234	-0.5227	-0.0033	0.0303	0.2144	-1.107	-0.1782	-0.0145
28	0.0253	0.0080	0.4213	-0.5122	0.0150	-0.0371	0.2154	-1.083	0.2297	-0.0439
29	-0.0187	-0.0034	0.4193	-0.5022	-0.0143	0.0252	0.2164	-1.060	-0.1605	0.0522
30	0.0203	0.0098	0.4173	-0.4926	0.0086	-0.0338	0.2173	-1.038	0.2026	-0.0088
31	-0.0241	-0.0019	0.4153	-0.4833	-0.0224	0.0305	0.2181	-1.017	-0.1999	0.0896
32	0.0169	0.0035	0.4134	-0.4743	0.0134	-0.0240	0.2189	-0.998	0.1522	-0.0458
33	-0.0237	-0.0056	0.4114	-0.4656	-0.0184	0.0345	0.2197	-0.980	-0.2177	0.0603
34	0.0211	-0.0021	0.4095	-0.4572	0.0255	-0.0234	0.2203	-0.961	0.1639	-0.1131
35	-0.0181	-0.0036	0.4077	-0.4492	-0.0158	0.0261	0.2210	-0.944	-0.1662	0.0538

注. 表中の g_ν , h_ν , I_ν および m_ν は下記の書による.

Jahnke und Emde, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven* (1933), 302, B.G. Teubner.

(2) 基礎方程式誘導にあたっては平面状ガス層が互に入り乱れることなく運動すると仮定している. 実際に存在するガスが動の影響を熱伝導率の評価において考慮し, あわせて方程式線形化に役立たせるというのはエルザの論を踏襲するものである.

(3) 運算にあたっては真のクランク角 θ 内で計算する代りに, (26) 式で定義される $\Theta(\theta)$ 内で処理すると計算は著しく簡単で高次項への進展も容易である.

(4) ここに示した例題は第 35 次項までの計算であるが実測値にかなり近づくことができた. 計算による流入熱量の最大値が実測値より低く出るのはふく射を省略していることも原因していると思われる.

(5) 基礎式は壁面より十分離れた地点まで適用領域とするが, 壁面温度 T_w が (35) 式から決定されてしまい, 冷却条件の相異を考慮する余地がないという欠陥を現わした.

(6) 上述の不都合は基礎方程式の積分にあたり特解 $\sigma_{II} = K \ln \zeta$ を不採用にしたことに原因すると思われる. 適用範囲をある範囲に限定する代りに σ_{II} の採

用を可能にすれば, あるいは冷却条件を導入するくふうができるかも知れないがそれは今後に残された問題である.

本研究に御指導賜った東京工業大学 原 正健先生, 計算に御協力下さった泉 儀澄氏に深じんの謝意を表す.

文 献

- (1) 小林, 機械学会論文集, 1, 5 (昭 10-11), 463 にはじまる一連の論文.
- (2) 小栗, 本論文集 1296 ページ.
- (3) A. Herzfeld, *Der Wärmeübergang und die thermodynamische Berechnung der Leistung bei Verbrennungsmaschinen insbesondere bei Kraftfahrzeug-Motoren*, (1925), Julius Springer.
- (4) H. Pfriem, *Ing.-Arch.*, 6(1935), 97.
- (5) H. Pfriem, *Forsch. Ing.-Wesen.*, 10 (1939), 27.
- (6) H. Pfriem, *Forsch. Ing.-Wesen.*, 11 (1940), 67.
- (7) H. Pfriem, *Forsch. Ing.-Wesen.*, 11 (1940), 134.
- (8) H. Pfriem, *Forsch. Geb. Ing.-Wesen.*, Ht. 413, (1942).
- (9) K. Elser, *Mitt. Inst. Thermodyn. u. Verbrennungsmotoren*, 15(1954), Eidg. Technische Hochschule in Zürich.
- (10) K. Elser, *Forsch. Ing.-Wesen.*, 21 (1955), 65.
- (11) 小栗, 泉, 東京秋期講演大会前刷 講演番号 205 (昭 33-10-27).
- (12) 小栗, 第 36 期通常総会講演会前刷 講演番号 521 (昭 34-4-3).