割合は一次と三次では, 形状ねじれ軸が重心に近いほど大きく, 二次では重心から遠ざかるほど(特にせん断中心側に遠ざかるとき)変化は大きい。

(3) 全ねじれ角 θ を一定にして, 形状ねじれ軸位置 (P 点) を変えれば, 一次固有値は P 点が重心に一致した時極大で, 遠ざかるに従い減少する。一方二次, 三次の固有値は P 点が重心に一致した時極小で, 遠ざかるに従い増大するが, その変化は一次固有値ほどではない。

6. 結 言

本報告では, せん断中心と重心とが一致せず, しかも任意の直線軸(形状ねじれ軸)のまわりにねじれた一定断面の棒の振動を片持はりの場合につき解析し, 形状ねじれ軸の位置, せん断中心, 重心の位置ならびにねじれの割合の振動数に及ぼす影響を理論的に求めた。

なお, ここで導びいた基礎振動方程式が実在現象をどの程度表わしているかは実験により検討してみる必要があるが, この点については次回に報告する予定である。

終りに, 本研究にあたり御指導を賜った栖原豊太郎博士に深く感謝いたします。

文 献

- (1) 佐藤, 機械学会論文集, 24, 147(昭 33-11), 866.
- (2) 佐藤, 東京秋期講演大会前刷 講演番号 219(昭 33-10-28).
- (3) R. Kappus, *Luftfahrtforschung*, 14(1937), 444.
- (4) A.E.H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed (1952).
- (5) A. Mendelson & S. Gendler, *NACA Tech. Note*, No. 2300(1951). 本文中には, 重心軸直線でそのまわりにねじれた棒の振動を解析したように記してあるが, 式の形から, せん断中心軸直線でそのまわりにねじれた棒の振動を解析しているものと思われる。

621-185.7:534.014.5

分数調波, “和差調波” 形危険速度の共振曲線*

山 本 敏 男**

Response Curves at the Critical Speeds of Sub-Harmonic and “Summed and Differential Harmonic” Oscillations

by Toshio YAMAMOTO

Lateral vibrations of rotating shaft are recorded, and response curves of sub-harmonic and “summed and differential harmonic” oscillations are experimentally obtained.

Summarizing, the amplitudes of sub-harmonic oscillation of $1/2$ order increase with the magnitudes of eccentricity of rotating body. Shapes of response curves of sub-harmonic oscillations of forward precession are those of hard spring type, and the response curves of soft spring type are obtained for backward precessional whirling motions. For one critical speed of “summed and differential harmonic oscillations, the height of peak decreases as eccentricity increases. The other critical speed has a constant amplitude, even if the magnitude of eccentricity is changed. Shapes of response curves of “summed and differential harmonic” oscillations are either discontinuous response curves with jump phenomena or continuous, according as the nonlinear spring characteristics of shaft are changed.

1. ま え が き

円板をとりつけた軸の両端を単列深みぞ形玉軸受で支持して回転させた場合, 軸両端の二つの軸受台の中心線間のわずかな不一致と玉軸受に存在する“角度の

がた”のため, 軸の横たわみのばね特性に方向性のある非線形性が現われ, その結果として分数調波の危険速度とある特殊な振動様式の旋回運動をする危険速度が発生する⁽¹⁾⁽²⁾. 後者の危険速度は系の任意の二つの自然振動数を p_i, p_j , 軸の回転速度を ω としたとき, $|p_i \pm p_j| = \omega$ の関係をみたす回転数において発生し, 振動数がそれぞれ p_i, p_j である二つの振動が同時に発達して危険速度のピークを形成するという特殊な様

* 昭和 34 年 4 月 3 日 第 36 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 34 年 7 月 8 日.

** 正員, 名古屋大学工学部(名古屋市千種区不老町).

式のものであるので、この種の危険速度をここでありに“和差調波”形の危険速度としたのである。

これらの分数調波，“和差調波”形の危険速度の共振曲線がどのような形をとるか、玉軸受の角度のがたや円板の不つりあい量の変化が、共振曲線にどのような影響を与えるかなどを調べた実験結果を以下に述べる。

2. 実験装置と実験方法

第1図に実験装置の略図を示す。1個の円板をとりつけた水平軸の両端は単列深みぞ形玉軸受のはいつている軸受台でささえられており、光学的に水平、垂直両方向の円板の運動を記録する。円板は直径481.6 mm、厚さ5.51 mm、重さ7.868 kg、直径のまわりの慣性モーメント 1.168 kg cm s^2 のものを用い、軸は軸長が508.3 mm、直径が11.89 mmであり、円板の位置 $a:b$ (第1図参照)は3:7である。なお円板には半径179 mmの所に互に直角な4方向につりあいおもりをとりつけるねじ穴が設けてある。玉軸受は内径10φの単列深みぞ形の6200番のものを使用した。

分数調波，“和差調波”形危険速度は軸のばね特性における方向性のある非線形性が原因で発生し、1)玉軸受の角度のがたの量と、2)左右両軸受台の軸受中心線の不一致の程度と不一致の存在する方向とが変化すれば、このばね特性の非線形性は変ってくる。そこで本実験では、1)玉軸受を交換し、2)軸受台を組立て直すことによりばね特性を変化させて、それらの共振曲線への影響を調べ、さらに3)円板にとりつけるつりあいおもりを加減して不つりあい量の大小(強制力の大小)が共振曲線へ及ぼす影響をも調べた。

第1図の両軸受台に角度のがたがそれぞれ 0.35° 、 0.3° である6個の鋼球のはいつている単列深みぞ形玉軸受を用いたIの場合と、左右の角度のがたがそれぞれ 0.3° 、 0.6° である7個の鋼球よりなる玉軸受を用いたIIの場合の二つの場合につきそれぞれ軸受台を数回組立てなおし、またそれぞれの場合において円板

の不つりあい量をいろいろと変えて実験を行なった。そこでたとえば、II-a-2などの記号で、ある実験を指定することとし、はじめのIIは玉軸受(IIなら角度のがたが左 0.3° 、右 0.6° の場合)の種類を指定し、おわりの数字は不つりあい量が変ればこれをかえ、中央の英字はこれが同じなら同じ軸受台の組立て条件であることを意味することにする。さらに ω の m 倍の旋回速度の前向き才差運動の振動はこれを $[+m\omega]$ で、 ω の n 倍の旋回速度の後向き才差運動の振動は $[-n\omega]$ でこれを示す。また同じ種類の振動は同じマークで図に記入することにする。

3. 実験結果とその考察

第1図の振動系にはそれぞれ2個ずつの前向きと後向き才差運動様式の自然振動数があり⁽³⁾、前者を p_1 、 p_2 ($p_1 > p_2$)、後者を p_3 、 p_4 ($0 > p_3 > p_4$ 、 $|p_4| > |p_3|$) とする(後向き才差運動様式の自然振動数は負の値をとる)。玉軸受を代えたとばね特性が変るため危険速度発生位置も多少変化し⁽²⁾、角度のがたの大きいIIの場合はIに比べて軸の剛性が減じて危険速度は多少低速側へ移行する。

本実験装置では $\omega = p_2$ の関係をみたと $\omega = 1440 \text{ rpm}$ (玉軸受Iの場合)と $\omega = 1360 \text{ rpm}$ (IIの場合)附近に主危険速度 ω_c のピークがあり、 $1/2 \cdot \omega = p_2$ となる $\omega = 2870 \text{ rpm}$ 附近にIIの場合前向き才差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動 $[+1/2 \cdot \omega]$ の危険速度 $\omega_{1/2}$ が現われ、 $\omega = p_2 - p_3$ となる $\omega = 2020 \text{ rpm}$ (Iの場合)と $\omega = 1960 \text{ rpm}$ (IIの場合)附近に“和差調波”形の危険速度 ω_{23} が発生し、 $\omega = p_2 - p_4$ の条件をみたと $\omega = 3250 \text{ rpm}$ (Iの場合)と $\omega = 3100 \text{ rpm}$ (IIの場合)附近に“和差調波”形危険速度 ω_{24} のピークが現われる。以上の各危険速度は同様な実験装置で行なった垂直軸の場合にも発生するが⁽²⁾、多くの垂直軸の実験を通じて発生しなかった後向き才差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動 $[-1/2 \cdot \omega]$ の危険速度が水平軸の本実験においては現われた。すなわち $-1/2 \cdot \omega = p_3$ の関係をみたと $\omega = 1380 \text{ rpm}$ 附近 (I, IIの場合とも)に $[-1/2 \cdot \omega]$ の危険速度 $\omega_{-1/2}$ が発生し、さらにこれより高速側で $-1/2 \cdot \omega = p_4$ となる $\omega = 3500 \text{ rpm}$ (Iの場合)と $\omega = 3300 \text{ rpm}$ (IIの場合)附近に $[-1/2 \cdot \omega]$ の危険速度 $\omega'_{-1/2}$ のピークが現われる。以下本節ではこれらの $\omega_{1/2}$ 、 $\omega_{-1/2}$ 、 $\omega'_{-1/2}$ 、 ω_{23} 、 ω_{24} の各種の危険速度における共振曲線の性質を実験的に調べてみる。

3.1 後向き才差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動 $[-1/2 \cdot \omega]$ の危険速度 $p - \omega$ 曲線をえがくと $p =$

第1図 装置図

第 2 図 低速側の $[-1/2 \cdot \omega]$ の危険速度 $\omega_{-1/2}$ のピーク

$-1/2 \cdot \omega$ の直線は $p_3 - \omega$ と $p_4 - \omega$ の二つの曲線と交わりうるため⁽¹⁾, この種の危険速度は 2 箇所にあられる。

3・1・1 低速側の後向き才差運動の $1/2$ 次分数調波振動の危険速度 $\omega_{-1/2}$ (I, II の場合とも $\omega = -2p_3 = 1380$ rpm 附近) この危険速度のピークは本実験装置では主危険速度 ω_c に非常に接近した位置で発生する。玉軸受 I (角度のがた左 0.35° , 右 0.30°) を用いた場合のこの種の危険速度のピークの実験例を第 2 図に示す。主危険速度 ω_c の最大振幅 A_m がそれぞれ $0.71, 0.68$ mm である第 2 図 (a), (b) では $\omega_{-1/2}$ のピークが主危険速度のやや低速側に現われるが, 円板のつりあいおもりを加減してさらにつりあいを良くし, ω_c での最大振幅 A_m が 0.37 mm である第 2 図 (c) ではこの種の危険速度のピークはもはや発生しない。このように低速側の $[-1/2 \cdot \omega]$ の危険速度 $\omega_{-1/2}$ は円板のつりあい量が小さくなると現われなくなる。軸受台の組立ての状態を第 2 図の実験の状態のままにし, 不つりあい量のみを増減させた I-a 系列の

一連の実験によるこの種のピークの出現の様態を第 1 表に示す。さらに第 2 表に軸受台を組立て直した I-b 系列に対する同様な表を示す。

円板の不つりあい量の大小は主危険速度の最大振幅 A_m をもって示すことにした。 $A_m = 1.00$ mm なら本実験装置では円板の偏心率が約 0.027 mm に相当する。 $\omega_{-1/2}$ は ω_c に接近しているので調和振動 $[+\omega]$ の強制振動の振幅が $\omega_{-1/2}$ のピークの附近で大きいため I-b-5 ($A_m = 1.43$ mm) 以上に大きい不つりあい量の場合について $\omega_{-1/2}$ のピークを観測することは軸が破壊するおそれがあり不可能であった。なお第 2 表中の I-b-5, I-b-6 (それぞれ $A_m = 1.43, 1.30$ mm) の A_m は実測値ではなく, このように不つりあいの大きい場合に主危険速度 ω_c における最大振幅を実測することは不可能であるので, ω_c よりわずかに低速側のある回転数における振幅も A_m に比例するものと仮定し, 他のもっとつりあいがよく A_m が実測できる場合のピークとの比較により推定した値であり (第 10 図参照), A_m の値にアンダーラインをほどこしてこのこ

とを示してある。

$\omega_{-1/2}$ のピークは主危険速度 ω_c に接近しているため大きな振幅の強制振動 $[+\omega]$ が重なり合ってくる(第5図参照)。第2図の振幅は合成振動としての振幅が示されているが、共振曲線を得るためには波形分析により分数調波振動 $[-1/2 \cdot \omega]$ の振幅のみをとりださねばならない。このようにして $[-1/2 \cdot \omega]$ のみの振幅

(a) I-a-2 ($A_m=0.71$ mm)

(b) I-a-3 ($A_m=0.68$ mm) (c) I-a-4 ($A_m=0.62$ mm)

第3図 $\omega_{-1/2}$ における共振曲線と位相角 (I-a 系列)

第1表 $\omega_{-1/2}$ のピークの出現表 (I-a 系列)

実験番号	I-a-1	I-a-2	I-a-3	I-a-4	I-a-5	I-a-6
ω_c の最大振幅 A_m mm	0.76	0.71	0.68	0.62	0.37	0.34
$\omega_{-1/2}$ のピーク	有	有	有	有	無	無

第2表 $\omega_{-1/2}$ のピークの出現表 (I-b 系列)

実験番号	I-b-5	I-b-6	I-b-9	I-b-10	I-b-11	I-b-12	I-b-13	I-b-14	I-b-15
A_m mm	1.43	1.30	0.83	0.80	0.71	0.48	0.40	0.28	0.21
$\omega_{-1/2}$ のピーク	有	有	無	有	無	無	無	無	無

($A_m=0.8$ mm 附近がピークが現われるか現われないかの境である)

の共振曲線を I-a 系列について求めたのが第3図である。ピークの幅が狭いので横座標が拡大されている。第3図 (a) (I-a-2, $A_m=0.71$ mm) では連続的な共振曲線が得られ、第3図 (b), (c) では soft spring 形の不連続な共振曲線となっている。図から明らかに不つりあいの小さいほどピークの最大振幅も小さくなるが、このことは第1, 2表の事実にも照らしてみても当然のことである。第4図に示すように $[-1/2 \cdot \omega]$ の振動のベクトル A が水平方向にきたときのベクトル A と強制振動 $[+\omega]$ のベクトル B との間の位相角を φ とすると、波形分析からえた位相角 φ は第3図 (b), (c) に示すよう変化する。第5図は I-a-3 の場合 ($A_m=0.68$ mm) [第2図 (b), 第3図 (b)] の危険速度 $\omega_{-1/2}$ における振動波形であり、位相の変化の様子がよくわかる。

玉軸受を代えた II の場合 (角度のがたが左 0.3° , 右 0.6°) は、軸のばね特性の変化につれて主危険速度が低速側へ移行し、 $\omega_{-1/2}$ が ω_c のやや高速側に現われる II-a 系列でも不つりあいの大きい II-a-1 ($A_m=1.90$ mm) では $\omega_{-1/2}$ のピークは現われるが、つりあいのよい II-a-2 ($A_m=0.68$ mm) では $\omega_{-1/2}$ のピークはもはや現われない。II-a 系列に比べて軸受台の組立て条件のみが異なる II-b 系列においては II-b-1 ($A_m=0.58$ mm) では $\omega_{-1/2}$ は現われ、つりあいのよい II-b-2 ($A_m=0.15$ mm) では発生しない。これらの事実は I-a, I-b 系列の第1, 2表の事実と同様である。

A: $[-1/2 \cdot \omega]$ のベクトル
B: $[+\omega]$ のベクトル
a, b: 振動の測定箇所
(軸は時計方向に回転する)

第4図

第5図 危険速度 $\omega_{-1/2}$ における振動波形 第6図 高速側の $[-1/2 \cdot \omega]$ の危険速度 $\omega'_{-1/2}$ (II-a 系列)

3.1.2 高速側の後向き才差運動の $1/2$ 次分数調波運動の危険速度 $\omega'_{-1/2}$ (I の場合: $\omega = -2p_4 = 3500 \text{ rpm}$ 附近, II の場合: $\omega = 3300 \text{ rpm}$ 附近) II-a 系列 (角度のがた左 0.3° , 右 0.6°) の実験例を第6図に示す. II-a-1 ($A_m = 1.90 \text{ mm}$), II-a-2 ($A_m = 0.68 \text{ mm}$) とともに soft spring 形の不連続な共振曲線の形となり, いずれも水平方向の振幅がかなり大きい. 第6図から明らかなように A_m が大きいときピークの振幅も大きい. II-a-1 では $\omega = 3320.5 \text{ rpm}$, II-a-2 では $\omega = 3335.1 \text{ rpm}$ で跳躍現象が現われた. 軸受台の組立て条件の異なる II-b-1 ($A_m = 0.58 \text{ mm}$), II-c-1 ($A_m = 1.20 \text{ mm}$) でも第6図と同じような共振曲線が得られた.

第6図において水平, 垂直両方向の間に振幅の差があるのは軸剛性が両方向でかなり異なるためである. 前述したように単列深みぞ形玉軸受の使用と左右両軸受中心線のわずかな不一致は単にばね特性に非線形性を与えるのみでなく, ばね定数 (ばね特性の線形項の係数) をも変化させる結果, 方向により剛性が変わって

第7図 $\omega'_{-1/2}$ のピーク (I-a, I-b)

くる。たとえば $\omega=0$ の時の自然振動数を実験的に求めてみると、第6図(II-a 系列)の場合は、水平方向では1225.0 rpm、垂直方向では1083.1 rpm となり、かなり剛性に差があることを示している。このような水平、垂直両方向間の軸剛性の差のために両方向間に振幅差を生じ、軸中心はだ円軌道をえがく旋回運動をする。ただし振幅差は両方向間の剛性の差のみでなく、自然振動数と ω の関数でもあるため、剛性差が同じでも、ある危険速度のピークでは大きな振幅差を示すのに、他のピークではそれほどの差を示さないこと

もある。

玉軸受を異にする I-a, I-b 系列ではこの $\omega'_{-1/2}$ の危険速度はII系列に比べ発生しにくく、第7図に示すように A_m の大きい I-a-2($A_m=0.71$ mm) でも比較的振幅の小さいピークとなり、 $A_m=0.34$ mm である I-a-6 ではピークは現われない。I-b 系列では第7図(b)に示すように A_m の小さい I-b-14($A_m=0.28$ mm) はもちろん非常に A_m の大きい I-b-2($A_m=2.56$ mm) でも $\omega'_{-1/2}$ のピークは現われない。なお第7図(a)の上图(I-a-2)では $\omega=3487$ rpm で跳躍現象を示した。

後向き才差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動 $[-1/2 \cdot \omega]$ の危険速度は低速側の $\omega_{-1/2}$ も高速側の $\omega'_{-1/2}$ も A_m の大きいほどピークの振幅も大きく、共振曲線の形はいずれも soft spring 形の曲線であった。また II 系列の方が I 系列より $\omega'_{-1/2}$ が発生しやすかった。

3・2 前向き才差運動様式の $1/2$ 次分数調波振動 $[+1/2 \cdot \omega]$ の危険速度 $\omega_{1/2}$ 第8図に $\omega_{1/2}$ のピークを示す。この共振曲線は hard spring 形の不連続な共振曲線となる。第8図(b)の II-a-2($A_m=0.68$ mm) に比べて A_m の大きい第8図(a)の II-a-1($A_m=1.90$ mm)の方が振幅が大きくなっており、後向き才差運動の $[-1/2 \cdot \omega]$ の振動のものとこの点では同じ傾向を示す。第8図(a)では $\omega=2872.7$ rpm, (b)では $\omega=2870.7$ rpm で跳躍現象を示す。軸受台の組立て条件の異なる II-b-1($A_m=0.58$ mm)では第9図に示すようにピークの高速側がほとんど垂直に近い連続的な共振曲線となった。高速側の共振曲線はほとんど垂直であり、この部分では同一振幅の状態を保っているのは2~3秒の間だけであり、軸回転数 ω を一定にしても長時間定常振動の状態を続けることがほとんど不可能であった。これは軸回転数 ω のわずかな変動によるものか、あるいは連続的な共振曲線と不連続となる共振曲線の二つの場合の境ともいべき状態の共振曲線であるからなのか、判然としない。

垂直軸の場合には $\omega_{1/2}$ のピークは非常に発生しやすかったのであるが⁽¹⁾、水平軸の今の場合、玉軸受の異なる I-a, I-b 系列では $\omega_{1/2}$ は発生するなら $\omega=3000$ rpm 附近に現われるのであるが、多くの実験を通じてこの種の危険速度は全く発生しなかった。

3・3 “和差調波”形の危険速度 本節では2種の“和差調波”形振動を実験的に調べた。

3・3・1 低速側で発生する“和差調波”形危険速度

第8図 $\omega_{1/2}$ のピーク (II-a 系列)

第9図 $\omega_{1/2}$ のピーク (II-b-1)

第 10 図 “和差調波” 形危険速度 ω_{23} のピーク (I-b 系列)

ω_{23} (I の場合: $\omega = p_2 - p_3 = 2020 \text{ rpm}$ 附近, II の場合: $\omega = 1960 \text{ rpm}$)

第 10 図に I-b 系列の ω_{23} の危険速度の共振曲線を示す。共振曲線は連続的な形であり、左から右へ A_m が小さくなる順にならべてあり、 A_m の減少とともにピークの振幅が大きくなる。この点は $1/2$ 次分数調波の危険速度 $\omega_{1/2}$, $\omega_{-1/2}$, $\omega'_{-1/2}$ とは傾向が逆である。第 10 図左は種々の不つりあい量に対する主危険速度 ω_c における共振曲線であり、図でたとえば 4 の曲線とは I-b-4 ($A_m = 1.59 \text{ mm}$) の場合の共振曲線を意味する。第 3 表はこの種の危険速度のピークの出現表である。

危険速度 ω_{23} における最大振幅 B_m と ω_c における最大振幅 A_m (不つりあい量に比例する) との関係を示す。軸受台の組立て条件の異なる I-a-1 ($A_m = 0.76 \text{ mm}$) では I-b 系列のものに比べ多少ピークの幅の広い共振曲線が得られた。

玉軸受の異なる II 系列では ω_{23} は発生しにくく、II-b-2 ($A_m = 0.15 \text{ mm}$) であり A_m が小さく ω_{23} が非常に発生しやすいと考えられる場合) において最大振幅 $B_m = 0.63 \text{ mm}$ のピークが $\omega = 1960 \text{ rpm}$ 附近に現われたのが II 系列でのただ一つの発生例であった。

3.3.2 高速側で発生する“和差調波”形危険速度 ω_{24} (I: $\omega = p_2 - p_4 = 3250 \text{ rpm}$ 附近, II: $\omega = 3100 \text{ rpm}$ 附近) 第 12 図に II-b-1 ($A_m = 0.58 \text{ mm}$) の ω_{24} における共振曲線を示す。軸受台の組立て条件の異なる II-a-1 ($A_m = 1.90 \text{ mm}$), II-a-2 ($A_m = 0.68 \text{ mm}$) の場合の ω_{24} の共振曲線はほぼ第 12 図のものと同じであった。玉軸受の異なる I-b-14 ($A_m = 0.28 \text{ mm}$) では第 13 図に示すように soft spring

第 3 表 ω_{23} の危険速度のピークの出現表

実験番号	I-b-1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	14
$A_m \text{ mm}$	3.04	2.56	1.99	1.59	1.43	1.30	1.14	1.01	0.83	0.71	0.28
ω_{23} のピークの有無	無	無	無	無	有	有	有	有	有	有	有

形の不連続な共振曲線が得られた。また A_m の非常に大きい I-b-1 ($A_m=3.04$ mm) と非常に A_m の小さい I-b-14 ($A_m=0.28$ mm) (第 13 図) の共振曲線の間にあまり差がない。この事実と前に述べた II-a-1 ($A_m=1.90$ mm) と II-a-2 ($A_m=0.68$ mm) の共振曲線間に差がないことにより、 ω_{24} のピークの共振曲線は連続的な場合も、不連続的な場合もともに A_m の大小にあまり影響されないことを知る。II-c-1 ($A_m=1.20$ mm) では定性的に第 13 図と同じ形の共振曲線が得られた。

危険速度 ω_{23} より 200 rpm ほど高速側に $\omega_{34}=|p_3+p_4|$ の“和差調波”形の危険速度も現われる⁽²⁾がピークが非常に小さいので実験の対象にできなかった。

4. む す び

本実験結果から次のことが結論される。

1) $1/2$ 次分数調波の危険速度では前向き、後向き才差運動の両方の $\omega_{1/2}$, $\omega_{-1/2}$, $\omega'_{-1/2}$ を通じて A_m (主危険速度の最大振幅) の大きいほどピークの振幅が大きくなる。

2) 同じばね特性でありながら前向き才差運動の $1/2$ 次分数調波振動 $[+1/2\cdot\omega]$ の $\omega_{1/2}$ は hard spring 形, $[-1/2\cdot\omega]$ の $\omega_{-1/2}$ と $\omega'_{-1/2}$ は soft spring 形の共振曲線となる。

3) “和差調波”形の $\omega=p_2-p_3$ となる ω_{23} の危険速度ではすべて連続的な共振曲線となる。

4) ω_{23} のピークは A_m の大きいほど小さい。

5) $\omega=p_2-p_4$ となる“和差調波”形の危険速度 ω_{24} ではばね特性の非線形項の変化により連続的な共振曲線となる場合もあり、跳躍現象をとまなう soft spring 形の不連続な共振曲線になる場合もある。

6) 危険速度 ω_{24} では、連続的、不連続な共振曲線のいずれの場合を問わず、ピークの高さは A_m に無関係である。

7) ピークの幅は全般的には各種危険速度とも比較的狭いが、危険速度の種類によりかなり異なる。危険速度 $\omega_{-1/2}$ では非常に狭く ω_{24} , $\omega'_{-1/2}$ では比較的広い。

本実験の振動系において、三次までの非線形性を考えた場合でも、 x , y 両方向をあわせて 14 個の非線形項を生じ、これら 14 個の非線形項の係数の大小、

正負と、軸受台の組立て条件、玉軸受の“角度のがた”の大小との間に系統的な関係を求めることはまず困難と考えられる。したがって共振曲線と非線形項との間の解析的な関係を簡単な形で得ることも困難であり、本論文の実験的な取扱いも一つの直接的な解明の方法であろう。

終りに実験面での助力を願った名古屋大学工学部水力実験室の辻井明夫君に謝意を表する。

文 献

- (1) 山本, 機械学会論文集, 21, 111(昭 30-11), 853.
- (2) 山本, 機械学会論文集, 22, 115(昭 31-3), 172.
- (3) 下山, 山本, 機械学会論文集, 20, 91(昭 29-3), 215.

621.822.7.034:534.13

玉 軸 受 の 振 動*

(第 1 報, 半径方向の玉通過振動について)

田 村 章 義**, 谷 口 修**

Ball Bearing Vibrations

(1st Report, On the Radial Vibration Caused by Passing Balls)

by Akiyoshi TAMURA and Osamu TANIGUCHI

Vibrations caused by a ball bearing are complicated because a ball bearing has many moving elements. In this first report, the authors deal with the radial vibration of a shaft caused by balls passing the bottom of the shaft, the frequency of which is given by the product of the retainer speed (in rpm) and the number of balls. The authors calculated the statical radial displacement of a shaft caused by the passing balls in the bearing, and carried out its measurement which actually showed the existence of the displacement of this sort. From the analytical and experimental results, it was found that if the outer race was distorted in an oval form, the amplitude of the displacement due to the passing balls becomes generally larger. Furthermore, the authors investigated the shaft vibration caused by the passing balls. Experimental results concerning amplitudes and phase differences of the vibrations of the shaft and its pedestal, agreed with the analytical results.

1. 緒 言

ころがり軸受の振動ならびに騒音は、これまでしばしば問題となり、いろいろ研究も発表されているようであるが、それらの研究はだいたい振動なり騒音の大小を総括的にしらべたものが主であって、その原因を分析探究したものはすくないようで特に振動に関する研究はほとんどない。

ころがり軸受は、数個の運動部分をもつため複雑な振動を発生し、さらに軸受はそれ自身単独に用いられることなく回転体と組合わせて用いるため、その方の振動も同時に発生し、全体として複雑な運動をおこなう。

ころがり軸受の振動の原因には、部品の製作誤差に基くもの⁽¹⁾⁽²⁾、取付誤差に基くものが大きな役割を占めるが、その他かりに誤差のない軸受ができ、これを正しく取付けたとしても、有限個のころあるいは玉を有し、弾性体で構成されるころがり軸受ではまぬがれることのできない振動原因をもっている。玉軸受の場合、それら振動の一つに玉通過振動がある。玉通過振動というのは、ある一点を玉が毎秒通過する数を振動数とする振動のことである。玉通過振動の存在は、E. Meldau⁽³⁾、H. Perret⁽⁴⁾によって指摘されたが、その確証は与えられていない。その理由は、玉軸受が理想的状態（内、外輪および玉が真円でゆうげきが存在し、ひずみなく取付けられている状態）のとき、玉通過のために生ずる軸の静力学的変位がはるかに微小なためである。著者は、特殊な計測方法を考え、水平軸回転体の場合、玉通過による半径方向の静力学的変

* 昭和 29 年 10 月 31 日 名古屋臨時大会講演会, 昭和 31 年 2 月 17 日 第 612 回講演会および昭和 32 年 10 月 14 日 創立 60 周年記念東京講演会において講演, 原稿受付 昭和 34 年 8 月 22 日。

** 正員, 東京工業大学(東京都目黒区大岡山 1)。