536. 25 : 532. 56

垂直加熱平板の非定常自然対流による熱伝達*

(Siegel の論文への寄与)

馬 淵 幾 夫**, 藤 掛 賢 司**

Transient Heat Transfer by Free Convection
from a Vertical Flat Plate

(Contribution to the Siegel's Analysis)

by Ikuo MABUCHI and Kenji FUJIKAKE

We propose both an improvement of accuracy and a specification of effects of Prandtl numbers for Siegel's analysis on the transient free convection from a vertical flat plate of infinite width and finite length, which is initially at the ambient temperature in a quiescent fluid and is suddenly raised to a uniform higher temperature.

The precise solutions for velocity and temperature profiles of differential equations for the initial stage of motion are obtained for any Prandtl numbers and also confirmed to be extremely the good approximation for steady state. As we use the above-mentioned solutions to obtain solutions to the time-dependent free convection equations of momentum and energy in an integral form, it will be expected that the present solutions hold a good accuracy for times, at which the purely one-dimensional heat transfer is terminated and the steady flow is established as a function of position along the plate.

1. 序 論

静止流体と同じ温度にある有限長の垂直平板が、突然より高温度に上昇した場合の非定常自然対流熱伝達において最も重要なことは、任意のプラントル数の流体に対して、(I) 定常状態に達する時間、(II) 非定常過程における速度ならびに温度分布の時間的变化、境界層の発達、したがって熱伝達率の時間的变化の2点に要約できるものと考えられる。

この非定常自然対流の問題は菅原と岐美⁽¹⁾が逐次近接法を用い、高橋喜彦の数値積分法を適用して取扱ったのが最初のようなのである。しかし上記(I)の点についての結論はえられておらず、プラントル数の影響も明らかではない。

上記(I)、(II)に対する解答をうる有効な方法としては、非定常項を含む境界層方程式をKármán-Pohlhausen方式により運動量ならびにエネルギー積分式に変換し、これに対して特性曲線の方法を適用することが考えられ、実際非定常自然対流への応用がSie-

gel⁽²⁾により行なわれた。

ここでKármán-Pohlhausen法を適用するにあたり速度分布、温度分布をどのように選ぶかに二つの方法が考えられる。(a) 定常状態の近似解が非定常過程全域にわたって成立する、(b) 非定常初期段階の厳密解が定常状態をも含めて非定常過程全域にわたって成立する。前者の立場で解析したのがSiegelの論文で、実際にはEckert⁽³⁾の近似多項式を用いている。しかしこのEckert近似解は定常状態に対する厳密解⁽⁴⁾と対比し、熱伝達率へのプラントル数の影響については比較的良好な結果を与えるが、速度境界層の厚み、最大誘起速度など速度分布へのプラントル数の影響についてはきわめて不十分な精度しか与え得ないことが知られているし、Eckert近似の不備については最近山根⁽⁵⁾により改めて詳論されている。一方このEckert近似は非定常初期段階の厳密解(プラントル数が1の時)ともあまりよく一致しない。したがってSiegelの解析結果が十分の精度を有するかは疑問であろうと考えられる。

このような観点から、本報文は後者の立場で、まず任意のプラントル数に対する非定常初期段階の厳密解を求め、これがまた定常状態の解としても十分の精度

* 昭和34年3月19日 東海支部第8期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和34年5月11日。

** 正員、岐阜大学工学部(岐阜県稲葉郡那加町)。

を有するものであるとの確認がなされたので、改めて解析を行ない Siegel の解の精度の向上と、Siegel よりなされなかったプラントル数の影響の明確化を試み Siegel の論文への寄与とするものである。

2. 一次元非定常自然対流の解

非定常のごく初期では前縁附近を除けば、 X 方向（垂直加熱平面板の方向）に無限にひろがる平面板のまわりの運動として、一次元的（加熱平面板に垂直な Y 方向）取扱いが可能で、この一次元非定常自然対流に対する Navier-Stokes の式、エネルギー式は

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + g\beta\theta \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad \dots\dots\dots(2)$$

境界条件は

$$Y=0, \quad U=0, \quad \theta=\theta_w, \quad Y \rightarrow \infty, \quad U=\theta=0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

で与えられる。ここに U は X 方向の速度成分、 θ は静止流体温度との差で表わされた流体温度、 g は重力の加速度、 ν は流体の動粘性係数、 β は流体の膨脹係数、 Pr は流体のプラントル数、 t は時間を表わす。この解は $Pr=1$ の場合に Illingworth により解かれたが⁽⁶⁾、任意の Pr に対して拡張された解を新たに求めた。その結果は

$$U = \frac{g\beta\theta_w t}{(1-Pr)} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta \left(\frac{1}{\sqrt{Pr}} e^{-\eta^2/Pr} - e^{-\eta^2} \right) + \left(\operatorname{erf} \frac{\eta}{\sqrt{Pr}} - \operatorname{erf} \eta \right) + 2\eta^2 \left\{ \frac{1}{Pr} \left(\operatorname{erf} \frac{\eta}{\sqrt{Pr}} - 1 \right) - (\operatorname{erf} \eta - 1) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\theta = \theta_w (1 - \operatorname{erf} \eta) \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\eta = Y/2\sqrt{\alpha t} \quad \dots\dots\dots(6)$$

となる。 θ_w は加熱板表面温度と静止流体温度との差、 α は流体の温度伝ば率である。第 1 図に $Pr \neq 1$ の場合の計算結果の一例を示す。

第 1 図 非定常初期段階における速度
ならびに温度分布

3. 運動量、エネルギー積分式

非定常項が加わった運動量、エネルギー積分式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty U dY + \frac{\partial}{\partial X} \int_0^\infty U^2 dY = g\beta \int_0^\infty \theta dY - \nu \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \theta dY + \frac{\partial}{\partial X} \int_0^\infty \theta U dY = -\alpha \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} \quad \dots\dots\dots(8)$$

で与えられる。速度、温度分布として一次元非定常自然対流の解を仮定するので、Siegel の仮定した Eckert 近似にみられるようにあらかじめ境界層厚さは定義されておらないから、積分限界は 0 と ∞ との間に取られる。このような試みにより最近 藤井⁽⁷⁾は定常状態に対するすぐれた近似解を得ている。

藤井と同様に自然対流の代表速度 U_1 、変換変数 Δ を導いて、非定常全過程に対する速度、温度分布は (4)、(5) 式を用いて

$$\varphi(\eta) = \frac{U}{U_1} = \frac{1}{2(1-Pr)} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta \left(\frac{1}{\sqrt{Pr}} e^{-\eta^2/Pr} - e^{-\eta^2} \right) + \left(\operatorname{erf} \frac{\eta}{\sqrt{Pr}} - \operatorname{erf} \eta \right) + 2\eta^2 \left\{ \frac{1}{Pr} \left(\operatorname{erf} \frac{\eta}{\sqrt{Pr}} - 1 \right) - (\operatorname{erf} \eta - 1) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\Theta = \frac{t-t_\infty}{t_w-t_\infty} = \frac{\theta}{\theta_w} = 1 - \operatorname{erf} \eta \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\eta = Y/\Delta \quad \dots\dots\dots(11)$$

を仮定する. (9), (10), (11) 式を (7), (8) 式に代入し,

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{t\alpha}{L^2} \quad (L: \text{垂直加熱面板の全長}), \quad x = \frac{X}{L}, \quad \delta = \frac{\Delta}{L} \\ u_1 &= \frac{U_1 L}{\alpha}, \quad Gr_L = \frac{g\beta\theta_w L^3}{\nu^2} \quad (L \text{ を基準長としたグラスホフ数}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

なる無次元量を導入することにより, 次の連立偏微分方程式をうる.

$$a \frac{\partial}{\partial \tau} (u_1 \delta) + b \frac{\partial}{\partial x} (u_1^2 \delta) = c Gr_L Pr^2 \delta - Pr \frac{u_1}{\delta} \dots\dots\dots (13)$$

$$\bar{a} \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta) + \bar{b} \frac{\partial}{\partial x} (u_1 \delta) = \frac{1}{\delta} \dots\dots\dots (14)$$

ここに $a, b, \bar{a}, \bar{b}, c$ は Pr のみの関数で

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\int_0^\infty \varphi d\eta}{\varphi'(0)} = \frac{\sqrt{Pr}}{6} \\ b &= \frac{\int_0^\infty \varphi^2 d\eta}{\varphi'(0)} = \frac{1}{15} \frac{(1+Pr)^{5/2} - 2\sqrt{2}Pr(1+Pr) - (1-Pr)(1-Pr\sqrt{Pr})}{\sqrt{Pr}(1-Pr)(1-\sqrt{Pr})} \\ c &= \frac{\int_0^\infty \Theta d\eta}{\varphi'(0)} = \frac{\sqrt{Pr}(1+\sqrt{Pr})}{2} \\ \bar{a} &= -\frac{\int_0^\infty \Theta d\eta}{\Theta'(0)} = \frac{1}{2} \\ \bar{b} &= -\frac{\int_0^\infty \varphi \Theta d\eta}{\Theta'(0)} = \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{1+\sqrt{Pr}} - \frac{1+(2\sqrt{2}-1)Pr - (1+Pr)^{3/2}}{Pr(1-Pr)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

次に (13), (14) 式の特解を求めよう. まず非定常初期段階 (一次元非定常の場合) に対しては $\partial/\partial x = 0$ とおくことにより, 定常状態に対しては $\partial/\partial \tau = 0$ とおくことにより得られる. 前者の解は

$$\delta = 2\tau^{1/2}, \quad u_1 = 2Gr_L Pr^2 \tau \dots\dots\dots (16)$$

となり, 当然一次元非定常の場合の厳密解 $\eta = Y/2\sqrt{\alpha t}$, $U_1 = 2g\beta\theta_w t$ に帰する.

次に後者の解は

$$\delta = \left(\frac{20}{9} \frac{b}{\bar{b}} + \frac{4}{3} Pr \right)^{1/4} x^{1/4}, \quad u_1 = \frac{4}{3} \left(\frac{\frac{c}{\bar{b}} Gr_L Pr^2}{\frac{20}{9} \frac{b}{\bar{b}} + \frac{4}{3} Pr} \right)^{1/2} x^{1/2} \dots\dots\dots (17)$$

となる. Pohlhausen-Ostrach の厳密解⁽⁴⁾と比較するために Pohlhausen 変数 ξ, ζ'

$$\xi = \left(\frac{Gr_X}{4} \right)^{1/4} \frac{Y}{X}, \quad \zeta' = \frac{UX}{\nu} / 2(Gr_X)^{1/2} \dots\dots\dots (18)$$

を導入する. ここに Gr_X は前縁からの距離 X を用いた局所的グラスホフ数で, (17) 式の結果より

$$\zeta' = \frac{2}{3} \left(\frac{\frac{c}{\bar{b}}}{\frac{20}{9} \frac{b}{\bar{b}} + \frac{4}{3} Pr} \right)^{1/2} \varphi(\eta), \quad \eta = \left(\frac{c\bar{b}Pr^2}{\frac{5}{9} \frac{b}{\bar{b}} + \frac{1}{3} Pr} \right)^{1/4} \xi \dots\dots\dots (19)$$

第2図は $Pr = 0.01, 0.72, 1000$ に対する速度, 温度分布の上記の解を厳密解と比較したもので, 図中に速度分布に対しては藤井の近似解も記されている. 厳密解に対する精度は図より自明であるが, 従来の近似解に比べて非常によいことは注目されてよいと思われる. 温度分布に関しては, さらに表面熱伝達率との関連において論ずる必要がある. 局所的熱伝達率の定義より $h_X = -k(\partial t/\partial y)_w / (t_w - t_\infty)$ で (10) 式より $h_X = -k\Theta'(0)/\Delta$ より求められ, 結果を局所的ヌセルト数の形で表わせば, 非定常初期段階では

$$h_X = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{\sqrt{\alpha t}} = 0.564 \frac{k}{\sqrt{\alpha t}} \dots\dots\dots (20)$$

第2図 定常状態における温度、速度分布の厳密解との比較

第3図 定常状態における熱伝達率の Pr による影響の比較

が厳密に成立する。 k は流体の熱伝導率である。定常状態では次式で与えられる。

$$\frac{Nu_x}{(Pr Gr_x)^{1/4}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{c\bar{b}Pr}{\frac{20}{9} \frac{b}{\bar{b}} + \frac{4}{3} Pr} \right)^{1/4} \quad \dots\dots\dots (21)$$

平均ヌセルト数に関しては $Nu_m = h_m X / k = 4/3 Nu_x$ となり、この定常状態の結果の厳密解との比較を $Pr \leq 1$ では二重丸で、 $Pr > 2$ では白丸で第3図に示されている。 $Pr > 2$ では熱伝達率に関しては近似度は劣る。以下にはその原因を全非定常過程との関連において検討して精度の向上を試みる。

さて一般に u_1, δ が τ, x の関数である非定常遷移過程の解を (13), (14) 式から求めることは困難であるが、 $\tau \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty$ における特解が成立する $\tau-x$ 平面上の領域を求めることはできる。そのためには (13), (14) 式の連立偏微分方程式の特性関係を調べる必要がある。

偏微分方程式論によれば (13), (14) 式の特性関係は

$$A \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + 2B \left(\frac{dx}{d\tau} \right) + C = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし

$$A = a\bar{a}\delta, \quad B = -\bar{a}b\delta u_1, \quad C = b\bar{b}u_1^2\delta \quad \dots\dots\dots (23)$$

で与えられる⁽⁸⁾。

特性曲線が虚にならない、すなわち、連立偏微分方程式系が双曲形であるためには $AC - B^2 < 0$ 、よって (23) 式から次の条件をうる。

$$\bar{a}b/a\bar{b} > 1 \quad \dots\dots\dots (24)$$

(15) 式の結果を用いて $\bar{a}b/a\bar{b}$ が Pr によりいかに変化するかを第4図に示す。図中白丸は未補正值で $Pr \geq 10$ で (24) 式を満足しない。第3図の $Nu_m / (Pr Gr_x)^{1/4}$ の値が $Pr \geq 10$ で精度が落ちる原因の一つは $\bar{a}, b, a, \bar{b}$ のいずれかが適当でないことによる。 $\bar{a}, a$ は非定常項から

第4図 双曲形確認のための根号値の Pr による変化

得られるもので問題はなく, b は (15) 式より速度分布に依存するもので厳密解との比較 (第2図) よりして問題はないとすれば $\bar{b}$ は θ , つまり熱伝達率に関係するから, これが誤差の原因と考えられる. 第4図から $P_r \rightarrow \infty$ で1に漸近すると考えるのは無理とは思われないので, $P_r \leq 2$ に対して影響なく, $P_r \geq 10$ で $P_r \rightarrow \infty$ のとき $\bar{a}b/a\bar{b} \rightarrow 1$ の性質を与える補正係数を $\sigma_{\bar{b}} = \bar{b}_{correct}/\bar{b}$ とし

$$\sigma_{\bar{b}} = \frac{0.9772(P_r + 5.41)}{P_r + 5.27} \dots\dots\dots(25)$$

によって補正した $\bar{b}$ を用いた結果は二重丸のようになる. なお図中には Siegel の解析における値 $\bar{a}b/a\bar{b} = 1.143$ が示してある.

(25) 式の補正により (24) 式の条件は満足されたが, $N_{um}/(P_r G_{rx})^{1/4}$ の値自身はほとんど変化しない. この値が $P_r \geq 2$ で厳密解に近づくためには (15) 式において吟味の対照から残された c の値が小さくねばよい. このことは (19) 式から速度の最大値が低くなることに対応する. 第2図で示した $P_r = 1000$ の速度分布の最大値を厳密解の最大値まで下げを試み, $\sigma_c = c_{correct}/c$ なる補正係数

$$\sigma_c = \frac{0.8927(P_r + 10.18)}{P_r + 9.01} \dots\dots\dots(26)$$

を用いた結果の速度分布は鎖線のようになり厳密解との一致は非常によいことがわかる. なお (26) 式の補正は $P_r < 1$ 以下の速度分布にほとんど影響を及ぼさない. 一方これにより $N_{um}/(P_r G_{rx})^{1/4}$ の値は第3図で $P_r \geq 2$ に対して二重丸のようになる. $P_r \leq 1$ ではこの値にほとんど影響を与えない.

以上要約すれば定常状態に対して一次元非定常の場合から求められる $\varphi(\eta)$, $\theta(\eta)$ を用い, (25), (26) 式の補正係数を用うれば, 速度分布に関しては, すべてのプラントル数に対して厳密解ときわめてよく一致すること, 温度分布, 平均ヌセルト数に関しては藤井の解と比較して, プラントル数が1より小さい場合には更に改善され, 2より大なる場合には同程度の近似度を与えるものであることが確かめられた.

4. 特性曲線の方程式

先に求めた (22) 式の特性関係より, τ - x 平面上の特性曲線群を I_+ , I_- で表わせば, I_+ , I_- の特性方向は

$$I_+ \text{ に対して, } \frac{dx}{d\tau} = \frac{b}{a} u_1 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a}{\bar{a}} \frac{\bar{b}}{b}} \right) \dots\dots\dots(27)$$

$$I_- \text{ に対して, } \frac{dx}{d\tau} = \frac{b}{a} u_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a}{\bar{a}} \frac{\bar{b}}{b}} \right) \dots\dots\dots(28)$$

で与えられる. これより特性曲線のこう配は速度 u_1 に比例する. よって, いま縦軸に τ , 横軸に x をとった τ - x 平面上における特性曲線群 I_+ は (24) 式の条件から, 特性曲線群 I_- よりこう配が小さい. ゆえに τ - x 平面上にて原点を通る二つの特性曲線を I_+° , I_-° とすれば, これにより τ - x 平面は第5図のように A, B, C の三つの領域に分けられる.

このように原点を通る特性曲線 I_+° , I_-° を考えるのは $\tau=0$ において板に沿うすべての位置 x に対して, また板前縁 $x=0$ において時刻 τ のいかにかわらず u_1 , δ が零でなければならないという特性初期値問題を考えているからである.

次に τ - x 平面の3領域の物理的解釈を考える. 非定常過程の任意の時刻における板前縁から各距離 x における速度, 温度分布の変化を考えると, 前縁近傍は早く定常状態に達し $\tau = \text{const.}$ 線と I_-° との交点1はその距離を示し, 前縁より後方ではまだ前縁の影響が及ばず一次元非定常の段階にあり, $\tau = \text{const.}$ 線と I_+° との交点2はその限界距離を示す. 1と2の間の距離においては遷移状態にある. かくて A 領域は非定常初期段階を, B 領域は遷移段階を, C 領域は定常状態を表わす.

A 領域の限界を与える特性曲線 I_+° の方程式は A 領域の特解 (16) 式の u_1 の値を (27) 式に代入して, $\tau=0$ にて $x=0$ の条件で積分すれば

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_+^\circ}{(P_r G_{rL})^{-1/2} x^{1/2}} \\ &= (P_r)^{-1/2} \left\{ \frac{b}{a} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a}{\bar{a}} \frac{\bar{b}}{b}} \right) \right\}^{-1/2} \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

で与えられ, τ_+° は非定常初期段階の終る時刻を示

第5図 τ - x 平面の3領域

す。同様に C 領域の限界を与える特性曲線 I_-^0 の方程式は C 領域の特解 (17) 式の u_1 の値を (28) 式に代入して、 $\tau=0$ にて $x=0$ の条件で積分すれば

$$\frac{\tau_-^0}{(PrGrL)^{-1/2}x^{1/2}} = \frac{3}{2} \frac{(Pr)^{-1/2} \left(\frac{20}{9} \frac{b}{\bar{b}} + \frac{4}{3} Pr \right)^{1/2}}{\frac{b}{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a}{\bar{a}} \frac{\bar{b}}{b}} \right) \left(\frac{c}{\bar{b}} \right)^{1/2}} \dots\dots\dots (30)$$

で与えられ、 τ_-^0 は定常状態にはいる時刻を表わす。

5. 考察 (Siegel の解析との対比)

(I) τ_+^0, τ_-^0 について 第 1 表は τ_+^0, τ_-^0 についての比較を示すもので、Siegel [I] は $\Theta = (1 - Y/h)^2$, $U/U_1 = Y/h(1 - Y/h)^2$ の場合 (h は境界層の厚み) を、Siegel [II] は Θ は同じで $U/U_1 = Y/h(1 - Y/h)^4$ の場合の結果である。

まず τ_+^0 をみるとプラントル数が小さい時は [II] が、大きい時は [I] が本解析結果に近い。本解析では $\tau \rightarrow 0$ の特解は厳密解ゆえ、誤差をもたらし因子は定常項からくる $b, \bar{b}$ によるものである。 $\bar{b}$ はプラントル数の大きい時 (25) 式の補正係数 σ_T が乗じてあるが、その影響はわずかであるので、プラントル数の小さい時は問題なく、大きい場合にも Siegel の結果に比して精度はよいと考えられる。 τ_-^0 に対するプラントル数の影響に関しても、 τ_+^0 と同様の結果を与え、この場合誤差の原因は u_1 と考えられるが、本解析の速度分布に比して、Eckert 近似はプラントル数が 1 に比して小さい場合ならびに大きい場合きわめて精度は悪いので Siegel の結果には相当の誤差を含むものと思われる。さらに Siegel は $Pr=1$ の時の定常状態の厳密解の両側に [I], [II] の速度分布がくることから、定常状態に達する時刻は [I], [II] よりの結果の算術平均値をとれば $Pr=1$ のみならず、任意のプラントル数に対してもほぼ正しい値を与えると結論している。しかるに本解析の結果は Siegel 結論の対称となった $Pr=1$ の場合 $\tau_-^0/(GrLPr)^{-1/2}x^{1/2} = 7.23$ で、この値は Siegel の考察のように [I], [II] の結果の算術平均でなく、むしろ [I] による解に近い。

(II) 温度境界層の成長について 本解析で用いた変換変数 Δ は境界層の厚みと直接関係ないものとして出発した。いま Θ が 0.005 の値になる η の値は $\eta \doteq 2$ で満足され、この場合の Y の値を温度境界層の厚みとみなすことにし、これを Y_t とすれば、 $Y_t = 2\Delta$ となり、変換変数 Δ の 2 倍で温度境界層が確定さ

れる。一方速度境界層の厚みは Δ と直接無関係で未確定である。Siegel は両者等しいと仮定しているが、第 1, 2 図の厳密解より正しくない。以上により Siegel の境界層の成長に関する考察は温度境界層に対するものと解釈すべきものである。

A 領域の温度境界層の厚みは (16) 式で与えられる (実際には 2δ)、時間の関数で定常状態の解 (17) 式と直接比較できないが、 A 領域の終る時刻は対応する距離 x と (29) 式により結びつけられるから、この時刻における温度境界層の厚みは x の関数として次式のように与えられる。

$$\delta = 2(Pr)^{-1/4} \left\{ \frac{b}{a} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a}{\bar{a}} \frac{\bar{b}}{b}} \right) \right\}^{-1/4} \times x^{1/4} (PrGrL)^{-1/4} \dots\dots\dots (31)$$

これよりプラントル数のすべての値に対して 27~30 % の範囲で定常状態の値 (17) 式より大きいことがわかる。 $Pr=1$ における Siegel の結果は 25 % となる。なお、この事の物理的意義は垂直板が無限に長い場合の熱の伝ばは面に垂直に無限に広がるはずであるが、有限の板では前縁の影響のためにまたげられ、一時的に定常状態の厚みを越えて成長するが、その後また定常状態の厚みまで減少することを表わす。第 6 図は $Pr=0.01, 0.72, 1000$ に対する計算結果を示す。これより任意の時刻において前縁からどこまで定常状態 (鎖線) に達しているか、また、どこまで遷移状態 (点線) にあるか、そしてなお一次元非定常状態にとど

第 1 表 (a) τ_+^0 の Pr による影響

Pr	$\tau_+^0/(GrLPr)^{-1/2}x^{1/2}$		
	本 法	Siegel [I]	Siegel [II]
0.01	17.84	22.12	19.37
0.1	6.76	7.20	6.56
0.72	3.62	3.16	3.36
1	3.34	2.85	3.14
2	2.90	2.38	2.83
10	2.33	1.93	2.55
100	2.04	1.81	2.49
1000	1.93	1.80	2.48

第 1 表 (b) τ_-^0 の Pr による影響

Pr	$\tau_-^0/(GrLPr)^{-1/2}x^{1/2}$		
	本 法	Siegel [I]	Siegel [II]
0.01	44.02	51.39	44.17
0.1	16.14	17.00	16.51
0.72	7.95	7.99	8.76
1	7.23	7.32	8.33
2	6.08	6.38	7.74
10	4.70	5.48	7.23
100	3.96	5.28	7.11
1000	3.81	5.24	7.10

第6図 温度境界層の厚みの時間的変化

第7図 熱伝達率の時間的変化

まって(実線)いるかが明らかとなり, それぞれにおける温度境界層の厚みもわかる。

(III) 熱伝達率の時間的変化について A 領域

では(20)式から

$$\frac{Nu_x}{PrGrL} = \frac{0.564}{\sqrt{\tau}} \frac{x}{PrGrL} \quad \dots\dots\dots(32)$$

で時間の経過とともに局所ヌセルト数は減少し, (29)式で与えられる時刻 τ_+ で遷移領域にはいり, 更に時間が経過すれば(30)式で与えられる時刻 τ_- で定常状態にはいり(21)式を変形した

$$\frac{Nu_x}{PrGrL} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{c\bar{b}Pr}{\frac{20}{9} \frac{b}{\bar{b}} + \frac{4}{3} Pr} \right)^{1/4} \left(\frac{x}{PrGrL} \right)^{3/4} \quad \dots\dots\dots(33)$$

の値に達する。さて温度境界層の厚みと, 熱伝達率には逆比例関係があるから(II)における考察から熱伝達率の時間的変化には最小値が存在することになる。これを明らかにするため一例として $x/(PrGrL) = 0.5 \times 10^{-6}$ の位置における局所的ヌセルト数の変化を計算し第7図にその結果を示す。図中には Siegel の $Pr=1$ に対する結果が鎖線で示されている。明らかに相違がみられる。

6. 総括ならびに結言

(1) 非定常初期段階の終る時刻は(29)式で与えられ, その結果より Siegel の解 [I] によるものはプラントル数の大きい場合は精度がよく, プラントル数が小さい場合には精度が悪い。解 [II] によるものは反対の結果を与えることが明らかにせられた。

(2) 定常状態にはいる時刻は(30)式で与えられ, Siegel の解は [I], [II] と本解析結果より大きい値を与える。ゆえに Siegel の結論のように解 [I] と解 [II] の算術平均をもって, その時刻を与えるというのはプラントル数のいかんにかかわらず合理的ではない。

(3) プラントル数の影響の明確化という点に関しては, τ_+ と τ_- とともにプラントル数が小さくなると大きな値をとる。熱伝達率は非定常初期段階の終りに最小値をとるが, プラントル数が小さい場合はそれが大きい場合に比して顕著ではない。

最後に本研究に対して終始御指導を賜りました名古屋大学の小林 明教授, ならびに御べん達をいただいた古屋善正, 山本敏雄両教授に深じんの謝意を表わす。

文 献

- (1) S. Sugawara & I. Michiyoshi, *Proc. 1st. Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* 1951,(1952), 501.
- (2) R. Siegel, *Trans. ASME*, **80** (1958), 347.
- (3) E.R.G. Eckert & R.M. Drake, Jr., *Heat and Mass Transfer*, (1959), McGraw Hill.
- (4) S. Ostrach, *N.A.C.A. Tech. Rep.* No. 1111 (1953).
- (5) 山本, 機械学会論文集, **24** 144 (昭 33-8), 541.
- (6) C.R. Illingworth, *Proc. of Camb. Phil. Soc.*, **46** (1950), 603.
- (7) 藤井, 機械学会論文集, **24**, 148 (昭 33-12), 957.
- (8) 犬井, 偏微分方程式とその応用(昭 32), コロナ社; R. Courant & K.O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Wave*, (1948) Interscience Publishers, Inc.

なお Siegel の論文参照。