539. 4. 013 : 624. 072. 3 : 621-477

直交異方性円環の平面応力について*

林 卓 夫**

On the Plane Stress Problem in a Ring of
Orthogonally Aeolotropic Material

by Takuo HAYASHI

In the present paper, the two-dimensional stress distribution in an orthogonally aeolotropic plate, bounded by two concentric circular contours, is treated. The same problems, in the case of isotropic material, have been solved easily by the use of the polar co-ordinates. In the case of aeolotropic plate, however, the solutions are rather complicated because of the directionality of its elastic properties, and the author treats it by the perturbation method using the orthogonal co-ordinates, similar to that of the previous papers.

Numerical examples are worked out for three kinds of material, showing that considerably large stress concentration may occur in some aeolotropic plate even in the case of uniform inner pressure.

1. 緒 論

厚肉円筒あるいは円環の応力分布は、等方性板の場合には、極座標を用いて比較的簡単に取扱うことができ、特に軸対称荷重の場合には常微分方程式を解く問題に帰着するので、その解は初等の材料力学の教科書にも紹介されている⁽¹⁾。しかし、直交異方性板の場合には、極座標を用いると応力関数を支配する偏微分方程式がきわめて複雑な形となって、一般解を求めることが困難であり⁽²⁾、また他に内外円を同時に写像する適当な写像関数も見出だされていないために、この問題は他の多連結領域の平面応力問題と同じく、複雑な問題となってくる。

筆者は前に、多連結領域問題の一つとして、円孔を持つ直交異方性帯板の応力分布⁽³⁾を直交座標系を用いて計算したが、同様の方法を円環の問題に適用することを試みた。すなわち本論文は、直交座標系であらわした応力関数に対し、内外円周上の境界条件をこの応力関数の関係に書き改め、摂動法を用いて各部の応力を計算したものである。

2. 基 礎 式

第1図に示すように、二つの同心円で限られた直交異方性板を考え、穴の中心に原点を取り、板の中央面に弾性対称軸と一致して xy 軸を定めると、面内の変位 u, v 、回転 w および応力はそれぞれ次の式で与えられる⁽⁴⁾。

第 1 図

$$\left. \begin{aligned} (p_1 + p_2) \widehat{xx} + p_1 p_2 (p_1 + p_2) \widehat{yy} + 2i E_x w &= (p_2^2 - p_1^2) \{ p_1 \varphi_1''(z_1) + p_2 \varphi_2''(z_2) \} \\ p_1 p_2 \widehat{yy} - \widehat{xx} + i (p_1 + p_2) \widehat{xy} &= (p_1 + p_2) \{ p_1 \varphi_1''(z_1) + p_2 \varphi_2''(z_2) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x u &= -R_0 [(p_1^2 + \nu_x) \varphi_1'(z_1) + (p_2^2 + \nu_x) \varphi_2'(z_2)] \\ E_x v &= I_m [p_1 (p_2^2 + \nu_x) \varphi_1'(z_1) + p_2 (p_1^2 + \nu_x) \varphi_2'(z_2)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし $z_j = x + i p_j y$, $p_1^2 p_2^2 = E_x / E_y$, $p_1^2 + p_2^2 = E_x / G_{xy} - 2\nu_x$,

E_x, E_y : x, y 方向のヤング率, G_{xy} : xy 軸に沿うせん断弾性係数, ν_x : x 方向のポアソン比

* 昭和34年9月26日 関西支部第205回講演会において講演，原稿受付 昭和34年10月26日。

** 正員，神戸商船大学（神戸市東灘区本庄町深江）。

あるいは、図のように定めた r, θ に対して各応力を次のように書くこともできる。

$$\left. \begin{aligned} 4\widehat{rr} &= -R_e \left[\sum_j \{ (1+p_j)e^{i\theta} + (p_j-1)e^{-i\theta} \}^2 \varphi_j''(z_j) \right] \\ 4\widehat{r\theta} &= I_m \left[\sum_j \{ (1+p_j)^2 e^{2i\theta} - (p_j-1)^2 e^{-2i\theta} \} \varphi_j''(z_j) \right] \\ 4\widehat{\theta\theta} &= R_e \left[\sum_j \{ (1+p_j)e^{i\theta} - (p_j-1)e^{-i\theta} \}^2 \varphi_j''(z_j) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし $\sum_j$ は $j=1, 2$ についての和を意味する。

今、外円の半径を単位長さに取り、半径 λ の内側の円の外域で、応力関数をべき級数に展開すると、応力、変位、回転のすべてが一価関数であることを考慮して、次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_j''(z_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n,j} + ib_{n,j}) z_j^n + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{-n,j} + ib_{-n,j}) z_j^{-n} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi p_j (p_j^2 - p_k^2)} \{ (p_j^2 + \nu_x) X + i p_j (p_k^2 + \nu_x) Y \} \\ &\quad j=1, 2, \quad k=2, 1, \quad j \neq k \\ M &= 2\pi (b_{-2,1} + b_{-2,2}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに X, Y は内円孔縁に作用する合力の x, y 方向の成分、 M は合モーメントを意味している。なお、異方特性 p_j が実数あるいは共役複素数のいずれの場合にも、以下の各式が同じ形で成立するように、未定係数 $a_{n,j}, b_{n,j}$ は p_j に応じてそれぞれ実数あるいは共役複素数を取るものと約束しておく。更にここで記述を簡単にするために、しばらく xy 軸に関して対称な応力分布について考え、応力関数および境界条件を、次のように書くことにする。

応力関数

$$\varphi_j''(z_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n,j} z_j^{2n} \dots\dots\dots (5)$$

境界条件

$$r=\lambda \text{ において } \quad \widehat{rr} = \frac{R_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R_{2n} \cos 2n\theta, \quad \widehat{\theta\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{2n} \sin 2n\theta \dots\dots\dots (6)$$

$$r=1 \text{ において } \quad \widehat{rr} = \frac{R_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R_{2n}' \cos 2n\theta, \quad \widehat{\theta\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{2n}' \sin 2n\theta \dots\dots\dots (7)$$

3. 内側円周上の条件

周知の写像関数

$$z_j = \frac{\lambda}{2} \{ (1+p_j)w_j + (1-p_j)w_j^{-1} \} \quad w_j = r_j e^{i\theta_j} \dots\dots\dots (8)$$

によって、内側円の外側の領域は、 w_j 平面の単位円 $w_j = e^{i\theta}$ の外側の領域に写像される。応力関数 $\varphi_j''(z_j)$ を内側円の外側で w_j の級数に展開して

$$\varphi_j''(z_j) = f_j(w_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n,j} w_j^{2n} \dots\dots\dots (9)$$

と書き、境界条件 (6) を満たすように未定係数 $A_{2n,j}$ を定めると

$$\left. \begin{aligned} A_{-2n,j} &= \left(\frac{1-p_j}{1+p_j} \right)^n A_{0,j} + \sum_{r=1}^n \left(\frac{1-p_j}{1+p_j} \right)^{n-r} \left[\frac{p_j+p_k}{p_k-p_j} \left\{ A_{2(r-1),j} + \frac{p_j-1}{1+p_j} A_{2r,j} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2p_k}{p_k-p_j} \left\{ \frac{1+p_k}{1+p_j} A_{2(r-1),k} + \frac{p_k-1}{1+p_j} A_{2r,k} \right\} + K_{j(r)} \right] \\ \text{ただし } K_{j(r)} &= \frac{1}{(p_k-p_j)(1+p_j)} \{ (1-p_k)(\Theta_{2(r-1)} + R_{2(r-1)}) + (1+p_k)(R_{2r} - \Theta_{2r}) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

を得る。更に写像関数から導かれる φ_j'' と f_j の係数間の次の関係⁽³⁾

$$\left. \begin{aligned} A_{2n,j} &= \left(\frac{1+p_j}{1-p_j} \right)^n \sum_{r=n}^{\infty} a_{2r,j} (1-p_j)^r \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2r} \binom{2r}{r-n} \quad n \geq 0 \\ a_{-2n,j} &= (1-p_j^2)^n \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2n} \sum_{r=1}^n \left\{ A_{-2r,j} - \left(\frac{1-p_j}{1+p_j} \right)^r \sum_{s=r}^{\infty} A_{2s,j} (1-p_j^2)^s \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2s} \binom{2s}{s-r} \right\} \\ &\quad \times \left(\frac{1+p_j}{1-p_j} \right)^r \frac{r}{n} \binom{2n}{n-r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

を用いて, (10) 式を $a_{2n,j}$ の係数関係に書き改めると, 内円孔周辺条件として次の連立一次方程式を得る.

$$a_{-2n,j} = \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2n} \left[K_{-2n,j} + \sum_{r=0}^{\infty} \{ a_{2r,j} {}^{2n}\gamma_{2r,j} + a_{2r,k} {}^{2n}\delta_{2r,j} \} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2r} \right] \quad n \geq 1 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに $K_{-2n,j}$, ${}^{2n}\gamma_{2r,j}$ および ${}^{2n}\delta_{2r,j}$ は内円孔縁の外力あるいは異方定数で定義される次の定数である.

$$\left. \begin{aligned} K_{-2n,j} &= (1-p_j^2)^n \sum_{q=1}^n \left(\frac{1+p_j}{1-p_j} \right)^q \binom{2n-1}{n-q} K_j(q) \\ {}^{2n}\gamma_{2r,j} &= (1-p_j^2)^{n+r} \sum_{q=1}^n \left\{ 1 + \frac{p_j+p_k}{p_k-p_j} \left(\frac{1+p_j}{1-p_j} \right)^{2q-1} \right\} \frac{2q-1}{2r+1} \binom{2n-1}{n-q} \binom{2r+1}{r+q} \\ {}^{2n}\delta_{2r,j} &= (1-p_j^2)^n (1-p_k^2)^r \frac{2p_k(1-p_k)}{(p_k-p_j)(1+p_j)} \sum_{q=1}^n \left\{ \frac{(1+p_j)(1+p_k)}{(1-p_j)(1-p_k)} \right\}^q \frac{2q-1}{2r+1} \binom{2n-1}{n-q} \binom{2r+1}{r+q} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

4. 外側円周上の条件

前節と類似の変換

$$z_j = \frac{1}{2} \{ (1+p_j)w_j' + (1-p_j)w_j'^{-1} \}, \quad w_j' = r_j' e^{i\theta_j'} \quad \dots\dots\dots (14)$$

を用いると, 半径1の外円周は, w_j' 平面の単位円 $w_j' = e^{i\theta}$ に対応する. ここでこの変換が, 物理平面では外側円の内部に分岐点を持っていることに注意して, 応力関数 φ_j'' を外円の内部で正則な部分と, そうでない部分に分け

$$\varphi_j'' = \varphi_{jS}'' + \varphi_{jR}'', \quad \varphi_{jS}'' = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-2n,j} z_j^{-2n}, \quad \varphi_{jR}'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n,j} z_j^{2n} \quad \dots\dots\dots (15)$$

と書くと, それぞれに対し変換式(14)より二項展開の公式を用いて容易に次の表示を得る.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{jS}'' &= f_{jS}(w_j') = \sum_{r=1}^{\infty} C_{-2r,j} w_j'^{-2r} \\ \varphi_{jR}'' &= f_{jR}(w_j') = B_0 + \sum_{r=1}^{\infty} B_{2r,j} \left\{ \left(\frac{1+p_j}{1-p_j} w_j^2 \right)^r + \left(\frac{1+p_j}{1-p_j} w_j^2 \right)^{-r} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\text{ただし } C_{-2r,j} = \left(\frac{p_j-1}{1+p_j} \right)^r \sum_{n=1}^r a_{-2n,j} \left(\frac{4}{p_j^2-1} \right)^n \binom{n+r-1}{r-n} \quad \dots\dots\dots (16\cdot a)$$

$$B_{2r,j} = \sum_{n=r}^{\infty} a_{2n,j} \left(\frac{1-p_j^2}{4} \right)^n \binom{2n}{n+r} \quad \dots\dots\dots (16\cdot b)$$

なお, 後の計算に用いるために (16・b) 式の逆変換式を求めておく.

今, (16) の第2式の右辺の一つの項が z_j のべき級数に展開されたとして

$$\left\{ \left(\frac{1+p_j}{1-p_j} w_j^2 \right)^r + \left(\frac{1+p_j}{1-p_j} w_j^2 \right)^{-r} \right\} = \sum_{n=0}^r {}^{2r}X_{2n,j} z_j^{2n} \quad r \geq 1 \quad \dots\dots\dots (17)$$

と置くと (16・b) 式より ${}^{2r}X_{2n,j}$ についての $(r+1)$ 個の連立方程式

$$\sum_{n=q}^r {}^{2r}X_{2n,j} \left(\frac{1-p_j^2}{4} \right)^n \binom{2n}{n+q} = \delta_{r,q}, \quad q=r, r-1, \dots, 0,$$

$$\text{ただし } \delta_{rr}=1, \quad \delta_{r,q}=0, \quad r \neq q$$

が成立する. あるいは移項して, 次の漸化式の形

$${}^{2r}X_{2r,j} = \left(\frac{4}{1-p_j^2} \right)^r, \quad {}^{2r}X_{2q,j} = - \sum_{n=q+1}^r {}^{2r}X_{2n,j} \left(\frac{1-p_j^2}{4} \right)^{n-q} \binom{2n}{n+q} \quad q < r$$

に書き改めると ${}^{2r}X_{2q,j}$ が次式で与えられることは帰納法によって容易に証明される.

$${}^{2r}X_{2q,j} = \left(\frac{4}{p_j^2-1}\right)^q \left(\frac{r+q}{r-q}\right) \frac{2r}{r+q} (-1)^r \dots\dots\dots (18)$$

したがって (17), (18) 式を用いて (16) の第 2 式の右边を z_j のべき級数に書き改め, 左辺の係数と比較して次の逆変換公式が得られる.

$$a_{2n,j} = \left(\frac{4}{p_j^2-1}\right)^n \sum_{r=n}^{\infty} B_{2r,j} \left(\frac{r+n}{r-n}\right) \frac{2r}{r+n} (-1)^r \dots\dots\dots (19)$$

さて, 応力関数 φ_j'' を w_j' を変数として

$$\varphi_j'' = f_{jR} + f_{jS} = B_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[B_{2r,j} \left\{ \left(\frac{1+p_j}{1-p_j} w_j^2 \right)^r + \left(\frac{1+p_j}{1-p_j} w_j^2 \right)^{-r} \right\} + C_{-2r,j} w_j'^{-2r} \right] \dots\dots\dots (20)$$

と書きあらわし, 境界条件 (7) を満たすように $B_{2r,j}$ を定めると

$$B_{2r,j} = \sum_{q=r}^{\infty} \left(\frac{1-p_j}{1+p_j} \right)^{q-r} \frac{K_j'(q) + C_j(q)}{(1+p_j) D_j(q)} \dots\dots\dots (21)$$

$$\text{ただし } D_j(q) = (p_k - p_j) \left\{ 1 - \frac{1-p_j}{1+p_j} \left(\frac{1-p_k}{1+p_k} \right)^{2q+1} \right\} + (p_j + p_k) \left\{ \left(\frac{1-p_j}{1+p_j} \right)^{2q+1} + \left(\frac{1-p_k}{1+p_k} \right)^{2q+1} \right\}$$

$$K_j'(q) = (p_k - 1) \left\{ 1 + \left(\frac{1-p_k}{1+p_k} \right)^{2q} \right\} \{ \Theta_{2(q+1)}' - R_{2(q+1)}' \} + (1+p_k) \left\{ 1 + \left(\frac{1-p_k}{1+p_k} \right)^{2(q+1)} \right\} \{ \Theta_{2q}' + R_{2q}' \}$$

$$C_j(q) = \left\{ p_j + p_k + (p_j - p_k) \left(\frac{1-p_k}{1+p_k} \right)^{2q+1} \right\} [(1+p_j) C_{-2(q+1),j} + (p_j - 1) C_{-2q,j} \\ + 2p_k \{ (1+p_k) C_{-2(q+1),k} + (p_k - 1) C_{-2q,k} \}]$$

更に, 今求めた関係式 (16・a) および (19) 式を (21) 式に代入し整理して, 外側円周上の条件として $a_{2n,j}$ に関する次の連立一次方程式を得る.

$$a_{2n,j} = \sum_{r=1}^{\infty} \{ a_{-2r,j} {}^{2n}\alpha_{2r,j} + a_{-2r,k} {}^{2n}\beta_{2r,j} \} + K_{2n,j} \quad n \geq 0 \dots\dots\dots (22)$$

ここに ${}^{2n}\alpha_{2r,j}$, ${}^{2n}\beta_{2r,j}$, $K_{2n,j}$ は異方特性および外円周の外力から次式で定義される定数である.

$$\left. \begin{aligned} K_{2n,j} &= \left(\frac{4}{p_j^2-1} \right)^n \sum_{q=n}^{\infty} \left(\frac{p_j-1}{1+p_j} \right)^q \binom{q+n}{2n} \frac{K_j'(q)}{(1+p_j) D_j(q)} \\ {}^{2n}\alpha_{2r,j} &= \left(\frac{4}{p_j^2-1} \right)^{n+r} \sum_{q=n}^{\infty} \left(\frac{p_j-1}{1+p_j} \right)^{2q+1} \left\{ 1 + \frac{p_j-p_k}{p_j+p_k} \left(\frac{1-p_k}{1+p_k} \right)^{2q+1} \right\} \frac{p_j+p_k}{D_j(q)} \frac{2q+1}{2r-1} \binom{q+r-1}{2r-2} \binom{q+n}{2n} \\ {}^{2n}\beta_{2r,j} &= \left(\frac{4}{p_j^2-1} \right)^n \left(\frac{4}{p_k^2-1} \right)^r \sum_{q=n}^{\infty} \left(\frac{1-p_j}{1+p_j} \frac{1-p_k}{1+p_k} \right)^q \frac{2p_k(p_k-1)}{(1+p_j) D_j(q)} \frac{2q+1}{2r-1} \binom{q+r-1}{2r-2} \binom{q+n}{2n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

なお, 応力分布が xy 軸に対称でない場合には, 両境界に作用する外力の合力および合モーメントが釣り合いの条件を満たさなければならない. すなわち

境界条件

$$\left. \begin{aligned} r=\lambda \text{ にて } \quad \widehat{rr} &= \frac{R_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ R_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta \} \\ \widehat{r\theta} &= \frac{\Theta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \Theta_n \cos n\theta + \Phi_n \sin n\theta \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} r=1 \text{ にて } \quad \widehat{rr} &= \frac{R_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ R_n' \cos n\theta + S_n' \sin n\theta \} \\ \widehat{r\theta} &= \frac{\Theta_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \Theta_n' \cos n\theta + \Phi_n' \sin n\theta \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

に対し, つりあいの条件

$$\left. \begin{aligned} \lambda(R_1 - \Phi_1) &= R_1' - \Phi_1' = X/\pi, \quad \lambda(S_1 + \Theta_1) = S_1' + \Theta_1' = Y/\pi \\ \lambda^2 \Theta_0 &= \Theta_0' = 2(b_{-2,1} + b_{-2,2}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

が成立する. ここに X , Y , $b_{-2,j}$ は応力関数 (4) 式中の文字と同じ意味である. 他の未定係数 $a_{2n+1,j}$, $b_{2n,j}$, $b_{2n+1,j}$ に対しては, 今までと同じ方法でそれぞれの組に対し (12) 式および (21) 式に相当する無限元一次連立方程式が導かれる.

5. 連立方程式の解と応力表示

(12) および (21) 式の連立方程式を解くのに摂動法⁽³⁾を用いることにして

$$a_{2n,j} = \sum_{r=0}^{\infty} {}^{2n}a_{2r,j} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2r}, \quad a_{-2n,j} = \sum_{r=0}^{\infty} {}^{-2n}a_{2r,j} \left(\frac{r}{2}\right)^{2(n+r)} \dots\dots\dots (27)$$

と置くと, (12) および (21) 式より

$$\left. \begin{aligned} {}^{2n}a_{0,j} &= K_{2n,j} \\ {}^{2n}a_{2r,j} &= \sum_{q=1}^r \{ {}^{2n}\alpha_{2q,j} {}^{-2q}a_{2(r-q),j} + {}^{2n}\beta_{2q,j} {}^{-2q}a_{2(r-q),k} \} \quad r \geq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^{-2n}a_{0,j} &= {}^{2n}\gamma_{0,j} K_{0,j} + {}^{2n}\delta_{0,j} K_{0,k} + K_{-2n,j} \\ {}^{-2n}a_{2r,j} &= \sum_{q=0}^r \{ {}^{2n}\gamma_{2q,j} {}^{2q}a_{2(r-q),j} + {}^{2n}\delta_{2q,j} {}^{2q}a_{2(r-q),k} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

となるので, 両式を交互に用いて展開係数を低次のものから高次のものへ必要なだけ求められる. $a_{2n+1,j}$, $b_{2n,j}$ 等の未定係数についても同じである.

板内の任意点の応力は, (1), (4) あるいは (5) 式より計算される. たとえば, xy 軸に対称な応力分布に關しては,

$$\widehat{yy} = \sum_j R_e [\varphi_j''(z_j)] = R_e \left[\sum_j \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n,j} z_j^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-2n,j} z_j^{-2n} \right] \dots\dots\dots (30)$$

これに (27), (28) 式の関係を用いて各係数を ${}^{-2n}a_{2r,j}$ であらわし, λ について整理して,

$$\widehat{yy} = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2r} \sum_j R_e \left[\sum_{s=1}^r {}^{-2s}a_{2(r-s),j} L_{2s,j} \right] + R_e \left[\sum_j \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n,j} z_j^{2n} \right] \left. \vphantom{\sum_{r=1}^{\infty}} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ただし $L_{2s,j} = z_j^{-2s} + \sum_{n=0}^{\infty} \{ {}^{2n}\alpha_{2s,j} z_j^{2n} + {}^{2n}\beta_{2s,k} z_k^{2n} \}$

を得る. 同様に

$$\widehat{xx} = - \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2r} \sum_j R_e \left[\sum_{s=1}^r {}^{-2s}a_{2(r-s),j} L_{2s,j}' \right] - R_e \left[\sum_j \sum_{n=0}^{\infty} p_j^2 K_{2n,j} z_j^{2n} \right] \left. \vphantom{\sum_{r=1}^{\infty}} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ただし $L_{2s,j}' = p_j^2 z_j^{-2s} + \sum_{n=0}^{\infty} \{ {}^{2n}\alpha_{2s,j} p_j^2 z_j^{2n} + {}^{2n}\beta_{2s,k} p_k^2 z_k^{2n} \}$

$$\widehat{xy} = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2r} \sum_j I_m \left[\sum_{s=1}^r {}^{-2s}a_{2(r-s),j} L_{2s,j}'' \right] + \sum_j I_m \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_j K_{2n,j} z_j^{2n} \right] \left. \vphantom{\sum_{r=1}^{\infty}} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

ただし $L_{2s,j}'' = p_j z_j^{-2s} + \sum_{n=0}^{\infty} \{ {}^{2n}\alpha_{2s,j} p_j z_j^{2n} + {}^{2n}\beta_{2s,k} p_k z_k^{2n} \}$

である. 特に内円孔周辺応力に対しては, (9) 式の応力関数 $f_j(w_j)$ を用い, $w_j = e^{i\theta}$ とおいた次式

$$\widehat{\theta\theta} = \widehat{xx} + \widehat{yy} - \widehat{rr} = \sum_j R_e \left[(1-p_j^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n,j} e^{2in\theta} \right] - \widehat{rr} \dots\dots\dots (34)$$

を用いると便利である. この式の係数を (10), (11) 式を用いて $a_{2r,j}$ $r \geq 0$ に書き改め更に (27) 式を用いて ${}^{2n}a_{2r,j}$ について整理すると次のようになる.

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\theta} &= R_e \left[\sum_j \frac{(1-p_j^2)(1-p_k)}{(p_k-p_j) \{1+p_j-(1-p_j)e^{-2i\theta}\}} \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \Theta_{2(q-1)} + R_{2(q-1)} + \frac{1+p_k}{1-p_k} (R_{2q} - \Theta_{2q}) \right\} e^{-2iq\theta} - \widehat{rr} \right] \\ &\quad + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2q} \sum_j R_e \left[\sum_{s=0}^q {}^{2s}a_{2(q-s),j} M_{2s,j} \right] \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } M_{2s,j} &= (1-p_j^2)^{s+1} \sum_{r=0}^s \left(\frac{1+p_j}{1-p_j}\right)^r e^{2ir\theta} \binom{2s}{s-r} + (1-p_j^2)^s \sum_{r=1}^{s+1} \binom{2s+1}{r+s} \frac{2r-1}{2s+1} \\ &\quad \times \left[(1-p_j^2) \left\{ e^{-2i\theta} + \frac{p_j+p_k}{p_k-p_j} \left(\frac{1+p_j}{1-p_j}\right)^r e^{-2ir\theta} \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{1-p_j}{1+p_j}\right) e^{-2i\theta} \right\}^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2p_j(1-p_j)(1-p_k)}{p_j-p_k} \left(\frac{1+p_j}{1-p_j}\right)^r e^{-2ir\theta} \left\{ 1 - \left(\frac{1-p_k}{1+p_k}\right) e^{-2i\theta} \right\}^{-1} \right] \end{aligned}$$

ここで応力計算を行なうのに (23) 式の ${}^{2n}\alpha_{2r,j}$, ${}^{2n}\beta_{2r,j}$ および (31), (32), (33) 式中の $L_{2s,j}$ に含まれる 2 種類の無限級数の和を求めなければならない. ${}^{2n}\alpha_{2s,j}$ 等に対しては, $q \rightarrow \infty$ で $D_j(q) \rightarrow (p_k - p_j)$ を考慮し

て、定数を除いて (23) 式を

$$\sum_{q=n}^{\infty} \frac{Y^q}{D_j(q)} \frac{2q+1}{2s-1} \binom{q+s-1}{2s-2} \binom{q+n}{2n} = \sum_{q=n}^{\infty} \left(\frac{1}{D_j(q)} - \frac{1}{p_k-p_j} \right) Y^q \frac{2q+1}{2s-1} \binom{q+s-1}{2s-2} \binom{q+n}{2n} \\ + \frac{1}{p_k-p_j} \sum_{q=n}^{\infty} Y^q \frac{2q+1}{2s-1} \binom{q+s-1}{2s-2} \binom{q+n}{2n} \dots\dots\dots (36)$$

のように書けば、第一の級数は収束のよい級数であり、第二の無限級数は幾らかの計算の後、次のような閉形に書くことができる。

$$\sum_{q=n}^{\infty} Y^q \frac{2q+1}{2s-1} \binom{q+s-1}{2s-2} \binom{q+n}{2n} = \frac{2n+1}{n+s} \left\{ \frac{Y}{(1-Y)^2} \right\}^{n+s} \sum_{p=0}^n \binom{n+s}{s-1-p} \binom{n+s}{n-p} \{Y^p + Y^{-(p-1)}\} \\ \dots\dots\dots (37)$$

このようにして、工學上十分な精度で ${}^{2n}\alpha_{2s,j}$ 等を計算することは比較的容易である。

(31)~(33) 式中の $L_{2s,j}$ に含まれる無限級数についても n が十分大きいときは、今の計算によって

$${}^{2n}\alpha_{2s,j} \rightarrow \kappa \left[X^n \frac{2n+1}{n+s} \left\{ \frac{Y}{(1-Y)^2} \right\}^{n+s} \sum_{p=0}^n \binom{n+s}{s-1-p} \binom{n+s}{n-p} \{Y^p + Y^{-(p-1)}\} \right] \equiv \kappa ({}^{2n}S_{2s,j})$$

$\kappa : n$ に無関係の定数

と書くことができるので

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{2n}\alpha_{2s,j} z_j^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} ({}^{2n}\alpha_{2s,j} - \kappa {}^{2n}S_{2s,j}) z_j^{2n} + \kappa \sum_{n=0}^{\infty} {}^{2n}S_{2s,j} z_j^{2n} \dots\dots\dots (38)$$

とすると前者は収束のよい無限級数、後者は次式で示す多項式の和となって計算に便利である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{2n}S_{2s,j} z_j^{2n} = \sum_{p=0}^{s-1} \{Y^{s-1-p} + Y^{-(s-p)}\} \left\{ \frac{KY}{(1-Y)^2(1-K)^2} \right\}^s \\ \times \sum_{q=0}^p \left\{ K^{-(q+1)} \binom{p+1}{q+1} \binom{2s-2-p}{q} + K^q \binom{p-1}{p-q} \binom{2s-p}{q} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

ただし $K = \frac{XYz_j^2}{(1-Y)^2}$ また $\binom{p-1}{p} = \delta_{0,p}$ とする。

6. 一様な内圧が作用する場合

この場合は $R_0/2 = -p_0$, $R_0' = R_n = \Theta_n = R_n' = \Theta_n' = 0$ $n > 1$

したがって、内円孔縁応力は (35) 式より

$$\frac{\widehat{\theta\theta}}{-p_0} = R_e \left[1 + \sum_j \frac{2(1-p_j^2)(1-p_k)e^{-2i\theta}}{(p_j-p_k)\{1+p_j-(1-p_j)e^{-2i\theta}\}} \right] + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2s} \sum_j R_e \left[\sum_{q=1}^s {}^{2q}a_{2(s-q),j} M_{2q,j} \right] \dots\dots\dots (40)$$

となって、この第 1 項は池田、植村氏⁽⁵⁾等によって求められた円孔を有する無限平板の解と一致する。

板の内部の応力は、

$$\frac{\widehat{yy}}{-p_0} = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2s} \sum_j R_e \left[\sum_{q=1}^s {}^{2q}a_{2(s-q),j} L_{2q,j} \right] \dots\dots\dots (41)$$

$$\frac{\widehat{xx}}{-p_0} = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2s} \sum_j R_e \left[\sum_{q=1}^s {}^{2q}a_{2(s-q),j} L_{2q,j}' \right] \dots\dots\dots (42)$$

となる。ここに $M_{2q,j}$, $L_{2q,j}$, $L_{2q,j}'$ は (31), (32), (35) 式と同じものである。

等方性板に対する解は $p_j \rightarrow 1$ の極限を取ることによって得られる。計算に関係のない項および高次の微小量を省略して、 (p_j-1) が十分小さい場合には、(13) および (23) 式の係数は

$$\left. \begin{aligned} {}^0\alpha_{2,j} &= \frac{2(p_j+p_k^2)}{(p_j+p_k)(p_k-p_j)(p_j+1)}, & {}^0\beta_{2,j} &= \frac{2p_k}{(p_j+p_k)(p_k-p_j)} \\ {}^2\gamma_{0,j} &= \frac{2(1+p_j)(p_k+p_j^2)}{p_k-p_j}, & {}^2\delta_{0,j} &= \frac{2p_k(1+p_j)(1+p_k)}{p_k-p_j} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

また (28), (29) 式の第 1 式は、

$${}^{2n}a_{0,j} \equiv 0, \quad {}^{-2}a_{0,j} = \frac{2(1-p_k)(1+p_j)}{p_k-p_j} \dots\dots\dots (44)$$

となる。したがって漸化式 (28), (29) を用いて

$$\left. \begin{aligned} {}^0a_{2r,j} &= \frac{4^r(1+p_k^2)}{p_j^2-p_k^2}, & {}^{-2}a_{2r,j} &= \frac{2(1+p_j)(1-p_k)4^r}{p_k-p_j} \\ {}^{2n}a_{2r,j} &= -2^{(n+1)}a_{2r,j}=0 & n &> 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

を得て、これらを (40), (41) 式に代入し $p_j \rightarrow 1$ の極限を取ると,

$$\frac{\widehat{\theta\theta}}{-p_0} = 1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^{2s} = \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} \dots\dots\dots (46)$$

$$\left. \frac{\widehat{yy}}{-p_0} \right|_{z_j=x} = (1+x^{-2}) \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^{2s} = (1+x^{-2}) \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \dots\dots\dots (47)$$

となって、よく知られている結果⁽¹⁾が導かれる。

7. 計 算 例

等方性板、かしわの板 ($p_1=5/3$, $p_2=49/51$) および正方晶系⁽⁶⁾に属する合板 ($p_1=1/p_2=5/3$ すなわち $E_x=E_y$) に対する計算結果を第2~4図に示す。第2図, 第3図は, それぞれ内外円半径比 $\lambda=0.2$ の場合の内円孔縁に沿う円周応力分布および弾性対称軸に沿う円周応力の分布を示している。

また内円孔縁に生ずる最大応力を λ の関数として示すと,

$$(a) \text{ 等方性板 } \quad \widehat{\theta\theta}_{\max}/-p_0 = (1+\lambda^2)/(1-\lambda^2) = 1 + 2\lambda^2 + 2\lambda^4 + 2\lambda^6 + 2\lambda^8 + \dots\dots\dots (48)$$

$$(b) \text{ かしわの板 } \quad \widehat{\theta\theta}_{\max}/-p_0 = 1.016 + 2.00\lambda^2 + 1.75\lambda^4 + 2.76\lambda^6 + 1.50\lambda^8 + \dots\dots\dots (49)$$

$$(c) \text{ 合 板 } \quad \widehat{\theta\theta}_{\max}/-p_0 = 1.267 + 2.41\lambda^2 - 3.32\lambda^4 + 18.38\lambda^6 - 27.29\lambda^8 + \dots\dots\dots (50)$$

となって、これを図示したのが第4図である。図中 a, b, c の記号はそれぞれ等方性板, かしわの板, 合板に対するものであることを意味している。

この結果より、一樣な内圧を受ける場合については、次の2点が注目される。

i) 板内の応力は、かしわの板と等方性板とではほとんど同じである。このことは植村氏⁽⁵⁾等も円孔を有する無限平板の場合に指摘しておられるが、これらの結果から境界の形および外力が点対称な場合には、異方特性の一つの値が1に近い材料では一般に等方性板とほとんど同じ応力分布を示すように思われる。

境界の形が点対称でない場合は、たとえば久保氏⁽⁷⁾の内圧を受ける円孔を持った半無限平板の応力計算によると、かしわの板 ($\lambda_1=1/p_1=0.599$, $\lambda_2=1/p_2=1.031$) の場合にも等方性板と異なった応力分布を示している。

ii) 異方特性の値が1に近くない材料では、内円孔縁に生ずる最大応力は等方性板に比してかなり大きくなっている。これも既に無限平板の場合⁽⁵⁾に指摘されていることであるが、(48)式と(50)式に見るように λ の最低次の項の係数も合板の方が等方性板より大きく、したがって λ の小さい範囲では、 λ とともに両者の最大応力の差は大きくなってゆく。

第 2 図

第 3 図

第 4 図

8. 結 語

以上直交異方性円環の応力分布を求める一般的な方法を説明し、一様な内圧を受ける場合の計算例を示した。この方法は解を λ のべき級数の形で求めているために λ の大きいところで解の収束に問題がある。第4図で、等方性板を除いて計算を $\lambda=0.5$ までにとどめたのはこのためである。しかし内円の半径が大きくなって λ が1に近くなると、材料の弾性的性質には無関係に力のつりあい関係のみから導かれる薄肉円筒の結果と一致するはずであるから、このことを考慮して、等方性板の解を漸近曲線とする曲線を用いて外そうすることにすれば、この欠点はある程度補うことができるであろう。第4図は上に述べた傾向を示している。

本論文では、応力境界値問題のみを考えたが、同じ

方法で変位境界値問題を取扱うこともできる。このことについては帯板の論文⁽⁸⁾を参照されたい。

最後に、本論文について大阪府立大学 関谷 壮教授に懇切な御討論をいただいた。記して感謝する次第である。

文 献

- (1) たとえば、太田、新制材料力学(昭 27-10), 225, 山海堂。
- (2) 極座標による解法としては Lexnitzky による、くさび状の板の解法があるが、境界条件に応じて 特別の形に 応力関数を 仮定するので一般解ではない。倉西、応用数学力学, 1, 3 (昭 22), 121。
- (3) 林、機械学会論文集, 25, 159, (昭 34-11), 1125。
- (4) 鷺津、機械学会論文集, 18, 68 (昭 27-3), 47; 池田、航空学会誌, 9, 90 (昭 17-10), 1209。
- (5) 池田、植村、武藤、応用力学, 1, 1 (昭 23), 8。
- (6) 林、航空学会誌, 8, 79 (昭 16), 1131。
- (7) T. Kubo, *Proc. 8th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* 1958, (1959), 111。
- (8) 林、第9回応用力学連合講演会 前刷 第1部(昭 34), 13。

539. 4. 013. 3 : 624. 043. 7 : 539. 382

直交異方性体の二、三の平面応力について*

林 卓 夫**

Some Plane Stress Problems of Orthotropic Material

by Takuo HAYASHI

As to the plane stresses of orthotropic material, various studies have been worked out by many investigators, but the stresses in a plate bounded by lines asymmetric with respect to the elastic axes of the material, have been little known now. In this paper, some problems of this kind are treated by the use of Beltrami-Cayley's conformal mapping method.

As examples, the stress distributions in (1) a semi-infinite plate, (2) an infinite plate with an elliptic hole, (3) an elliptic plate, which has boundary lines asymmetric with respect to the elastic axes of the material, are calculated. The results obtained show significant differences from these in isotropic plate and in orthotropic plate with symmetrical boundary to the elastic axes of the plate.

1. 緒 言

直交異方性板の平面応力問題は、今までに多くの研究者によって研究されているが、その大部分は、境界の形が板の弾性主軸に対称な場合に限られていて、対称でない場合を取扱ったものとしては、Lexnitzky⁽¹⁾、森口氏⁽²⁾、鷺津氏⁽³⁾等の幾つかの解があるにすぎない。これは直交異方性板の場合、物理平面で直接座標

回転を行ない、あるいは曲線座標を用いると、応力関数を支配する微分方程式が複雑なものとなり、それから先の取扱いが困難となるからであって、この方法によるものとしては、くさび形板の平面応力を計算した Lexnitzky⁽¹⁾の研究以外に見当たらないようである。

これに対し、直交異方性板の応力関数は、二つの関数平面の調和関数の和として与えられることが知られていて、したがって、それぞれの関数平面における境界を簡単な形に写像する適当な写像関数が見出だされるときは、問題を比較的容易に取扱うことができる。この方法は、有孔異方性板の二次元応力を求める

* 昭和 34 年 12 月 10 日 関西支部第 206 回講演会において講演、原稿受付 昭和 34 年 12 月 28 日。

** 正員、神戸商船大学(神戸市東灘区本庄町深江)。