539. 313:677. 023

極異方性に関する考察と巻層への応用について*

西原利夫**, 藤野清久***, 平井恒夫****, 津久間 新*****

Some Considerations of the Polar-Anisotropy and its Application to the Winding Package

by Toshio NISHIHARA, Kiyohisa FUJINO, Tsuneo HIRAI,
and Shin TSUKUMA

A yarn package may be considered as an elastic body consisting of concentric yarn layers around an axis of rotation, with different properties along tangential and radial directions. In this paper, stress functions of the anisotropic elastic body is applied to yarn package, and it is shown that there exist three regions in the yarn package, namely tensile stress region, compressive stress region and internal tensile stress region. The result of analysis matches well with the experimental results and this can be used advantageously for the control of tension force of yarn while building a package to avoid the bulge at the end of the package during rewinding.

1. 緒 言

異方性, とくに直交異方性に関してはかなり理論的に解明されているが, 軸対称弾性体に対する極異方性に関してはいまだ等閑に付されているように思われる。ここに極異方性とは極座標系における半径方向と円周方向とに対して示される異方性のことで, たとえば金属より線の開放巻, 巻取紙, 糸巻等の弾性的挙動においてみとめられるものである。

極異方性の問題を解析するにあたっては新たに極座標系におけるひずみ不分離の条件を作成し, それを基礎にして応力関数を求め, その特別の場合として等方性弾性学における周知の式と一致するをみた。極異方性論の応用の一例として, その特性をもつ薄層を同心円的に累積して行く場合に対する解析を示す。同心円的積層の任意の半径に存在する巻層の応力が外径の増加にともなう巻層の累積によって, どのように変化するかということは, それらの材料の巻上機械の設計上興味のある問題である。巻層の半径方向の応力に関しては巻層の累積効果にもとづいてしだいに重畳されて大きくなるということは当然推察されることであるが, その最大値を示すと思われる心管上での値の算定

は, 心管の設計上必要であらう。さらに重要なことは巻層の品質に関係すると思われるその円周方向の応力が巻層の累積によりどのように変化して行くかということである。

すなわち, ある半径に存在する巻層の円周方向応力は累積効果にもとづく応力のし緩によって, 巻かれた時に与えられた引張応力をしだいに失ってついに圧縮領域を形成し, この領域といまだ引張応力の存在する張力領域との境界位置は巻層数の増加とともに漸次移動する。この極異方性にもとづく圧縮領域の発生機構ならびに境界の移動の挙動が菊巻, バルジ等の巻層累積上の諸難点を誘起し, これらの極異方性積層を累積して大きな半径の巻層を構成することを不可能とするように思われる。極異方性に関する解析を糸巻の挙動に適用した結果, 従来経験的に知られていた糸巻に対する知識が理論的に整理され, 糸巻形成に際しての諸難点を解決する手がかりが得られた。

2. 極異方性に対する解析

軸対称の二次元問題について, 極座標を用うれば適合条件は次式のように求められる。すなわち

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = 2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

次にひずみと応力の関係は極異方性を考慮すれば次の式のように表わされる。

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E_\theta} (\sigma_\theta - \nu_\theta \sigma_r) \quad \dots\dots\dots (2)$$

* 昭和 33 年 4 月 1 日 第 35 期通常総会講演会および昭和 34 年 4 月 4 日 第 36 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 34 年 9 月 3 日。

** 名誉員, 正員。

*** 正員, 京都大学工学部。

**** 正員, 大阪市立大学工学部 (大阪市北区西扇町)。

***** 神津製作所。

ここに E_r , E_θ , ν_r , ν_θ はそれぞれ半径方向ならびに円周方向に対する弾性係数およびポアソン比である。応力関数を F とし、また、物体力を零と仮定すれば次の適合条件式をうる。

$$\frac{d^4 F}{dr^4} + \left(2 - \nu_\theta + \nu_r \frac{E_\theta}{E_r}\right) \frac{1}{r} \frac{d^3 F}{dr^3} - \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{r^3} \frac{dF}{dr} = 0 \quad (3)$$

ここに等方性、すなわち、 $E_r = E_\theta$, $\nu_r = \nu_\theta$ の場合には

$$\frac{d^4 F}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 F}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dF}{dr} = 0$$

となって周知の式と一致する。(3) 式の一般解は容易に求められ、

$$F = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2} + Cr^2 + D \quad (4)$$

ここに λ_1 , λ_2 は極異方性特性をあらわすもので次式より計算される。

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\left(2 + \nu_\theta - \frac{E_\theta}{E_r} \nu_r\right) \pm \sqrt{\left(2 + \nu_\theta - \frac{E_\theta}{E_r} \nu_r\right)^2 - 4 \left\{1 + \nu_\theta - \frac{E_\theta}{E_r} (\nu_r + 1)\right\}} \right] \quad (5)$$

特別の場合として等方性の場合には $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ となり、特性方程式の等根の場合に相当するので応力関数は次のようになる。

$$F = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D \quad (6)$$

応力および ひずみ成分は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A\lambda_1 r^{\lambda_1-2} + B\lambda_2 r^{\lambda_2-2} + 2C \\ \sigma_\theta &= A\lambda_1(\lambda_1-1)r^{\lambda_1-2} + B\lambda_2(\lambda_2-1)r^{\lambda_2-2} + 2C \\ \varepsilon_r &= [A\lambda_1(1-\nu_r(\lambda_1-1))r^{\lambda_1-2} + B\lambda_2\{1-\nu_r(\lambda_2-1)\}r^{\lambda_2-2} + 2C(1-\nu_r)]/E_r \\ \varepsilon_\theta &= [A\lambda_1(\lambda_1-1-\nu_\theta)r^{\lambda_1-2} + B\lambda_2(\lambda_2-1-\nu_\theta)r^{\lambda_2-2} + 2C(1-\nu_\theta)]/E_\theta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(7) 式において等方性の場合には、(6) 式の応力関数を用いることになるので、等方性弾性論で得られた結果と一致する。等方性に近づくにしたがって λ_1 は零に、 λ_2 は 2 に近づくので、(4) 式を用いれば (7) 式より明らかなように、応力、ひずみの分布が均一な状態に近づくように思われるが、しかしこの場合には境界条件を考慮すればわかるように、 A , B は必ずそれぞれ $1/\lambda_1$, $1/\lambda_2$ の因数をふくみ、 A , B の影響の大きいことから、やはりある分布を与え、極限の場合には (6) 式にて与えられた応力関数を用いた結果と一致することになると考えられる。

3. 巻層の半径増加にともなう応力について

一般に巻層はその形成過程より明らかなように回転軸に関して対称な回転体である。ここに、開放交錯巻の糸巻のように、その仮想的な層が極異方性を示す巻層を重ねた場合についてのべる。巻層のうち、過去

第 1 図

における応力と変形の歴史的背景にたつ糸層の累積により形成されたものであると考えられる糸巻でさえも、筆者等の実験⁽¹⁾によればその表面の圧縮性は線形であると仮定してさしつかえないようである。

極異方性を示す巻層において回転軸を z 軸とし、応力成分を第 1 図に示すようにとり微小要素の平衡を考えれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

同心円的に累積して形成されたと考えられる巻層においては容易に推察されるように変形が z 軸に対して対称であり、任意の半径 r における変形が z 軸方向に沿って一定であると仮定されるから、上式は簡単になり次式で表わされる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

以上の結果は前述の極異方性の解析を巻層に適用することの可能性を示している。

巻層の一例として以後主として糸巻について述べる。巻層のある種類に関しては血管上の境界条件の多少の変更を必要とする場合もおこる。

糸巻においても糸層が同心円的に積層されて形成されたものであると仮定するのであるが、糸巻に初期張

力をもった糸を巻きつけるということはその張力をもった糸層を, 糸巻表面にその張力にもとづく外圧によって変位を与えながら同心円的に累積して行くことであると考え. すなわち糸層を積層するということは, その半径において張力にもとづく圧力を加えることに等価であると仮定する.

いま第2図に示すように半径 r_i の心管上に糸層を積層して外径 r_0 の糸巻が形成された場合を考える. 張力装置によって与えられた張力にもとづく圧力を累積して糸巻の応力状態を解析するために, 糸巻内部の任意の半径 ρ において加えた張力の影響を考え, これを半径に沿って重畳する.

心管は経糸巻チーズにおいては大多数木製であり, 紡糸ケーキ巻においては金属製であって糸層に比べてはるかに剛性の高いものであると考えられるので, その半径方向の変形を無視する.

境界条件は糸巻の心管表面, 外径, および張力の作用径の内側ならびに外側に対して次のように与えられる. 内側の領域について

$$r=r_i: (u)_i=0, \quad r=\rho: (u)_i=u_i, \quad (\sigma_r)_i=-\chi_i$$

外側の領域について

$$r=\rho: (u)_0=u_0, \quad (\sigma_r)_0=-\chi_0, \quad r=r_0: (\sigma_r)_0=0, \quad \text{および} \quad (\sigma_r)_i=-p_0$$

ここに p_0 は $\rho=r_0$ の場合に $T(r_0)$ の張力にもとづく糸巻の外周に負荷された圧力である. なお, 変位連続の条件より $u_i=u_0$ また力の平衡より $\chi_i-\chi_0=T/\rho$ の関係が与えられる.

以上の関係より応力関数の定数は外側あるいは内側の領域に対してそれぞれ添字 0 および i を付けてあらわせば

第 2 図

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{1}{\lambda_1} \Theta \frac{1}{r_i^{\lambda_1-2}} \left[\left\{ \Theta_1 r_0^{\lambda_1-2} \frac{1}{\rho^{\lambda_1-1}} - \frac{1}{\rho} \right\} T + \Theta_2 \cdot p_0 \right] \\ A_0 &= \frac{1}{\lambda_1} \Theta \frac{1}{r_i^{\lambda_1-2}} \left[\left\{ r_i^{\lambda_1-2} \frac{1}{\rho^{\lambda_1-1}} - \frac{1}{\rho} \right\} T + \Theta_2 \cdot p_0 \right] \\ C_i &= -\frac{1}{2} \frac{\Theta}{\Theta_1} \left[\left\{ \Theta_1 r_0^{\lambda_1-2} \frac{1}{\rho^{\lambda_1-1}} - \frac{1}{\rho} \right\} T + \Theta_2 \cdot p_0 \right] \\ C_0 &= -\frac{1}{2} \frac{\Theta}{\Theta_1} \left[\Theta_1 \left(\frac{r_0}{r_i} \right)^{\lambda_1-2} \left\{ r_i^{\lambda_1-2} \frac{1}{\rho^{\lambda_1-1}} - \frac{1}{\rho} \right\} T + \Theta_2 \cdot p_0 \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

$$\text{ここに} \quad \Theta = \frac{1-\nu_\theta}{2-\lambda_1} \frac{1}{\left\{ 1 - \frac{1-\nu_\theta}{\lambda_1-1-\nu_\theta} \left(\frac{r_0}{r_i} \right)^{\lambda_1-2} \right\}}, \quad \Theta_1 = \frac{1-\nu_\theta}{\lambda_1-1-\nu_\theta}, \quad \Theta_2 = \frac{2-\lambda_1}{\lambda_1-1-\nu_\theta}$$

糸巻の任意の半径 ρ において加えられた引張応力 $T(\rho)$ の影響を線形仮定にしたがって糸巻の全領域にわたって重畳すれば, 糸巻中の任意の位置 r における応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^* &= \int_r^{r_0-\varepsilon} (\lambda_1 r^{\lambda_1-2} A_i + 2C_i) d\rho + \int_{r_i}^r (\lambda_1 r^{\lambda_1-2} A_0 + 2C_0) d\rho \\ \sigma_\theta^* &= \int_r^{r_0-\varepsilon} \{ \lambda_1 (\lambda_1-1) r^{\lambda_1-2} A_i + 2C_i \} d\rho + \int_{r_i}^r \{ \lambda_1 (\lambda_1-1) r^{\lambda_1-2} A_0 + 2C_0 \} d\rho \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

これは糸巻中の任意の半径の糸層の応力の巻層数累積による緩和応力をあらわす. 実際の糸巻に適用して考えれば巻糸時に引張応力 $T(r)$ を与えられた半径 r に存在する糸層の円周方向応力は, 糸層を半径 r_0 まで積層することによって $\{T(r) + \sigma_\theta^*\}$ になっており, 半径方向の応力は σ_r^* であることを示す. ε は最外層の糸層の厚さであるが, r_0 に比べてきわめて薄い層であるから解析を簡単にするためにこれを無視する.

無次元にするためにすべて心管半径の比であらわし, $r/r_i = x$, $r_0/r_i = y$, $\rho/r_i = \xi$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^* &= ah(y) \left[g_1(x) \int_x^y p(y, \xi) T(\xi) d\xi + bf(x, y) \int_1^x q(\xi) T(\xi) d\xi \right] \\ \sigma_\theta^* &= ah(y) \left[g_2(x) \int_x^y p(y, \xi) T(\xi) d\xi + \{c \cdot f(x, y) + k(y)\} \int_1^x q(\xi) T(\xi) d\xi \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

ここに

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{1}{1 - \frac{1-\nu_\theta}{\lambda_1-1-\nu_\theta} y^{\lambda_1-2}}, & g_1(x) &= \frac{1-\nu_\theta}{\lambda_1-1-\nu_\theta} x^{\lambda_1-2} - 1, & g_2(x) &= \frac{(1-\nu_\theta)(\lambda_1-1)}{\lambda_1-1-\nu_\theta} x^{\lambda_1-2} - 1, \\ p(y, \xi) &= \frac{1-\nu_\theta}{\lambda_1-1-\nu_\theta} y^{\lambda_1-2} \frac{1}{\xi^{\lambda_1-1}} - \frac{1}{\xi}, & q(\xi) &= \frac{1}{\xi^{\lambda_1-1}} - \frac{1}{\xi}, \\ f(x, y) &= x^{\lambda_1-2} - y^{\lambda_1-2}, & k(y) &= \frac{1-\nu_\theta}{\lambda_1-1-\nu_\theta} (\lambda_1-2) y^{\lambda_1-2} \\ a &= \frac{\lambda_1-1-\nu_\theta}{2-\lambda_1}, & b &= \frac{1-\nu_\theta}{\lambda_1-1-\nu_\theta}, & c &= \frac{(\lambda_1-1)(1-\nu_\theta)}{\lambda_1-1-\nu_\theta} \end{aligned}$$

解析をさらに簡単にするために $\rho=r_0$, すなわち糸巻の糸層を増加するということは, そのおのの半径において初期張力による外圧を累積して行くことに等価であると仮定して, したいに糸層を累積して行けば次のような近似解をうる.

$$\sigma_r^* = \int_x^y g_1(x) h(y) p(y) T(y) dy, \quad \sigma_\theta^* = \int_x^y g_2(x) h(y) p(y) T(y) dy \dots \dots \dots (11)$$

ただし (11) 式において $p(y)$ は (10) 式における $a \cdot p(y, y)$ をあらわす. (10) 式と (11) 式の数値計算結果を比較すれば, 極異方性がかかなり大きい場合にはほとんど同じ値を示し, 極異方性の大きい糸巻の解析に対しては (11) 式で十分であることがわかる.

巻返し張力を一定, すなわち $T(y)=T=\text{const.}$ とすれば (10) 式より

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= T \cdot a \cdot h(y) \left[g_1(x) \int_x^y p(y, \xi) d\xi + b \cdot f(x, y) \int_1^x q(\xi) d\xi \right] \\ \sigma_\theta^* &= T \cdot a \cdot h(y) \left[g_2(x) \int_x^y p(y, \xi) d\xi + \{c \cdot f(x, y) + k(y)\} \int_1^x q(\xi) d\xi \right] \end{aligned}$$

上式を計算すれば

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= -T \frac{\lambda_1-1-\nu_\theta}{\lambda_1-2} \frac{1}{1 - \frac{1-\nu_\theta}{\lambda_1-1-\nu_\theta} y^{\lambda_1-2}} \left\{ \left[1 - \frac{1}{\lambda_1-1-\nu_\theta} x^{\lambda_1-2} \right] \left[\frac{1-\nu_\theta}{(\lambda_1-1-\nu_\theta)(\lambda_1-2)} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{x} \right)^{\lambda_1-2} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \log \frac{y}{x} \right] + \frac{1-\nu_\theta}{1-\lambda_1-\nu_\theta} \{ x^{\lambda_1-2} - y^{\lambda_1-2} \} \left[\frac{1}{2-\lambda_1} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{x} \right)^{\lambda_1-2} \right\} + \log x \right] \right\} \\ \sigma_\theta^* &= -T \frac{\lambda_1-1-\nu_\theta}{\lambda_1-2} \frac{1}{1 - \frac{1-\nu_\theta}{\lambda_1-1-\nu_\theta} y^{\lambda_1-2}} \left\{ \left[\frac{(1-\nu_\theta)(\lambda_1-1)}{\lambda_1-1-\nu_\theta} - x^{\lambda_1-2} \right] \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1-\nu_\theta}{(\lambda_1-1-\nu_\theta)(\lambda_1-2)} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{x} \right)^{\lambda_1-2} \right\} + \log \frac{y}{x} \right] - \left\{ \frac{(1-\nu_\theta)(\lambda_1-1)}{\lambda_1-1-\nu_\theta} (x^{\lambda_1-2} - y^{\lambda_1-2}) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(1-\nu_\theta)(\lambda_1-2)}{\lambda_1-1-\nu_\theta} y^{\lambda_1-2} \right\} \left[\frac{1}{2-\lambda_1} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{x} \right)^{\lambda_1-2} \right\} + \log x \right] \right\} \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

現在紡績工場においては張力一定の巻返しが多く採用されている. R. T. 巻返し機において巻返しの全過程について考えれば, 巻糸時に付加される張力も平均的には一定と仮定してさしつかえないものと思われる. しかし張力一定で巻層を形成するという事は必ずしも望ましい条件ではなく, 巻層形成後の円周方向応力分布, パルジ, 菊巻等を考慮した初期張力の最適プログラム制御方式が望ましい.

(12) 式においては ν_r の項はあらわれず ν_θ のみで, ν_θ の影響が非常に大きいような印象を与えるのであるが, 前述のように極異方性の影響は総合的に λ_1 の項にはいっているのであって, ν_θ の影響が大きいとは結論できない.

4. 数値計算結果

数値計算は主として糸巻を対象として行なったが, 同じような仮定が成り立つならば任意の巻層に対して適用できるものである. 糸巻, とくに経糸チーズにおいては糸の交錯により空虚な部分が大きく, その比重は糸巻を構成している繊維のそれに比べてはるかに小さいものであり, 半径方向の圧力による糸自体の断面の変形は容易であると推察されるので, ν_θ は近似的に零とみなしてさしつかえないものと想像される⁽²⁾.

経糸巻を対象にして張力一定の巻返しについて極異方性特性 λ_1 の種々な値に対して行なった σ_r^* , σ_θ^* の数

値計算結果を第3図および第4図に示す。極異方性特性 λ_1 の影響をみるために $y=10$, すなわち心管半径の10倍まで巻いた場合の σ_r^* , σ_θ^* の状態を λ_1 をパラメータとしてまとめたのが第5図および第6図であって, わずかの極異方性の存在も糸巻に大きい影響をおよぼしていることがわかる。なお, 第4図ならびに第6図において, 一点鎖線であらわした $T=-1$ の線が糸層を巻きつけるときに最初に加えた張力のレベルである。また, 巻層数増加にともなう糸層の半径方向変位を後述の実験の形式にしたがって極異方性の大小についてあらわしたのが第7図である。

5. 巻層内部における張力の消失にともなう圧縮領域の生成とその境界について

糸巻の巻返し過程において与えられた張力にもとづく糸層中の円周方向の引張応力は, 巻層数の増加にと

もなっていたいに減少し, 巻糸時に糸に与えられた張力にもとづく糸層の初期引張応力 $T(x)$ のレベルに達すれば, すなわち, $T(x)\{1+\sigma_\theta^*/T(x)\}=0$ を満足する σ_θ^* に達したときに零になり, それ以後糸層は圧縮を受けることになる。たとえば第6図において一点鎖線であらわした $\sigma_\theta^*/T=-1$ の線が初期引張応力のレベルで, σ_θ^* の値がこの線をこえた範囲においては糸層に圧縮応力が働いていることを示す。現実の問題としては, 極異方性の大きい大径の糸巻の端面に往々にしてみられる菊の花のような模様, すなわち菊巻がこの現象のあらわれであると推察される。

いろいろな異方性について求めた半径 $y=10$ の糸巻中に残存する円周方向応力 σ_θ の分布, すなわち

第3図 半径方向応力 σ_r^*

第4図 円周方向緩和応力 σ_θ^*

第5図 $y=10$ における半径方向応力

第6図 $y=10$ における円周方向緩和応力

$\{T(x) + (\sigma_\theta^*)_x\}$ の分布を第 8 図に示す。ただしこれらの図はいずれも巻返し張力一定で、しかも糸巻全域にわたって同じ極異方性的挙動を示すと仮定した場合の数値計算結果である。糸巻の挙動を糸の挙動と同じように考えれば圧縮に対しては引張りとは全く違った挙動を示すものと思われ、糸巻形成の全過程にわたって画一的な解析は困難となる。ここに円周方向応力に関して引張応力の残存する領域を張力領域、圧縮応力の作用する領域を圧縮領域と名づける。この状態をあらわしたのが第 9 図であって、張力領域は圧縮領域をはさんで外部と内部に存在する。第 8 図よりわかるように極異方性の大きいほどこの傾向は著しくなる。

圧縮領域をその内部にふくんだ糸巻を解析するにあたって、圧縮領域が生成する瞬間、すなわち第 6 図で σ_θ^* が -1 の値をあらわす平面に接するまでは、いかえれば巻層増加にともなう応力の緩和成分が初期張力のレベルに達する瞬間までは単一の極異方性弾性体として解析することが可能で、この限界状態、いかえれば $|\sigma_\theta^*/T(x)|$ の最大値が 1 を示す単一の極異方性弾性体としての取扱いの限界であるような応力状態を基準状態とよぶことにする。基準状態に達するときの

外径を極異方性特性 λ_1 をパラメータとして図示したのが第 10 図であって、図中 -1 の値をあらわす一点鎖線をよぎる点がこの状態に達した時期をあらわす。この基準状態よりさらに巻層数を増加すれば圧縮領域を生ずる。圧縮領域の境界位置は巻層数の増加にともない外側へ、ならびに内側へとしだいに移動し、圧縮領域は漸増するものと思われる。

基準状態において $|\sigma_\theta^*|$ の最大値を示す半径、すなわち σ_θ^* の値が初期張力のレベルに達して $\{\sigma_\theta^*/T(x)\}$

第 8 図 $y=10$ の糸巻の円周方向応力

(a) 極異方性の小さい場合

(b) 極異方性の大きい場合

第 7 図 巻半径増加にともなう糸巻の半径方向変位

第 9 図

第 10 図 糸巻の外径とその場合の最大円周方向緩和応力との関係

$=-1$ になる半径, 換言すれば最初に圧縮応力状態があらわれる位置を半径 r_* であらわし, そのときの外径を r_*' とする. 基準状態よりさらに巻層数を増加した場合の圧縮領域の境界位置を r_* よりはかり内側へ Δr_i , 外側へ Δr_o とする (第 11 図).

圧縮領域の境界位置が糸巻半径に対応するものと思われ, この境界位置を求める問題は本質的には非線形性を含むものであるが, 解析を容易にするために次に述べるようにする.

圧縮領域の境界位置を求めるために, まず極異方性弾性体の内部に異質の挙動を示す圧縮領域の共存する状態を考え, その境界位置を設定する. その状態を第 11 図に示す. 圧縮領域の存在する糸巻に巻返し張力を累積して応力の変化を求めるには第 3 節にのべた重畳法をとる. 糸巻の傾向の著しいと推察される極異方性の大きい場合には, 前述の近似解を採用してもその結果にたいした差異が認められない.

圧縮領域に関しては繊維塊を圧縮する場合と同形の挙動を示すものと考え, 簡単のために弾性的で, かつ等方性であると仮定する. 第 11 図に示すような内部に等方性の圧縮領域をふくむ極異方性弾性体において境界条件は次のように与えられる.

$$A_3 = \frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{(\lambda_1 - 1)} f(\eta) \frac{1}{(r_* + \Delta r_o)^{\lambda_1 - 2}} p, \quad C_3 = -\frac{1}{2} p \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$\text{ここに} \quad f(\eta) = (\lambda_1 - 1) \frac{[(1 + \nu)\{(1 - \nu_\theta) - \alpha(1 - \nu)\} + (1 - \nu)\{(1 - \nu_\theta) + \alpha(1 + \nu)\}]\eta^{-2}}{[(1 + \nu)\{(\lambda_1 - 1 - \nu_\theta) - \alpha(1 - \nu)\} + (1 - \nu)\{(\lambda_1 - 1 - \nu_\theta) + \alpha(1 + \nu)\}]\eta^{-2}}$$

また, η は境界位置の無次元表示であって $\eta = (r_* + \Delta r_o)/r_i$ であり, $\alpha = E_0/E$ で, E および ν はそれぞれ等方性の圧縮領域における弾性係数ならびにポアソン比である.

圧縮領域の外側境界位置を $r_* + \Delta r_o$ に設定したが, この位置は糸巻の外径 r_o の r_*' よりの増加とともに, すなわち無次元表示においては境界位置 η は y の y' よりの増加とともに外側に移動するものであるから当然 y の関数である. ここに $y' = r_*/r_i$ である. そこで $\eta = F(y)$ あるいは $y = f(\eta)$.

以上の結果より圧縮領域における円周方向応力は

$$\sigma_\theta = \left[f(\eta) \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\lambda_1 - 2} - 1 \right] p \quad \dots \dots \dots (14)$$

糸巻の円周方向応力は $y = y'$ にて基準状態となり (14) 式にてあらわされる応力はそれ以後に生成するものであるから, 基準状態よりの y の増加にもなう x の位置の円周方向応力の糸巻累積による緩和成分を σ_θ^{**} であらわせば

$$\sigma_\theta^{**} = \int_{y'}^y \left[f(\eta) \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\lambda_1 - 2} - 1 \right] \frac{T(y)}{y} dy \quad \dots \dots \dots (15)$$

第 12 図の上図は, 糸巻全域にわたり単一の極異方性挙動を示すと考えた糸巻の圧縮領域の初めて発生する瞬間における基準状態をあらわしたもので, 下図は糸巻内部にさらに挙動の異なる圧縮領域を内蔵した場合の応力分布を示したものである. 基準応力状態における x の位置の残留引張応力は $T(x) + (\sigma_\theta^*)_x$ であって, y' よりの糸巻の増加による x の位置の付加応力 $(\sigma_\theta^{**})_x$ が上記の残留応力の値に等しくなったときの x の座標が境界位置を与える.

領域 1. 内部張力領域 (極異方性)

$$r = r_i; (u)_1 = 0$$

$$r = r_* - \Delta r_i; (u)_1 = u_1, (\sigma_r)_1 = -\chi_1$$

領域 2. 圧縮領域 (等方性)

$$r = r_* - \Delta r_i; (u)_2 = u_1', (\sigma_r)_2 = -\chi_1'$$

$$r = r_* + \Delta r_o; (u)_2 = u_2', (\sigma_r)_2 = -\chi_2'$$

領域 3. 外部張力領域 (極異方性)

$$r = r_* + \Delta r_o; (u)_3 = u_2, (\sigma_r)_3 = -\chi_2$$

$$r = r_o; (\sigma_r)_3 = -p$$

ここに p は最外層の糸巻に与えられた巻返し張力にもとづく糸巻への外圧であり, 圧縮領域に属するものに「'」を付けてあらわしている.

なお, 各領域の境界においては半径方向の変位が同じで, また半径方向の力がつりあっていなければならぬから

$$\text{変位連続の条件より} \quad u_1 = u_1', \quad u_2' = u_2$$

$$\text{力の平衡より} \quad -\chi_1 = -\chi_1', \quad -\chi_2' = -\chi_2$$

以上の結果より各領域における応力関数の定数を求めることができる. 実際問題として技術的に必要なのは外側の境界位置と外径の関係で, それを求めるために領域 3 のみについて考察をすすめる. 領域 3 においては

第 11 図

そこで $r=r_*+\Delta r_0$, すなわち $x=\eta$ においては

$$T(\eta) + \int_{\eta}^{y'} g_2(\eta) h(y) \frac{T(y)}{y} dy + \int_{y'}^y [f(\eta)-1] \frac{T(y)}{y} dy = 0 \dots\dots\dots (16)$$

(16) 式の積分方程式を解けば境界位置が y の関数として求められる。

もし極異方性特性 $|\lambda_1|$ がかなり大きいとすれば $y > 4$ の範囲においては $g_2(\eta)h(y)$ は -1 に収束する。また $[f(\eta)-1]$ に関しては前述のように $\nu_0 \doteq 0$ と仮定すれば

$$f(\eta) = \frac{\eta^2 \left\{ \frac{1}{\alpha(1-\nu)} - 1 \right\} + \left\{ \frac{1}{\alpha(1+\nu)} + 1 \right\}}{\eta^2 \left\{ \frac{1}{\alpha(1-\nu)} - \frac{1}{\lambda_1-1} \right\} + \left\{ \frac{1}{\alpha(1+\nu)} + \frac{1}{\lambda_1-1} \right\}}$$

で、また極異方性の大きいこと、ならびに $\eta > 2$ であることを考慮すれば近似的に

$$[f(\eta)-1] \doteq -\alpha(1-\nu)$$

で与えられる。ここに $\alpha = E_0/E$ で与えられ、 E は織布の圧縮性より類推することができる。第 13 図は既に発表された織布の圧縮挙動の一例⁽³⁾⁽⁴⁾であって、圧力のかなり大きい範囲においては E_0 に比べて E の値はかなり大きくなる。以上の考慮より α はかなり小さい値をとるから、 $[f(\eta)-1]$ は零に近い負の値に

第 12 図 基準応力と付加応力

第 13 図 織布における圧力と厚さの関係

第 14 図

収束する。ゆえに (16) 式より

$$T'(\eta) - m \frac{T(\eta)}{\eta} = -n \frac{T(y)}{y} \frac{dy}{d\eta}$$

ここに $m = g_2(\eta)h(y)$ で $n = [f(\eta)-1]$ である。いま巻返し張力一定、すなわち $T(y) = T = \text{const.}$ とすれば

$$\frac{m}{n} \frac{d\eta}{\eta} = \frac{dy}{y}$$

この解は容易に求められ

$$\eta = Cy^{n/m}$$

上式において m は -1 に、 n は零に近い負の値に収束するから

$$\eta \doteq \text{const.}$$

η は糸巻外径のかなり大きい範囲においては、 y のいかにかわらずある一定値に収束する。この状態を第 14 図に示す。以上の結果により菊巻の菊半径は糸巻外径のかなり大きい、すなわち $y > 4$ の範囲においては、巻層数を増加してもあまり変わらないことが推論できる。

6. 測定結果と菊巻に対する考察

実験はいずれも R. T. 巻返し機を用いて行なった。普通の張力装置を装備したこの種類の巻返し機においては、近似的に定張力巻返しと仮定してもさしつかえない。測定はチーズを対象にした。

圧縮領域も張力領域と同じ挙動を示すと仮定した場合の両領域の境界位置を理論的に求めたのが第 15 図であり、外側境界位置は巻層数の増加とともに外方に向ってだいたい直線的に移動することを示している

第 15 図 糸巻半径と境界位置の関係 (一様な極異方性の場合)

第 16 図 そ毛チーズにおける菊巻半径の測定結果

が, 実験結果は第 16 図のようにある半径に収束する傾向をもち, 前節で述べた圧縮領域は張力領域とは異なる挙動をすることを理論の妥当性を示している. 実験は $48/2^{\circ}$ のそ毛糸についてチーズ端面の糸の浮び上がった半径を測って菊巻半径とした. 以上は α の値の小さい場合の考察であるが, α が少し大きくなれば菊巻半径は上述のように収束せず, 巻半径の増大に応じてだいに外方に移動する. 実際においても, インクリーズドコーン巻のノーズエンド端面に生成する菊巻はだいに大きくなることが観測されている.

なお, 数値計算結果ならびに測定結果は定張力巻返しの場合について行なったが, 以上の結果からわかるように定張力巻返しは, とくに極異方性の大きい糸巻において, 良い品質のそれをうるためには必ずしも望ましい条件ではない. 筆者等は別報⁽⁵⁾で述べるプログラム制御方式により菊巻の問題を解決することができた.

第 17 図はチーズの糸長数百 m 間隔につき約 20 m の部分を黒く染めて巻返し, 端面にできた同心黒円を断続的に撮影して測定した糸層の半径方向移量である. それぞれ極異方性の大小により第 7 図とよい対比をなし, 理論はこれらの事象を定性的によく説明しているものと思われる. なお測定結果の図中の T. W. は慣例にしたがって張力をテンションワッシャの重量(匁)であらわしたものである.

7. 結 論

(1) 極異方性特性 λ_1 の影響は異方性がわずかでもかなり顕著であり, 異方性が大きくなるに従いその影響の増加率は逓減する. (2) 糸巻を極異方性と考

第 17 図 巻半径増加にともなう糸層の半径方向変位 (測定結果)

えることによって従来経験的に得られた知識がよく整理できる. (3) 極異方性の大きい大径の巻層中には張力領域と圧縮領域が存在し, これが菊巻, バルジ等の諸難点を誘発する. (4) 圧縮領域の E を比較的大きく保つことができれば, 菊巻半径はある程度以上大きくならない. (5) 圧縮領域の生成により誘起される菊巻, バルジ, ならびに糸のクリープの点から考えれば, より良質の糸を得るためには初期張力を制御することが望ましい.

文 献

- (1) 西原, 平井, 久保, 日本繊維機械学会昭和 31 年秋季大会講演会にて講演, 前刷 25 ページ.
- (2) F.I. Frank, *J. Text. Res.*, **28**, 3 (1958), 213.
- (3) H. Bogaty, *J. Text. Res.*, **23**, 2 (1953), 108.
- (4) R.E. Seaman, *J. Text. Res.*, **23**, 4 (1953), 262.
- (5) 藤野, 平井, 津久間, 日本繊維機械学会昭和 34 年年次大会講演会にて講演, 前刷 99 ページ.