678. 4. 074 : 621-752

防 振 ゴ ム の 形 状 効 果*

(第 3 報, すい台形防振ゴムとゴムブッシュ)

関 口 久 美**

On the Shape Effect of Rubber Vibration Isolators

(3rd Report, Truncated Cone, Truncated Pyramid
Type Rubber and Rubber Bush)

by Hisayoshi SEKIGUCHI

The shape of rubber vibration isolators are not limited as simple bar type with circular or rectangular uniform cross section, but truncated cone or truncated pyramid type rubber and rubber bush are often used. So as the third item of shape effect of rubber vibration isolators, the author made some calculations and experiments, and discussed about their spring constants. Especially truncated rubbers are used as the elements of compound type isolators. Then calculations about such rubbers were made comparing with those that have uniform cross sections.

1. 緒 言

防振ゴムの動特性に関する形状効果として,

(1) 複素弾性率と複素せん断弾性率の間の関係

(2) 応力を受けて変形した時のばね定数その他を
求める漸近近似計算法

(3) 接着部におけるすみとりの R の影響

(4) 損率や複素せん断弾性率が形によってほとんど
変わらないこと

等についてさきに報告した⁽¹⁾⁽²⁾. これは円柱, 角柱, 中空円筒状の様な断面を持つ防振ゴムについて, 圧縮方向およびねじりに関する考察を行なったものである. 実際に使われている防振ゴムの形はさまざまであって, 複雑なものは実験的にその特性を求めるより外に方法がない. しかし, 単純な形の要素を組合わせた複合形や, 円すい台形, 角すい台形あるいはゴムブッシュ等も広く使われている. 今ここでは, 断面一樣な場合のせん断変形における特性と, すい台形, ブッシュのばね定数について計算と実験を行なってみた.

2. せん断の場合

軸方向の動特性, 複素弾性率は

$$\left. \begin{aligned} E^* &= E_1 + iE_2 = k \cdot (l/A) + ic\omega \cdot (l/A) \\ G^* &= G_1 + iG_2 = k \cdot (l/I_p) + ic\omega \cdot (l/I_p) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ただし, k : ばね定数, c : 減衰係数, ω : 円振動数, l : 長さ, A : 断面積, I_p : 極慣性モーメント
で表わされる. 試料がせん断方向に変形したとき, その両端面はいつも平行を保っているとする, 外力 P による変形を曲げによるものとせん断によるものの和と考える

$$\delta_1 = P \cdot \left(\frac{l^3}{12E_1 I} + \frac{\beta l}{G_1 A} \right) \dots\dots\dots (2)$$

で表わされ, この G_1 は (1) の第 2 式の G_1 に等しい. この変形をすべてせん断によるものと考え, 見掛けのせん断弾性率 G_{ap} をとるとその変形は

$$\delta_2 = P \cdot \frac{\beta l}{G_{ap} A} \dots\dots\dots (3)$$

となる. この δ_1 と δ_2 は同じはずである. また $E_1 = \gamma G_1$ とおくことができ, β は定数で円柱なら $32/27$, 角柱で $6/5$ であるから G_{ap} と G_1 の比を求めると,

$$\left. \begin{aligned} \frac{G_{ap}}{G_1} &= \frac{1}{\frac{1}{3\gamma\beta} \left(\frac{l}{r} \right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{9}{128\gamma} \left(\frac{1}{S} \right)^2 + 1} && \text{(円柱)} \\ \frac{G_{ap}}{G_1} &= \frac{1}{\frac{1}{\gamma\beta} \left(\frac{l}{h} \right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{5}{24\gamma} (m+1)^2 \left(\frac{1}{S} \right)^2 + 1} && \text{(角柱)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

* 昭和 34 年 4 月 2 日 第 36 期通常総会講演会および昭和 34 年 8 月 30 日 第 9 回応用力学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和 34 年 9 月 10 日.

** 正員, 姫路工業大学 (姫路市伊伝 600).

を得る。ここで r は円柱の半径, h は角柱断面の外力 P に平行な辺の長さ, m は P に直角, 平行の両辺の長さの比である。 γ は形状係数 S の関数である⁽¹⁾ から, G_{ap}/G_1 は第1図のような簡単な共線図表で求められる。 m の値はあまり大きくも小さくもとれないから, S の値が0.8以上になると, 円柱形でも角柱形でも G_{ap}/G_1 の値は0.98以上となり, 近似的に1とみなし得ることが多い。また長方形断面の場合, 2辺の方向に最大, 最小のばね定数がみられる。それで $m \geq 1$ にとり, m を媒介変数として S と $k_{\max}/k_{\min}$ の関係を表わすと第2図のようになり, この比はあまり大きくとれないことがわかる。

3. 円すい台のばね定数

第3図のような円すい台を考え, 頂点より x の距離にある微小厚み dx の円板を仮想する。この円板の軸方向の力 P による変形は

$$d\delta = \frac{P}{E} \frac{dx}{\pi \left(\frac{R-r}{l} x \right)^2}$$

これを上底から下底まで積分すると

$$\delta = \frac{P}{E\pi} \frac{1}{\left(\frac{R-r}{l} \right)^2} \int_{rl/(R-r)}^{Rl/(R-r)} \frac{dx}{x^2} = \frac{Pl}{E\pi Rr} \left\{ \dots (5) \right.$$

$$\therefore k = E \frac{\pi Rr}{l}$$

せん断の場合も G_{ap} を使い全く同様にして

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{P\beta l}{G_{ap}\pi Rr} \\ k &= G_{ap} \frac{\pi Rr}{\beta l} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

を得る。ねじりについては, ねじりモーメント T がかかっているとして, 微小厚みの円板のねじれ角を $d\theta$ とすると

$$d\theta = \frac{2\pi dx}{\pi G \left(\frac{R-r}{l} x \right)^4}$$

これを積分すると

$$\theta = \frac{2T}{\pi G} \int_{rl/(R-r)}^{Rl/(R-r)} \frac{dx}{\left(\frac{R-r}{l} x \right)^4} = \frac{2}{3\pi} \frac{Tl(R^2 + Rr + r^2)}{GR^3r^3} \left\{ \dots (7) \right.$$

$$\therefore k = \frac{3\pi}{2} \frac{GR^3r^3}{l(R^2 + Rr + r^2)}$$

第1図 G_{ap}/G_1 を求める図表

第2図 S と m による $k_{\max}/k_{\min}$ の変化

となる。動試験では上記の式の E , G の代りに E_1 , G_1 を入れて計算する。

4. 角すい台のばね定数

断面が長方形または正方形の直角すい台を考えることにすれば第 4 図のようになる。一般に同図のように、斜めの 4 りょうは 1 点で交わらず、二つずつ z' の高さで交わり、この 2 りょうを 2 辺とする三角形の中線の延長が z の高さで交わる。今下底より y の高さにある微小厚み dy の長方形板を考えると、この 2 辺

$$c_1, c_2 \text{ は } \begin{cases} c_1 = a_1 - (a_1 - b_1)(y/l) \\ c_2 = a_2 - (a_2 - b_2)(y/l) \end{cases}$$

$$I = \frac{l}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)} \int_0^1 \frac{dt}{(t - K)} = \frac{l}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)K(K^{-1})} = \frac{l}{a_1 b_2}$$

$$\therefore k = E \frac{a_1 b_2}{l} \dots\dots\dots (9)$$

$K_1 \neq K_2$ であると

$$I = \frac{l}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)} \int_0^1 \frac{1}{K_1 - K_2} \left(\frac{1}{t - K_1} - \frac{1}{t - K_2} \right) dt$$

$$= \frac{l}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(K_1 - K_2)} \left[\log \left| \frac{t - K_1}{t - K_2} \right| \right]_0^1 = \frac{l}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \log \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}$$

$$\therefore k = E \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{l \log a_2 b_1 / a_1 b_2} \dots\dots\dots (10)$$

を得る。

せん断の場合も全く同様にして

$$K_1 = K_2 \text{ なら}$$

$$k = G_{ap} \frac{a_1 b_2}{\beta l}$$

$$K_1 \neq K_2 \text{ なら}$$

$$k = G_{ap} \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\beta l \log a_2 b_1 / a_1 b_2}$$

$$\dots\dots\dots (11)$$

第 3 図 円 す い 台

である。この変形を下底から上底まで積分する。軸方向力 P による変形は

$$\delta = \frac{P}{E} \int_0^l \frac{dy}{\left(a_1 - \frac{a_1 - b_1}{l} y\right) \left(a_2 - \frac{a_2 - b_2}{l} y\right)} = \frac{P}{E} I$$

この I を求める計算を行なうのに $y = lt$ とおくと

$$I = \int_0^1 \frac{ldt}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \left(\frac{a_1}{a_1 - b_1} - t\right) \left(\frac{a_2}{a_2 - b_2} - t\right)}$$

となる。ここで

$$\begin{cases} a_1/(a_1 - b_1) = K_1 \\ a_2/(a_2 - b_2) = K_2 \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

とおく。

$K_1 = K_2 = K$, すなわち $z = z'$ ならば

第 4 図 角 す い 台

ねじりも同様に計算する.

$$\theta = \frac{T}{G} \int_0^l \frac{dy}{\alpha \left(a_1 - \frac{a_1 - b_1}{l} y \right) \left(a_2 - \frac{a_2 - b_2}{l} y \right)} = \frac{T}{G} I'$$

とおき, $y = lt$ とすると

$$I' = \frac{l}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)^3} \int_0^1 \frac{dt}{\alpha(K_1 - t)(K_2 - t)^3} \dots\dots\dots (12)$$

$K_1 = K_2 = K$ なら, 断面の2辺の比によって決まる α は一定となり

$$I' = \frac{l}{\alpha(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)^3} \int_0^1 \frac{dt}{(t - K)^4} = \frac{l}{3\alpha(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)^3} \frac{3K^2 - 3K + 1}{K^3(K - 1)^3} = \frac{l}{\alpha} \frac{(a_2^2 + a_2b_2 + b_2^2)}{3a_1a_2^2b_2^3}$$

$$\therefore k = \frac{\alpha G}{l \frac{(a_2^2 + a_2b_2 + b_2^2)}{3a_1a_2^2b_2^3}} \dots\dots\dots (13)$$

$K_1 \neq K_2$ なら α も y の関数で, (12) 式において図式積分で行なわねばならぬが, 実際には α の変化を無視し得ることが多いので, α を定数とみなし得る場合について積分を行なう.

$$I' = \frac{l}{\alpha(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)^3} \int_0^1 \frac{dt}{(t - K_1)(t - K_2)^3}$$

$$= \frac{l}{\alpha(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)^3} \int_0^1 \left\{ \frac{A}{t - K_1} + \frac{B}{t - K_2} + \frac{C}{(t - K_2)^2} + \frac{D}{(t - K_2)^3} \right\} dt$$

として部分分数にわけると

$$A = \frac{1}{(K_1 - K_2)^3}, \quad B = \frac{1}{(K_2 - K_1)^3}, \quad C = -\frac{1}{(K_2 - K_1)^2}, \quad D = \frac{1}{K_2 - K_1}$$

となる. それで

$$I' = \frac{l}{\alpha(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)^3} \left[\frac{1}{(K_2 - K_1)^3} \log \left| \frac{t - K_2}{t - K_1} \right| + \frac{1}{(K_2 - K_1)^2} \frac{1}{t - K_2} + \frac{1}{2(K_2 - K_1)} \frac{1}{(t - K_2)^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{l(a_1 - b_1)^2}{(a_1b_2 - a_2b_1)^3} \log \frac{a_1b_2}{a_2b_1} - \frac{l(a_2 - b_2)}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 a_2^2 b_2^2} \left\{ (a_1 - b_1) a_2 b_2 + \frac{1}{2} (a_2 + b_2) (a_1 b_2 - a_2 b_1) \right\}$$

$$\therefore k = \frac{\alpha G}{\frac{l(a_1 - b_1)^2}{(a_1b_2 - a_2b_1)^3} \log \frac{a_1b_2}{a_2b_1} - \frac{l(a_2 - b_2)}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 a_2^2 b_2^2} \left\{ (a_1 - b_1) a_2 b_2 + \frac{1}{2} (a_2 + b_2) (a_1 b_2 - a_2 b_1) \right\}} \dots\dots\dots (14)$$

でばね定数が求められる.

以上述べてきた円すい台, 角すい形防振ゴムのばね定数や弾性率を計算するにあたり, 次のように扱うことにする.

(a) 等価の断面積, 等価の極慣性モーメントを第1表に示すようにとり, 円柱形, 角柱形と同じように計算する.

(b) 等価の断面積と自由表面積より形状係数 S を決める.

(c) この S と既報の E_1 と G_1 の関係式より形状効果を考慮に入れた E_1 を求める.

第 1 表

	等価断面積	等 価 極 慣 性 モ ー メ ン ト
円すい台	πRr	$\frac{R^3 r^3}{R^2 + Rr + r^2}$
角すい台 $K_1 = K_2$	$a_1 b_2$	$\frac{3 a_1 a_2^2 b_2^3}{a_2^2 + a_2 b_2 + b_2^2}$
角すい台 $K_1 \neq K_2$	$\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\log a_2 b_1 / a_1 b_2}$	$\frac{1}{\left[\frac{l(a_1 - b_1)^2}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^3} \log \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} - \frac{l(a_2 - b_2)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 a_2^2 b_2^2} \left\{ (a_1 - b_1) a_2 b_2 + \frac{1}{2} (a_2 + b_2) (a_1 b_2 - a_2 b_1) \right\} \right]}$

5. ブシュのばね定数

ゴムブシュを設計、製造するときに、軸直角方向と軸方向のばね定数 $k_{\perp}$, $k_{\parallel}$ と、この二者の比が問題になることが多い。これらのばね定数の計算式として広く使われている式があるが、軸直角方向の式はあまりよく合わない。それで上述の計算結果を利用してブシュのばね定数を計算してみた。

(1) 軸直角方向のばね定数 第5図に示すように、ブシュの軸を含み、水平面と α , $\alpha+d\alpha$ の角をなす2面で切りとられる微小部分を取り、これを角すい台と考える。圧入形のブシュもゴムと内、外筒との接触部分は接着形と同様に考えて大きな誤差はない。この微小部分の圧縮およびせん断方向のばね定数を k_c , k_s とすると (10), (11) 両式より

$$\left. \begin{aligned} k_c &= E \frac{b_2 R - a_2 r}{(R-r) \log b_2 R / a_2 r} \\ k_s &= \frac{G_{ap}}{\beta} \frac{b_2 R - a_2 r}{(R-r) \log b_2 R / a_2 r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

となる。 α の傾斜角を持つ微小部分の鉛直方向のばね定数は

$$dk = k_c \sin^2 \alpha + k_s \cos^2 \alpha = \frac{b_2 R - a_2 r}{(R-r) \log b_2 R / a_2 r} \left(E \sin^2 \alpha + \frac{G_{ap}}{\beta} \cos^2 \alpha \right) d\alpha$$

これをブシュ全体について積分すると

$$\left. \begin{aligned} k_{\perp} &= \frac{4(b_2 R - a_2 r)}{(R-r) \log b_2 R / a_2 r} \left\{ E \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha + \frac{G_{ap}}{\beta} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha \right\} = \frac{\pi(b_2 R - a_2 r)}{(R-r) \log b_2 R / a_2 r} (E + G_{ap}/\beta) \\ \text{もし } a_2 &= b_2 = l \text{ なら} \\ k_{\perp} &= \frac{\pi l}{\log R/r} (E + G_{ap}/\beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

となる。現在

$$\bar{k}_{\perp} = \frac{\pi l(R+r)}{2(R-r)} (E_{ap} + G_{ap}) \dots\dots\dots (17)$$

が使われている⁽³⁾。(16) 式の $E + G_{ap}/\beta$ と (17) 式の $E_{ap} + G_{ap}$ は表現方法が違うけれど同じものであるので、これにかかる係数によってその値が違ってくる。いま (16) の第2式で示す $k_{\perp}$ と $\bar{k}_{\perp}$ の比をとると

$$\frac{k_{\perp}}{\bar{k}_{\perp}} = \frac{2(R-r)}{(R+r) \log R/r} = \frac{2(R/r-1)}{(R/r+1) \log R/r} \dots\dots\dots (18)$$

となり、 R/r による $k_{\perp}/\bar{k}_{\perp}$ の変化を表で示すと第2表のようになり、 $k_{\perp}$ の方が小さくでてくる。

(2) 軸方向のばね定数 この場合も (1) と同じく第6図のように微小部分を取り、そのばね定数を dk とおくと

$$dk = \frac{G_{ap}}{\beta} \frac{b_2 R - a_2 r}{(R-r) \log b_2 R / a_2 r} d\theta$$

これを積分して求めたばね定数 $k_{\parallel}$ は

第5図 ブシュ (軸直角方向の場合)

第6図 ブシュ (軸方向の場合)

第 2 表

R/r	$k_{\perp}/\bar{k}_{\perp}$
1.2	1.0
1.5	0.986
2.0	0.964
2.5	0.938
3.0	0.911

$$k_{\parallel} = \frac{G_{ap}}{\beta} \frac{2\pi(b_2R - a_2r)}{(R-r) \log b_2R/a_2r} \left. \begin{array}{l} \text{もし } a_2 = b_2 = l \text{ なら} \\ k_{\parallel} = \frac{G_{ap}}{\beta} \frac{2\pi l}{\log R/r} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

となりこれは既に広く使われている式と同じものである。

(3) $k_{\perp}$ と $k_{\parallel}$ の比 この両者の比を ξ とおくと

$$\xi = \frac{\frac{\pi(b_2R - a_2r)}{(R-r) \log b_2R/a_2r} (E + G_{ap}/\beta)}{\frac{2\pi(b_2R - a_2r)}{(R-r) \log b_2R/a_2r} G_{ap}/\beta} \left. \begin{array}{l} a_2 \neq b_2 \text{ するとき} \\ \dots\dots\dots \\ a_2 = b_2 \text{ の場合も} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\xi = \frac{\beta}{2} \frac{E}{G_{ap}} + \frac{1}{2}$$

となって全く同じものである。 ξ は E/G_{ap} の関数となり、この値をどうとるかということは形状効果をどのように表わすかということになる。

6. 実験的考察

以上に述べた諸式を実験によって確かめ、漸近近似計算や形状効果について考えてみる。

(1) すい台形防振ゴム (その1) 第3表の配合で、加硫も膨潤試験の結果ほぼ同等であると考えられる接着形とし、その形は

円柱形: $20\phi \times 15$

第3表

成 分	含有量
R.S.S. No. 3	100
い お う	2.5
亜 鉛 華	10
老 防 D	1
ステアリン酸	1.5
カーボンブラック 三池 #20	35
軽 炭	30
バイントール	5
促進剤 C.Z.	0.7
スピンドル油	3
合 計	188.7

第4表

	円柱形	円すい台形	角すい台形
E_1 kg/cm ²	39.0	41.0	39.3
G_1 kg/cm ²	12.0	11.8	11.5
L	0.035	0.032	0.034

円すい台形: 14ϕ , $20\phi \times 15$

角すい台形: 15ϕ , $20\phi \times 15$

の3種類のものを使用した。平均応力 $\sigma_0 = 0$ における軸方向の動試験と、ねじり振動試験の結果は第4表のようになった。 E_1 は多少ばらつきがあるが、形状効果もあり、これは当然のことである。

平均応力によるばね定数の変化を求める漸近近似計算は、円柱や角柱では高い精度をもっている。これを変形があまり大きくない(15%以下ならよい精度を持っている)すい台形に適用するには次のようにする。

(a) ゴムは非圧縮性と仮定する。

(b) すい台形も圧縮すればその側面はふくらんでくるが、その時の自由表面積を求めることはむずかしい。それで、変形後も円すい台、角すい台の形を保って広がり、上底、下底の半径あるいは2辺の比が変わらないと仮定して、自由表面積、等価断面面積を計算すると、形状係数 S が求まり、 E/G の関係については円柱、角柱の式を適用する。

この円すい台、角すい台の試料の、 $\sigma_0 = 0$ におけるばね定数をもととし、数種の平均荷重 W_m におけるばね定数を、第1報に述べた方法で計算した結果と実験結果を比べたのが第5表である。

(2) すい台形防振ゴム (その2) 第6表の配合で、その形は

円柱形: $20\phi \times 15$

円すい台形: 20ϕ , $30\phi \times 15.4$

角すい台形: 20ϕ , $30\phi \times 15.5$

とした。 $\sigma_0 = 0$, 共振振動数 = 1000 ± 30 cpm にお

第5表

円すい台			角すい台		
W_0 kg	k 実験 kg/cm	k 計算 kg/cm	W_0 kg	k 実験 kg/cm	k 計算 kg/cm
0	72.3	—	0	78.2	—
3.08	75.0	74.3	4.5	84.5	83.5
6.15	77.5	77.2	9.0	92.5	90.0
9.23	81.2	81.7	13.5	98.2	96.1

第6表

成 分	含有量
R.S.S. No. 3	100
亜 鉛 華	5
ステアリン酸	1
老 防 D	2
い お う	3
促進剤 D.M.	0.5
カーボンブラック コンチネンタル E.P.C.	40
合 計	151.5

第 7 表

	円 柱 形	円すい台形	角すい台形
E_1 kg/cm ²	48.2	49.6	53.0
G_1 kg/cm ²	13.2	12.5	13.1
L	0.038	0.035	0.037
E_1 計算 kg/cm ²	—	50.6	55.0

第 8 表

		円すい台形	角すい台形
計 算	G_{ap} kg/cm ²	13.1	13.6
	k kg/cm	33.8	43.9
実 験	G_{ap} kg/cm ²	13.2	13.4
	k kg/cm	34.2	43.3

る E_1 , G_1 , L (損率) を求め, さらに円柱形の G_1 より形状効果の式によってすい台形の E_1 を算出し, 実験から求めた E_1 と比較すると第 7 表のようになる. またこれらの試料を製造後 3 箇月室温で放置し, 後加硫が十分進行したのを使い円柱形の G_1 と G_{ap} を求めると,

$$G_1 = 14.8 \text{ kg/cm}^2, \quad G_{ap} = 12.33 \text{ kg/cm}^2$$

を得た. これより円すい台, 角すい台の G_{ap} , せん断の k を計算し, 実験結果と比較すると第 8 表のようになり, 両者は非常によく一致している.

(3) **ブシュの例** ブシュの形状効果を考えるとき, 形状係数 S のとり方を次のように考える. ブシュのばね定数の計算にあたり, その微小部分を角すい台とみなした. それで, a_1 , b_1 に相当するものとして外周, 内周をとり, 角すい台に準じて等価の断面積 A_{eq} を求めた. 自由表面積に関しては, 角すい台には 4 面あるが, ブシュでは 2 面のみが完全な自由表面で, 他の 2 面は実在せずエンドレスになっている. それで無限長柱と考えられないこともない. しかし実際には無限に長いものでもないで, 実在する両端面のみを自由表面とし, 無限長柱とは別に E/G の関係を実験的に求めてみることにした. そうすると等価の断面積は

$$\left. \begin{aligned} a_2 = b_2 = l \text{ なら} \\ A_{eq} &= \frac{2\pi l(R-r)}{\log R/r} \\ a_2 \neq b_2 \text{ なら} \\ A_{eq} &= \frac{2\pi(b_2 R - a_2 r)}{\log b_2 R / a_2 r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

となり, $R-r$ が高さに相当する.

このようにするとブシュの S は 1 より大きいことが多い. 角柱から推定しても S の値が大きいと $G_{ap}/G \neq 1$ とみなしてよいから, ブシュでは $G_{ap}/G \neq 1$ と考えることにする. また G_1 , E_1 , G_{ap} 等は周波数によってその絶対値は変化するが, 同じ周波数におけるこれら

第 7 図 ブシュの形状効果曲線

の比は変わらないはずである. 今実験例として, 高田重作氏の資料⁽⁴⁾を引用する. これは静試験によって E を求めたもので, (20) 式より $E/G \neq E/G_{ap}$ を計算し, S との関係をも●印で記入したのが第 7 図である. また筆者が動試験によって得た結果をも○印で同図中に記入しておく, この S と E/G の関係は二次曲線状になり, 従来使われて来た武井健三氏提唱の無限長柱の式⁽⁵⁾よりかなり小さい値を示しているが, S のとり方等が違ふことを付記しておきたい. また同図中破線で示したのは第 1 報で筆者が円柱, 中空円筒の式として求めたもので, 上記の計算の β の値を円柱と同じ 32/27にとるとこのようにうまくつながるので, ブシュも円柱, 中空円筒と同じわく内で扱えることを示しているようであるが, これに関しては今後の研究に待ちたい.

結 言

以上述べてきたことを要約すると

(1) せん断における見掛けのせん断弾性率 G_{ap} と G_1 の比は形状係数の関数として表わされ, 共線図表により簡単に求まるようになった.

(2) 円すい台形, 角すい台形のゴムは, 第 1 表に示すように等価の断面積, 極慣性モーメントをとると, 円柱や角柱と同様に扱うことができる.

(3) すい台形防振ゴムにも漸近近似計算法が適用できる.

(4) ブシュの軸直角方向のばね定数は従来の式より求めたものに比べて小さな値を示す式が導かれ, また E/G に関しては無限長柱の式として知られているものより小さくなる. またブシュは円柱の一種として扱われるのが妥当なように思われる.

本研究は文部省科学試験研究費の補助を受けて行なったものである。この研究にあたり終始御指導を賜わった京都大学 榎木義一教授に心から御礼申上げる次第である。また試料を提供していただいた東洋ゴム工業会社、日輪ゴム工業会社や、実験に協力された姫路工業大学学生南本陽二郎、勝間田富男、市川峯博の諸君に感謝の意を表する。

文 献

- (1) 関口, 西村, 沢田, 機械学会論文集, **24**, 139 (昭 33-3), 205.
- (2) 関口, 西村, 道田, 中川, 機械学会論文集, **24**, 147 (昭 33-11), 947.
- (3) 防振ゴム研究会編, 防振ゴム, (昭 30), 19.
- (4) 高田, 日本ゴム協会 35 分科会資料, 資料番号 35-15-4 (昭 33).
- (5) 眼部, 武井, 日本ゴム協会誌, **23**, 7 (昭 26), 1.

534. 113. 014. 5 : 621-233. 1

回転軸の分数調波, “和差調波” 振動について*

山 本 敏 男**

On Sub-Harmonic and “Summed and Differential Harmonic”
Oscillations of Rotating Shaft

by Toshio YAMAMOTO

The author has found experimentally that sub-harmonic oscillations and “summed and differential harmonic” oscillations take place in a shaft system with non-linear spring characteristics and multiple degrees of freedom. In the present paper, these vibrations are treated mathematically and analytically. Conclusions arrived may be summarized as follows:

1) The equation of response curves of sub-harmonic oscillations of order 1/2 has qualitatively the same construction as that of rectilinear vibratory system. The hard or soft spring characteristic results in response curves of both hard and soft spring types.

2) When two vibrations taking place at the critical speed of “summed and differential harmonic” oscillations are both to forward or both to backward precessional whirling motions, only the summed harmonic type can occur and the differential type does not take place.

When “summed and differential harmonic” oscillation consists of forward and backward precessional motion, only differential type has possibility of occurrence.

1. ま え が き

回転体を, たとえば単列深みぞ形玉軸受などでささえた場合, 回転軸の横たわみのばね特性に非線形性があらわれ, その結果分数調波, “和差調波” 様式の旋回運動を生ずる^{(1)~(3)}. これらの振動の発生の可能性に関してはすでに述べたところであるが⁽⁴⁾, 本論文では, さらにこれらの振動がどのような条件下で発生可能であるか, どのような形の振動が発生しうるかなどを解析的に調べ, 共振曲線の式を求め, これらの結果を実験とも比較した。

2. 基準座標への変換

1 個の回転軸が軸に取付けられている場合の運動方

程式は,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c_1\dot{x} + \alpha_0x + \gamma_0\theta_x + \Phi_1 &= me\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y} + c_2\dot{y} + \alpha_0y + \gamma_0\theta_y + \Phi_2 &= me\omega^2 \sin \omega t \\ I\ddot{\theta}_x + I_p\omega\dot{\theta}_y + c_3\dot{\theta}_x + \gamma_0x + \delta_0\theta_x + \Phi_3 \\ &= (I_p - I)\tau\omega^2 \cos(\omega t + \beta_0) \\ I\ddot{\theta}_y - I_p\omega\dot{\theta}_x + c_4\dot{\theta}_y + \gamma_0y + \delta_0\theta_y + \Phi_4 \\ &= (I_p - I)\tau\omega^2 \sin(\omega t + \beta_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

である⁽⁵⁾. ここに x, y はそれらの方向の回転体の変位, θ_x, θ_y は回転体の傾き角の x, y 方向の成分, m は回転体の質量, I_p は回転体の極慣性モーメント (回転軸に関する慣性モーメント), I は回転体の中心を通り回転軸に直角な軸に関する慣性モーメント, ω は回転速度, $\alpha_0, \gamma_0, \delta_0$ は軸のばね定数, e は回転体の偏心量 (静不つりあい量), τ は極慣性モーメントの慣性主軸と回転軸間のわずかな不一致の角度 (動不

* 昭和 34 年 10 月 29 日 長崎臨時大会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和 34 年 7 月 8 日.

** 正員, 名古屋大学工学部 (名古屋市中区不老町).